

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

Jméno:

• **Zadání je na dvou stranách.**

- Do vzorců stačí dosadit, integrály a derivace vypočítat. Nemusíte dopočítávat numericky.

1. [12 bodů (3 + 3 + 3 + 3)] Derivace.

(a) Vypočtete derivaci funkcí

$$y = 5x^a \quad \text{a} \quad y = 2 + e^{4x},$$

kde $a > 0$ je parametr.

- (b) Napište definici derivace funkce jedné proměnné (pomocí limity) a vysvětlete roli limity v této definici. Vysvětlete tedy, jak by se lišil význam derivace od významu výrazu, který bychom dostali vynecháním limity v definici derivace.
- (c) K řešení jakých úloh se používá Newtonova metoda (též Newtonova-Raphsonova)? Napište dále, jaký se pro aplikaci této metody používá vzorec, co je na vstupu tohoto vzorce, co je na výstupu a proč se vzorec zpravidla musí používat opakovaně.
- (d) Předchozí metoda je založena na lineární aproximaci. Napište vzorec pro lineární aproximaci a naznačte, jak se z něj odvodí vzorec pro Newtonovu metodu z předchozího kroku.

2. [8 bodů (2 + 3 + 3)] Lineární algebra.

(a) Soustavu rovnic

$$2x_1 - 3x_2 = 5$$

$$5x_1 + 2x_2 = 0$$

je možné zapsat kompaktněji jedním maticovým součinem. Zapište tento maticový součin.

- (b) Napište definici vlastních čísel a vektorů. Vysvětlete význam nebo specifickou vlastnost vlastních směrů z hlediska využití (například v geometrii nebo v materiálovém inženýrství).
- (c) Vysvětlete stručně, jak je pomocí determinantu možné zajistit, aby soustava lineárních rovnic s nulovou pravou stranou měla nekonečně mnoho řešení. Vysvětlete dále, jak je toto možné využít k nalezení vlastních čísel.

3. [9 bodů (3 + 3 + 3)] Integrál.

(a) Vypočtete integrál $\int_0^2 e^{-x} + 1 \, dx$.

(b) V předchozím příkladě jste (pravděpodobně) vypočítali určitý integrál pomocí neurčitého. Někdy to však není možné, protože někdy neurčitý integrál není možné vyjádřit pomocí elementárních funkcí. V takovém případě můžeme použít naopak určitý integrál a pomocí něj vypočítat integrál neurčitý. Napište, **(A)** jak je možné vypočítat neurčitý integrál pomocí určitého a jak **(B)** je možné vypočítat určitý integrál jinak, než s využitím neurčitého integrálu. Stačí vzorec pro **(A)** a název metody pro **(B)**, pokud neznáte název, tak ukázka nebo hlavní myšlenka.

(c) V čem se liší určitý a neurčitý integrál? Pokud je například rychlost růstu preferencí prezidentského kandidáta vyjádřena funkcí $r(t)$ v počtech voličů za den, co budou vyjadřovat integrály $\int r(t) \, dt$ a $\int_0^7 r(t) \, dt$?

4. [4 body (4)] Inverzní matice.

Ukažte, jak je možné **(A)** inverzní matici použít k řešení soustavy lineárních rovnic a **(B)** jak je možné inverzní matici použít k transformaci zobrazení do jiné souřadné soustavy.

Stačí vzorce označené písmeny **(A)** a **(B)**, aby bylo jasné, co k čemu patří.

5. [12 bodů (4 + 4 + 4)] Diferenciální rovnice

- (a) V místnosti se z květin odpařuje voda konstantní rychlostí do vzduchu. Větráním se daří množství vody ve vzduchu v místnosti snižovat rychlostí úměrnou tomuto množství. Napište diferenciální rovnici pro množství vody ve vzduchu v místnosti.
- (b) Teplota studené autobaterie přenesené do teplé garáže roste rychlostí úměrnou rozdílu teploty baterie a garáže. Napište diferenciální rovnici pro tuto teplotu.
- (c) Listí v lese padá na zem konstantní rychlostí. Tlením se na zemi rozkládá rychlostí úměrnou množství listí na zemi. Napište diferenciální rovnici pro množství listí na zemi.

U každé rovnice určete, zda je stacionární řešení stabilní. Tam, kde je stacionárních řešení více, určete stabilitu nejmenšího kladného stacionárního řešení.

6. [5 bodů (5)] Difuzní rovnice

Model studovaný v literatuře má tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Pro jaký materiál a děj tato rovnice funguje? (stacionární/nestacionární děj, homogenní/nehogenní materiál, lineární/nelineární materiálové vlastnosti, přítomnost/nepřítomnost zdrojů, izotropní/anizotropní materiál)

$$1a) \frac{d}{dx} (\sqrt{x^a}) = \sqrt{a} \cdot x^{a-1}$$

$$\frac{d}{dx} (2 + e^{4x}) = 4 \cdot e^{4x}$$

$$b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df}{dx} = f'(x)$$

relativně: rychlost okamžitá, resp. směrnice tečny

bez limity: rychlost průměrná na $[x, x+h]$, směrnice seciny

c) Řešen: rovnice $f(x) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

vstup: funkce a počáteční odhad řešení rovnice

výstup: zpřesněný řešení

Používá se opakovaně, protože každé použití zpřesní
přibližnou aproximaci. Opakujeme do dosažení požadované
přesnosti.

$$d) f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Downarrow \text{pro } f(x_1) = 0$$

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$2a) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $A \vec{u} = \lambda \vec{u}$ tj. \vec{u} a $A \vec{u}$ mají stejný směr,
 mají stejnou teplotu a tož tepla nebo obecně vektor a
 obrát při zobrazení maticí A

c) $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ má nekonečně mnoho řešení pokud $|A| = 0$.

Pro vlastní číslo: $A \vec{u} = \lambda \vec{u}$

$$A \vec{u} - \lambda \vec{u} = 0$$

$(A - \lambda I) \vec{u} = 0$... má nulové řešení pokud

$$|A - \lambda I| = 0$$

Vlastní číslo jsou nulové body rovnice ...

$$3) a) \int_0^2 e^{-x} + 1 dx = \left[-e^{-x} + x \right]_0^2 = -e^{-2} + 2 - (-e^0 + 0) = 3 - e^{-2}$$

b)

(A) $\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt$ -- integrál jako funkce má

(B) Lichoběžníkové pravidlo

c) $\int_0^7 r(t) dt$... Náhrost počtu voličů za prvních 7 dní

$\int r(t) dt$... Funkce, která má neaditivní konstantní odbohu
 počet voličů jako funkce. ~~je~~ tam ne dvoch.

4) (A) $X = A^{-1} \cdot B$ je řešení soustavy $AX = B$

(B) $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$ P... maticie přechodu

5a)

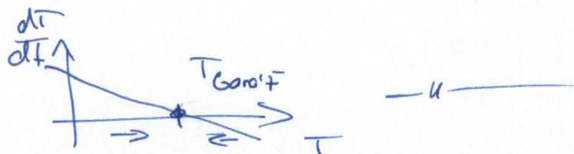
$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 x$$



jedlin stabilni
stati. bod

b)

$$\frac{dT}{dt} = k (T_{\text{Govr}} - T)$$



c) stopni pade a)

e)

Nestacionarni

homogeni

linearni (mat. nestnost)

Na prou zdruje

Anizotropni material