PÍSEMNÁ ČÁST ZKOUŠKY Z MATEMATIKY, 13.1.2023, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno:...............................

- **Zadání je na dvou stranách.**
- Do vzorců stačí dosadit, integrály a derivace vypočítat. Nemusíte dopočítávat numericky.

1. [12 bodů $(3+3+3+3)$] Derivace.

(a) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = x^7 + ax^3 \quad \text{a} \quad y = (x^3+b)^6,$$

kde $a, b > 0$ jsou parametry.

(b) Napište definici derivace funkce jedné proměnné (pomocí limity). Vysvětlete jestli a jak souvisí derivace s monotonií a jestli a jak souvisí derivace se spojitostí.

(c) Jak je možné určit derivaci funkce, která není dána předpisem ale pouze funkčními hodnotami? Napište alespoň dvě možnosti a rozhodněte, která možnost je nejlepší, pokud kritériem je dosažení co největší přesnosti.

(d) Newtonova metoda je založena na lineární aproximaci funkce

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Napište stručně, k čemu se tato metoda používá a jak se z výše uvedené lineární aproximace odvodí iterační vzorec pro tuto metodu.

---

2. [9 bodů $(3+3+3)$] Integrál.

(a) Vypočtěte integrál $\displaystyle\int 5 - 2e^{3x}\,\mathrm{d}x$.

(b) Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x) = x^2 + 2x$ na intervalu $[0, 2]$.

(c) Napište, jak je možné určit určitý integrál pomocí neurčitého a jak je naopak možné určit neurčitý integrál pomocí určitého. Pokud jedna z variant není možná, označte tu, která se nedá realizovat.

---

3. [8 bodů $(2+3+3)$] Lineární algebra.

(a) Vysvětlete, jak souvisí maticový součin s lineární kombinací vektorů.

(b) Násobení diagonální maticí má svá specifika, protože se narozdíl od násobení obecných matic redukuje na poměrně jednoduchý proces. Vysvětlete, jak vypadají součiny AD, DB a inverzní matice D^{-1}, pokud je D diagonální matice a matice A a B jsou takové, aby součiny existovaly.

(c) Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

4. [10 bodů $(4+4+2)$] Diferenciální rovnice

(a) Velikost populace roste rychlostí úměrnou velikosti populace. Kromě toho je velikost populace redukována lovem, který probíhá konstantní rychlostí. Sestavte diferenciální rovnici pro velikost populace a určete počet a stabilitu stacionárních bodů.

(b) Do nádrže přitéká voda konstantní rychlostí a odtéká rychlostí úměrnou objemu vody v nádrži. Sestavte diferenciální rovnici pro objem vody, určete počet a stabilitu stacionárních bodů.

(c) U každé z rovnic určete, jestli řešení dané nulovou počáteční podmínkou roste, klesá, nebo jestli se jedná o stacionární bod.

5. [6 bodů $(2+4)$]

(a) Jak souvisí rychlost růstu hrany krychle s rychlostí růstu objemu krychle? Odvoďte příslušný vzorec.

Pozn: Objem V krychle o hraně délky a je $V = a^3$. (Krychle je těleso, které je stavebním kamenem v Minecraftu, slovensky *kocka*, anglicky *cube*.)

(b) Pro velké soustavy lineárních rovnic je Gaussova eliminační metoda nevýhodná, ale je možné použít k řešení iterační metodu. Objasněte hlavní myšlenku této metody a napište vzorec nebo ukažte použití.

6. [5 bodů (5)] Difuzní rovnice

Napište difuzní rovnici v kartézských souřadnicích pro co nejobecnější materiálové vlastnosti (nehomogenní a anizotropní materiál s obecně nelineární materiálovou charakteristikou). Uvažujte dvě dimenze a nepřítomnost zdrojů. Mezi stacionárností a nestacionárností se rozhodněte tak, aby model byl matematicky jednodušší. (Napište tedy příslušný tvar difuzní rovnice a napište, jestli jste se rozhodli pro stacionární případ, nebo pro nestacionární případ.)

- **Požadavek: písemka alespoň 15 bodů z 50 možných a součet bodů z písemky s bonusovými body alespoň 25.**

1a) $$\frac{d}{dx}\left(x^7 + ax^3\right) = 7x^6 + 3ax^2$$

$$\frac{d}{dx}\left((x^3+b)^6\right) = 6\,(x^3+b)^5 \cdot 3x^2$$

b) $$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\frac{df}{dx} > 0 \Rightarrow f$ roste

$\frac{df}{dx} < 0 \Rightarrow f$ klesá

$\frac{df}{dx}$ existuje $\Rightarrow f$ spojitá

c) $\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ ... centrální diference

$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ... dopředná diference

centrální diference je přesnější

d) Newtonova metoda se používá k řešení rovnic ve tvaru $f(x) = 0$ postupným zpřesňováním počátečního odhadu.

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$x = x_1$, $f(x_1) = 0$ $\Rightarrow$ $0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2)

a) $\int 5 - 2e^{3x} = 5x - \frac{2}{3}e^{3x} + c$

b) $\frac{1}{2}\int_0^2 x^2 + 2x \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{8}{3} + 2^2 - 0\right]$

$= \frac{10}{3}$

c)

- $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, kde $F(x) = \int f(x)\,dx$ tj. $F'(x) = f(x)$

- $\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt$ ... integrál jako funkce horní meze

---

3)
a) $C = A \cdot B$ ... sloupce matice C jsou lineární kombinací sloupců matice A s koeficienty lineární kombinace ze sloupců matice B

Př: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

Druhý sloupec ~~...~~ výsledné matice je $3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot D$ .... výsledkem je matice, jejíž sloupce jsou násobky sloupců matice A

i-tý sloupec součinu je d_{ii} - násobkem i-tého sloupce matice A

Př: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 300 \\ 10 & 700 \end{pmatrix}$

D.A ... analogicky jako A.D, ale pro řádky

Př: $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 100 & 700 \end{pmatrix}$

D^{-1} ... v diagonále jsou převrácené hodnoty prvků matice D.

Př: $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}01 \end{pmatrix}$

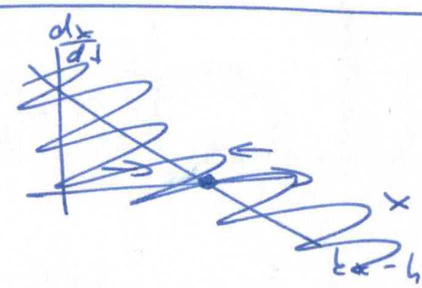
c) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 =$

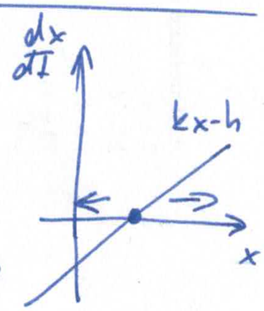
$= (\lambda - 3)(\lambda + 1) \Rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$

λ_1: $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

λ_2: $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

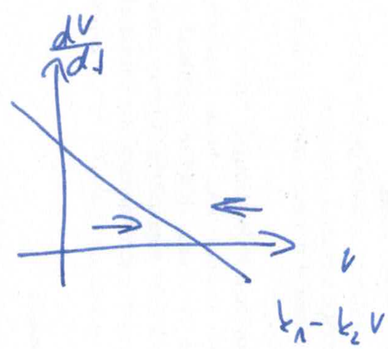
4a) $\frac{dx}{dt} = kx - h$





jeden stac. bod nestabilní

b) $\frac{dV}{dt} = k_1 - k_2 V$



jeden stac. bod stabilní

c) $\frac{dx}{dt} = kx - h$ $\quad x(0) = 0 \Rightarrow x$ klesá, $k \cdot 0 - h < 0$

$\frac{dV}{dt} = k_1 - k_2 V$ $\quad V(0) = 0 \Rightarrow V$ roste, $k_1 - k_2 \cdot 0 = k_1 > 0$

5 a)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{dt} = 3a^2 \frac{da}{dt}$$

b) $AX = B$

A se rozdělí na součet diagonální matice a zbytku

$A = D + T$

$$(D+T)X = B$$
$$DX + TX = B$$
$$DX = B - TX$$
$$X = D^{-1}(B - TX)$$
$$X_{k+1} = D^{-1}(B - TX)$$

využívá se toho, že D^{-1} je pro diagonální matice snadné určit

---

6) Podmínkou je stacionární rovnice

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

---

ad 5b) Jinou možností je Gaussova-Seidelova iterační metoda.