Písemná část zkoušky z Matematiky, 17.1.2023, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno:................................

- **Zadání je na dvou stranách.**
- Do vzorců stačí dosadit, integrály a derivace vypočítat. Nemusíte dopočítávat numericky.

1. [12 bodů $(3+3+3+3)$] Derivace.

(a) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = (x^2+2)^6 \quad \text{a} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ax},$$

kde $a > 0$ je parametr.

(b) Napište definici derivace funkce jedné proměnné (pomocí limity) a parciální derivace funkce dvou proměnných.

(c) V čem se liší definice derivace od dopředné diference funkce? Napište, kde je formální rozdíl ve vzorci a jaký je rozdíl v praktické (fyzikální) intepretaci obou pojmů, derivace a dopředná diference.

(d) Slavný článek “Random Dispersal in Theoretical Populations” autora J. Skellama popsal šíření ondatry Evropou. Pokud aproximujeme rozsah rozšíření kruhem o poloměru r, poloměr dlouhodobě rostl konstantní rychlostí 15 kilometrů za rok. Určete, jakou rychlostí se rozrůstala plocha zasažená ondatrou v okamžiku, kdy ondatra dosáhla Vídně, tj. v okamžiku, kdy poloměr kruhu rozšíření byl 230 kilometrů. Nemusíte dopočítávat numericky, ale napište i fyzikální jednotku výsledku.

---

2. [8 bodů $(3+2+3)$] Lineární algebra.

(a) Popište stručně jedno využití inverzní matice.

(b) Symetrické matice mají jedno specifikum z hlediska vlastních čísel a směrů. Napište, jaký očekáváme výsledek při určování vastních směrů matice.

(c) Podpořte předchozí trvzení příkladem. Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

---

3. [9 bodů $(3+3+3)$] Integrál.

(a) Vypočtěte integrál $\int_0^2 x^3 + 2x \, \mathrm{d}x$.

(b) Po zapnutí elektronického obvodu teplota sledované součástky roste tak, že rychlost růstu teploty v čase t je ve stupních Celsia za minutu dána funkcí

$$10e^{-0.1t},$$

kde t je čas v minutách. Určete, o kolik se součástka zahřeje za 30 minut od zapnutí obvodu.

(c) Pokud nemáme pro výpočet integrálu k dispozici analytický předpis funkce, není možné integrovat “pomocí vzorců”, ale je potřeba použít něco jiného. Jak se dají integrovat funkce, dané funkčními hodnotami ve vybraných bodech? Napište název metody a vzorec s vysvětlením použitého označení. (Vysvětlení je možné buď slovně nebo výstižným obrázkem.)

---

4. [4 body (4)] Proč se v konstitučních zákonech (Fickův, Fourierův apod.) někdy musí použít matice a někdy nikoliv? Kdy matice nepotřebujeme a stačí nám skalární veličiny? Kdy naopak matice musíme použít?

5. [12 bodů $(4+4+4)$] Diferenciální rovnice

(a) Při modelování populace logistickou rovnicí předpokládáme, že velikost populace roste rychlostí úměrnou současně velikosti populace a současně volnému místu v prostředí s omezenou nosnou kapacitou. Napište diferenciální rovnici modelující tento růst.

(b) Do modelu z předchozího příkladu přidejte lov konstantní intenzity. Napište výslednou diferenciální rovnici a napište, zda dojde nutně k vylovení a vymření populace, či nikoliv. Pokud nikoliv, na čem bude přežití populace záviset a jak poznáme maximální udržitelnou hodnotu lovu?

(c) Do sklepa starého domu proniká rozpraskanými základy radon konstantní rychlostí. Větráním se daří množství radonu snižovat rychlostí úměrnou množství tohoto radonu. Napište diferenciální rovnici pro množství radonu ve sklepě.

6. [5 bodů (5)] Difuzní rovnice

Skellam v článku zmíněném v prvním příkladě ve skutečnosti použil k modelování šíření ondatry v čase a prostoru difuzní rovnici. V dnešní moderní terminologii použil předpoklady, že prostředí je homogenní a izotropní, že rychlost šíření je úměrná gradientu hustoty, kde sledovanou veličinou byla plošná hustota ondatry.
Napište difuzní rovnici vyhovující těmto předpokladům (tj. dvourozměrný izotropní, homogenní a lineární materiál). Ondatry se množí a sledujeme vývoj v čase. Rozhodněte podle tohoto, zda nás zajímá stacionární či nestacionární rovnice a zda se zdroji či bez zdrojů a zohledněte tyto fakta v odpovědi.

- **Požadavek: písemka alespoň 15 bodů z 50 možných a součet bodů z písemky s bonusovými body alespoň 25.**

Matematika 17. 1. 2023

1a) $\frac{d}{dx}\left((x^2+2)^6\right) = 6(x^2+2)^5 \cdot 2x$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{ax}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, a\, e^{ax}$

b) $\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$

c) Dopředná diference: neobsahuje limitu, jinak stejná jako derivace.
Dopředná diference je průměrná rychlost, derivace okamžitá rychlost.

d) $S = \pi r^2$, $\frac{dS}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$

$r = 230$, $\frac{dr}{dt} = 15$, $\frac{dS}{dt} = 2\cdot\pi\cdot 230\cdot 15$ km²/rok

---

2a) Řešení soustavy rovnic $Ax = B$ je $X = A^{-1}\cdot B$.

(případně transformace tenzoru do jiných souřadnic vztahem $P^{-1}\cdot A\cdot P$)

b) Vlastní směry příslušné různým vlastním hodnotám jsou kolmé.

c) $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 = (\lambda-3)(\lambda-1)$

$\lambda_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

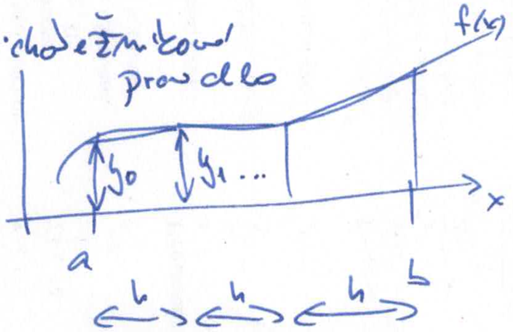
$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = 0 \implies \vec{e}_1$ a $\vec{e}_2$ jsou kolmé

3 a) $\int_0^2 x^3 + 2x \, dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^2 \right]_0^2 = \frac{2^4}{4} + 2^2 - 0 = 4 + 4 = 8$

b) $\int_0^{30} 10 e^{-0,1 t} \, dt = \left[-\frac{10}{0,1} e^{-0,1 t} \right]_0^{30} =$

$= \left[-100 . e^{-0,1 . t} \right]_0^{30} = -100 . e^{-3} + 100 . e^{0} = 100 \left(1 - e^{-3} \right)$

c) lichoběžníkové pravidlo



$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left(y_0 + 2 y_1 + \dots + 2 y_{n-1} + y_n \right)$

4) Pro izotropní materiál je tok stejným směrem jako (záporně vzatý) gradient a stačí skalární konstanta úměrnost. Pro anizotropní materiál je nutné zobecnění, které dokáže zohlednit také, že tok a gradient nemusí mířit stejným směrem (resp. opačným). Proto je potřeba použít matici.

I) a) $\frac{dx}{dt} = r x \left(1 - \frac{x}{K} \right)$

b) $\frac{dx}{dt} = r x \left(1 - \frac{x}{K} \right) - h$, je-li h malé (menší než maximum funkce $r x (1 - x/K)$), populace přežije.

c) $\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 x$

6)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

použijeme nestacionární rovnici (modelujeme časový vývoj) a rovnici se zdroji (ondatry se rozmnožují).