Písemná část zkoušky z Matematiky, 3.1.2024, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno:. . . . .

- **Zadání je na dvou stranách.**
- Do vzorců stačí dosadit (integrály a derivace vypočítat), nemusíte dopočítávat numericky na kalkulačce.

1. [12 bodů $(3+3+3+3)$] Derivace.

(a) Napište definici derivace funkce jedné proměnné (pomocí limity) a vysvětlete rozdíl ve fyzikální interpretaci derivace jako celku a ve fyzikální interpretaci zlomku, který je v definici derivace za limitou.

(b) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y=\frac{a}{(x+1)^2} \quad \text{a} \quad y=e^{bx},$$

kde $a,b>0$ jsou parametry.

(c) Jedním ze symbolů pro ekologickou katastrofu velkých rozměrů je vysychání Aralského jezera. Dobře měřitelnou veličinou je rychlost ústupu pobřeží, ale pro ekosystém důležitějším parametrem je plocha jezera.

Uvažujme vysychající jezero kruhového tvaru o poloměru 200 kilometrů. Poloměr klesá rychlostí 2 kilometry za rok. Zapište tento pokles pomocí derivací a určete, jak rychle klesá rozloha vodní hladiny. Zdůvodněte znaménko a jednotku derivace rozlohy jezera podle času. Předpokládejte, že jezero má stále kruhovitý tvar. (Tento předpoklad nebyl například pro Aralské jezero splněn. Jezero se během vysychání rozdělilo na dvě samostatná jezera.)

(d) Napište vzorec pro centrální diferenci a nějakou typickou situaci, kdy centrální diferenci používáme.

2. [8 bodů $(2+3+3)$] Integrál.

(a) Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^1 x^2+1\,\mathrm{d}x$.

(b) Veličina $r(t)=10-e^{-t}$ udává rychlost s jakou roste teplota sledovaného objektu během pokusu. Vypočtěte, o kolik se objekt zahřeje během prvních dvou hodin. Čas t sledujeme v hodinách od počátku pokusu a rychlost je ve stupních Celsia za minutu.

(c) Stručně napište, co rozumíme lichoběžníkovým pravidlem pro integrál a kdy se toto pravidlo používá.

3. [8 bodů $(3+3+2)$] Lineární algebra.

(a) Napište, jak vypadá matice popisující rotaci v dvourozměrném prostoru. Napište, jak vypadá matice inverzní a jak je možno tyto matice využít k transformaci tenzorů do jiné soustavy souřadnic.

(b) Vypočtěte součin Au pro následující matici a vektor a rozhodněte, zda vektor je vlastním vektorem matice či nikoli.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}, \qquad u=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

(c) Napište příklad matice, která nemá žádný vlastní vektor a příklad matice, pro kterou je každý vektor vlastním vektorem. Pokud některý z příkladů není možné sestrojit, vysvětlete proč.

4. [8 bodů $(4+1+3)$] Diferenciální rovnice

(a) Důležitý enzym se současně jedním procesem syntetizuje a jiným procesem rozkládá. Rychlost syntézy je konstantní. Rychlost rozkladu je přímo úměrná množství enzymu. Napište matematický model pro tento proces.

(b) Definujte pojmy přímá úměrnost a nepřímá úměrnost.

(c) Přírodní výběr zpravidla dá přednost syntéze nekonstantní rychlostí. To proto, že pokud enzym chybí nebo je ho málo, je nutné jej rychle syntetizovat.

Modifikujte předchozí model tak, aby se rychlost syntézy řídila množstvím enzymu. Potřebujeme zajistit, aby při malých koncentracích enzymu probíhala syntéza rychle. Vyberte, jestli je vhodnější nahradit konstantní produkci produkcí přímo nebo nepřímo úměrnou množství enzymu. Volbu stručně vysvětlete a napište výslednou diferenciální rovnici.

5. [8 bodů $(3+3+2)$]

(a) Gradient (například teploty) najdeme na Wikipedii často vyjádřeny nepřesně pomocí podílu. Po probrání derivací víme, že přesnější je použití derivace. Je nějaká situace, kdy oba přístupy jsou rovnocenné? Existuje nějaká funkce $f(x)$, kde dělení proměnnou x dává stejný výsledek jako derivování? (*Návod*: Zamyslete se nad fyzikálním významem derivace a nad tím, za jakých okolností k výpočtu potřebné veličiny nepotřebujeme derivaci, ale stačí nám dělení.)

(b) Konstituční zákony (například Fickův) najdeme na Wikipedii vyjádřeny ve skalárním tvaru. Toto je však někdy nepoužitelné. Kdy je nutné použít k formulaci konstitučních zákonů matice a kdy použití matic naopak není nutné?

(c) Napište vzorec pro lineární aproximaci funkce a napište, za jakých podmínek se tento vzorec redukuje na přímou úměrnost.

6. [6 bodů $(4+2)$] Difuzní rovnice

(a) Napište difuzní rovnici v kartézských souřadnicích pro co nejjednodušší materiálové vlastnosti (homogenní a izotropní materiál s lineární materiálovou charakteristikou). Uvažujte dvě dimenze, přítomnost zdrojů a nestacionární děj.

(b) Mohou kromě zdrojů být v difuzní rovnici i spotřebiče? Pokud ano, vysvětlete, jak je do rovnice můžeme zahrnout nebo kde v rovnici figurují. Pokud ne, vysvětlete, jak modelujeme procesy, kde se transportovaná veličina spotřebovává.

- **Požadavek: písemka alespoň 13 bodů z 50 možných a součet bodů z písemky s bonusovými body alespoň 25.**