Písemná část zkoušky z Matematiky, 31.1.2023, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno:.................................

- **Zadání je na dvou stranách.**
- Do vzorců stačí dosadit, integrály a derivace vypočítat. Nemusíte dopočítávat numericky.

1. [12 bodů $(3+3+3+3)$] Derivace.

(a) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = \frac{1}{\pi}e^{3x^2} \quad \text{a} \quad y = (ax+2)^4,$$

kde $a > 0$ je parametr.

(b) Napište definici derivace funkce jedné proměnné (pomocí limity). Vysvětlete, pro jaké funkce bude vycházet derivace stejně, jako výraz, který dostaneme, pokud limitu vynecháme.

(c) Objekt ve tvaru koule roste a stále si zachovává tvar koule o poloměru r a objemu V. Obě veličiny r a V jsou funkcemi času a jsou spolu spojeny vztahem pro objem koule vypočtený pomocí poloměru. Napište slovně, co vyjadřuje derivace objemu podle poloměru a v jakých je možné ji vyjádřit jednotkách. Totéž zopakujte pro derivaci objemu podle času.

(d) Napište definici toho, co rozumíme pod pojmem rostoucí funkce a jak toto souvisí s derivací.

---

2. [4 body (4)] Lineární aproximace
Napište vzorec pro lineární aproximaci funkce

$$y = f(x)$$

v okolí bodu x_0. Vysvětlete slovní interpretaci jednotlivých sčítanců v tomto vzorci a popište stručně jedno konkrétní využití uvedené lineární aproximace.

---

3. [8 bodů $(2+3+3)$] Lineární algebra.

(a) Napište definici inverzní matice a napište, jak existence či neexistence inverzní matice souvisí s determinantem.

(b) Materiálové vlastnosti jsou popsány symetrickými maticemi. Ve sekutečnosti však často stačí zabývat se maticemi diagonálními. Vysvětlete jak se úloha se symetrickou maticí dá redukovat na úlohu s diagonální maticí.

(c) Najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

4. [9 bodů $(3+3+3)$] Integrál.

(a) Vypočtěte integrál

$$\int_0^3 1 - e^{-2x}\, \mathrm{d}x.$$

(b) Napište obecnou vzorec umožňující nalézt určitý integrál

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

pomocí neurčitého integrálu a použité označení vysvětlete. (Není nutné vyvětlovat pojmy v zadání, tj. není nutné vysvětlovat, ža a a b jsou dolní a horní mez a f je integrovaná funkce.)

(c) Napište vzorec z věty o integrálu jako funkci horní meze a vysvětlete, k čemu je tato věta použitelná. Podobně jako v předchozím bodě vysvětlete pojmy ze vzorce. (Není nutné vysvětlovat triviální pojmy zřejmé ze zadání.)

5. [12 bodů $(4+4+4)$] Diferenciální rovnice

(a) Množství radioaktivního jodu v okolí poškozeného reaktoru se mění vlivem radioaktivnímu rozpadu (vede ke snižování množství jodu) a vlivem neustálého přísunu dalšího radioaktivního materiálu z reaktoru (vede k navyšování množství jodu). Rozklad probíhá rychlostí úměrnou množství jodu, přísun nového radioaktivního jodu probíhá konstantní rychlostí. Napište diferenciální rovnici pro množství radioaktivního jodu v okolí reaktoru.

(b) Průlomová teorie (viděno optikou tehdejší doby) ostrovní biogeografie se zabývá modelováním rovnováhy počtu druhů na ostrově tím, jak se dostává do rovnováhy vymírání druhů usídelných na ostrově a kolonizace ostrova novými druhy.

- Rychlost usazování nových druhů (kolonizace ostrova) je nepřímo úměrná počtu druhů na ostrově.
- Rychlost vymírání druhů je přímo úměrná počtu druhů na ostrově.

Napište diferenciální rovnici pro počet druhů na ostrově.

(c) Teplota podchlazeného ježka v teplé místnosti roste současným působením dvou procesů. Jednak tepelnou výměnou s okolím a jednak vlastním metabolismem. První proces probíhá rychlostí úměrnou rozdílu teploty místnosti. Druhý proces probíhá konstantní rychlostí. Napište diferenciální rovnici modelující růst teploty ježka a její návrat k normálu.

6. [5 bodů (5)] Difuzní rovnice

Model studovaný v literatuře má tvar

$$0 = \sigma + D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Je toto možné považovat za speciální tvar difuzní rovnice?
Pokud ano, napište, pro jaký případ je tento model zapsán (stacionární/nestacionární děj, homogenní/nehomogenní materiál, lineární/nelineární materiálové vlastnosti, přítomnost/nepřítomnost zdrojů, izotropní/anizotropní materiál).
Pokud ne, napište co nejobecnější tvar difuzní rovnice.

- **Požadavek: písemka alespoň 15 bodů z 50 možných a součet bodů z písemky s bonusovými body alespoň 25.**

Matematika 31.1.2023

1a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\pi} e^{3x^2}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot 3 \cdot 2x\, e^{3x^2}$

$\frac{d}{dx}(ax+2)^4 = 4\cdot a\cdot (ax+2)^3$

b) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{df}{dx}$

Bez limity dostáváme průměrnou rychlost, s limitou okamžitou. Jsou stejné, pokud je okamžitá rychlost konstantní, tj. f má konstantní derivaci, tj. pro lineární funkce

c) $\frac{dV}{dr}$ je změna objemu vyvolaná jednotkovou změnou poloměru

$\frac{dV}{dt}$ -"- za jednotku času

$\left[\frac{dV}{dr}\right] = \frac{m^3}{m} = m^2$, $\left[\frac{dV}{dt}\right] = \frac{m^3}{h}$ (například)

d)
- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- rostoucí funkce zachovává uspořádání vzorů i pro obrazy
- rostoucí funkce zachovává nerovnost mezi vzory i pro obrazy

- ~~Newtonova metoda: místo kořene funkce hledáme kořen její lineární aproximace~~

- ~~Kritéri~~

Má-li f kladnou derivaci, je rostoucí.

2) $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$f(x_0)$ ... funkční hodnota v bodě x_0

$f'(x_0)(x-x_0)$ ... odhad změny funkce na intervalu (x, x_0) pomocí rychlosti změny v bodě x_0

Využití:

1) Newtonova metoda: Namísto hledání bodu funkce hledáme nulový bod její lineární aproximace a postupně opakováním postupu zpřesňujeme odhad řešení rovnice $f(x)=0$.

2) konstitutivní zákony na tedo berou tvar přímé úměrnosti; protože navíc platí $f(0)=0$.

3) ~~...~~ $(1+x)^n \approx 1+nx$ se dá využít k odvození vzorce $E = \frac{1}{2}mv^2$ z obecného a složitého relativistického vzorce pro kinetickou energii $E = m_0c^2 - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

---

3 a) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, A^{-1} existuje $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

b) ~~...~~ Pokud osy zvolíme ve vlastních směrech, je matice diagonální. Pro symetrické matice to jde vždy, protože vlastní směry jsou na sebe kolmé a můžeme je použít jako směry definující směr os.

c) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ (prvky v diagonále matice ve schodovitém tvaru.

$\lambda_1 = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

4a) $\int_0^3 1-e^{-2x}\,dx = \left[x+\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^3 = 3+\frac{1}{2}e^{-3\cdot 2}-\left(0+\frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{5}{2}+\frac{1}{2}e^{-6}$

b) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ kde $F'=f$ tj. F je primitivní funkcí k f

c) $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$ a $F(x)$ je primitivní funkcí k $f(x)$

používá se pro definici některých neelementárních funkcí

---

5 a) $\frac{dx}{dt} = -k_1 x + k_2$

b) $\frac{dx}{dt} = \frac{k_1}{x} - k_2 \cdot x$

c) $\frac{dT}{dt} = k_1(T_0 - T) + k_2$

---

6) Ano, jedná se o difuzní rovnici.

stacionární

se zdroji

lineární homogenní materiál

anizotropní