Písemná část zkoušky z Matematiky, 27.1.2023, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno:..................................

- **Zadání je na dvou stranách.**
- Do vzorců stačí dosadit, integrály a derivace vypočítat. Nemusíte dopočítávat numericky.

1. [12 bodů $(3+3+3+3)$] Derivace.

(a) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = \frac{6}{(x+1)^4} \quad \text{a} \quad y = x - ae^{2x},$$

kde $a > 0$ je parametr.

(b) Napište definici derivace funkce jedné proměnné (pomocí limity). Vysvětlete, jakou bude mít tato derivace jednotku. Vysvětlení napište obecně poté na konkrétním příkladě.

(c) Napište vzorec pro lineární aproximaci funkce

$$y = f(x)$$

v okolí bodu x_0. Může se stát, že se tato aproximace redukuje na přímou úměrnost? Pokud ano, napište, pro jaké funkce toto nastane. Pokuste se napsat co nejobecnější požadavky na funkci f.

(d) Derivaci je možné použít k citlivostní analýze. Předpokládejme, že u funkce

$$y = f(x)$$

se hodnota veličiny x změní z hodnoty x_0 o hodnotu Δx. Jak je možné pomocí derivace odhadnou změnu funkční hodnoty funkce f? A pro jaké funkce je tento odhad s nulovou chybou?

2. [4 body (4)] Diferenciální rovnice

Vysvětlete, jak je možné najít stacionární řešení (stacionární body) diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x).$$

Vysvětlete dále, jak pomocí funkce $f(x)$ rozhodneme, zda je stacionární bod stabilní či nestabilní.

3. [8 bodů $(3+2+3)$] Lineární algebra.

(a) Napište matici rotace o úhel θ proti směru hodinových ručiček a napište matici k ní inverzní.

(b) Využijte výsledku předchozího příkladu k nalezení obrazu vektoru

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

při otočení o úhel θ proti směru hodinových ručiček.

(c) Najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. [9 bodů $(3+3+3)$] Integrál.

(a) Vypočtěte integrál

$$\int e^{2x} + ax \,\mathrm{d}x,$$

kde $a > 0$ je reálný parametr.

(b) Napište definici střední hodnoty funkce

$$y = f(x)$$

na intervalu $[a,b]$. Specifikujte dále, jak se obecný vzorec redukuje při určení střední hodnoty lineární funkce.

(c) Napište, jakou mají jednotku integrál

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

a střední hodnota funkce $f(x)$ na intervalu $[a,b]$.

5. [12 bodů $(4+4+4)$] Diferenciální rovnice

(a) Nejčastějším modelem pro růst živočišných a rostlinných populací v ekologii je logistická rovnice. Napište tuto rovnici a vyjádřete ji slovně. (Stručně, ale výstižně a úplně.)

(b) U spojitě úročeného účtu roste množství financí rychlostí úměrnou tomuto množství. Napište matematický model pro růst rychlostí úměrnou velikosti. Poté tento model modifikujte tak, že na účet ukládáte pravidelnou konstantní úložku, tj. rychlost růstu se zvýší o aditivní konstantu.

(c) Tloušťka ledu na moři v konstantních podmínkách roste rychlostí nepřímo úměrnou této tloušťce. Napište diferenciální rovnici modelující tento růst. Napište dále, zda podle této rovnice roste tlustý led rychleji než tenký. (Odpověď zdůvodněte. Zdůvodnění musí vycházet ze slovního zadání nebo z rovnice. Nevzpomínejte, jak zamrzá obecní rybník.)

6. [5 bodů (5)] Difuzní rovnice

Model studovaný v literatuře má tvar

$$0 = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Je toto možné považovat za speciální tvar difuzní rovnice?
Pokud ano, napište, pro jaký případ je tento model zapsán (stacionární/nestacionární děj, homogenní/nehomogenní materiál, lineární/nelineární materiálové vlastnosti, přítomnost/nepřítomnost zdrojů, izotropní/anizotropní materiál).
Pokud ne, napište co nejobecnější tvar difuzní rovnice.

- **Požadavek: písemka alespoň 15 bodů z 50 možných a součet bodů z písemky s bonusovými body alespoň 25.**

Matematika 27.1.2023

1a)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{6}{(x+1)^4}\right) = 6.(-4)(x+1)^{-5}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x - a.e^{2x}\right) = 1 - 2ae^{2x}$$

b) $\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Jednotka $\frac{df}{dx}$ je ~~d~~ podíl jednotky f a jednotky x.

Např. derivace teploty podle času může mít jednotku °C/hod.

c) $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Je-li $f(0) = 0$, potom $f(x) \approx f'(0).x$ ... přímá úměrnost.

d) $\Delta f \approx f'(x_0).\Delta x$

přesně platí pro lineární funkce

---

2) Stac. body jsou řešení rovnice $f(x) = 0$

pokud f ve stacionárním bodě klesá, je stacionární bod stabilní. Pokud roste, je nestabilní.

---

3) a) $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad [R(\theta)]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

b) $R(\theta)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta - 2\sin\theta \\ \sin\theta + 2.\cos\theta \end{pmatrix}$

c) $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 3$

$\lambda_1 = 2$: $\begin{pmatrix} 2-2 & 0 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

např. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u}_1$

$\lambda_2 = 3$ $\begin{pmatrix} 2-3 & 0 \\ 1 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u}_2$

4a) $\int e^{2x} + ax \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + a \frac{x^2}{2} + c$

b) $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$

Pro lineární funkci se redukuje na aritmetický průměr hodnot $f(a)$ a $f(b)$.

c) Jednotka $\int f(x) \, dx$ je součinem jednotek veličiny f a veličiny x.

Střední hodnota má stejnou jednotku jako funkce f.

5a) $\frac{dx}{dt} = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ Rychlost růstu je úměrná velikosti populace a volnému procentu životního prostředí.

b) $\frac{dx}{dt} = k \cdot x$, $\frac{dx}{dt} = kx + l$

c) $\frac{dh}{dt} = \frac{k}{h}$ větší $h \Rightarrow$ menší $\frac{1}{h} \Rightarrow$ menší $\frac{dh}{dt}$

Tlustší led roste pomaleji.

---

6) Ano, je to stacionární

bezzdrojové

izotropní

pro homogenní a lineární materiál.