Písemná část zkoušky z Matematiky, 10.1.2023, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno: . . . .

- **Zadání je na dvou stranách.**
- Do vzorců stačí dosadit (integrály a derivace vypočítat), nemusíte dopočítávat numericky na kalkulačce.

1. [12 bodů $(3 + 3 + 3 + 3)$] Derivace.

(a) Napište definici derivace funkce jedné proměnné (pomocí limity) a vysvětlete rozdíl ve fyzikální interpretaci derivace jako celku a ve fyzikální interpretaci zlomku, který je v definici derivace za limitou.

(b) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = e^{ax} \quad \text{a} \quad y = \frac{b}{(x+1)^3},$$

kde $a, b > 0$ jsou parametry.

(c) Sledujeme vybraný krápník v jeskyni. Veličina h udává délku krápníku v jeskyni, veličina V jeho objem. Jakou slovní interpretaci a jakou jednotku má derivace délky podle času?

(d) Pro funkci danou následující tabulkou určete (pomocí konečných diferencí) derivaci v bodě $x = 4$.

x	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	-1	5	7	8	12	15	19

2. [9 bodů $(3 + 3 + 3)$] Integrál.

(a) Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4}e^x - 4x \,\mathrm{d}x$.

(b) Veličina $r(t) = 10 - \sqrt{t}$ udává rychlost s jakou vytéká olej z děravé nádrže (v litrech za hodinu). Vypočtěte, kolik oleje vyteče za první čtyři hodiny.

(c) Stručně napište, co rozumíme integrálem jako funkcí horní meze a k čemu se tento integrál používá.

3. [8 bodů $(3 + 2 + 3)$] Lineární algebra.

(a) Napište definici inverzní matice a ukažte, jak je možno tuto matici využít k řešení soustavy lineárních rovnic.

(b) Vypočtěte součin Au pro následující matici a vektor.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) V materiálovém inženýrství se při řešení úlohy snažíme kvůli jednoduchému popisu dosáhnout toho, aby matice popisující materiálové vlastnosti byla diagonální. Jak se tohoto dá dosáhnout? A pro jaké materiály toto zjednodušení vychází automaticky?

4. [10 bodů $(4 + 2 + 4)$] Diferenciální rovnice

(a) Důležitý enzym se současně jedním procesem syntetizuje a jiným procesem rozkládá. Rychlost syntézy je konstantní. Rychlost rozkladu je přímo úměrná množství enzymu. Napište matematický model pro tento proces.

(b) Definujte pojmy přímá úměrnost a nepřímá úměrnost.

(c) Přírodní výběr zpravidla dá přednost syntéze nekonstantní rychlostí. To proto, že pokud enzym chybí nebo je ho málo, je nutné jej rychle syntetizovat. Modifikujte předchozí model tak, aby se rychlost syntézy řídila množstvím enzymu. Potřebujeme zajistit, aby při malých koncentracích enzymu probíhala syntéza rychle. Vyberte, jestli je vhodnější nahradit konstantní produkci produkcí přímo nebo nepřímo úměrnou množství enzymu. Volbu stručně vysvětlete a napište výslednou diferenciální rovnici.

5. [5 bodů $(2+2+1)$]

(a) Jak vypočteme determinant čtvercové matice 2×2 a jak souvisí tento determinant s inverzní maticí?

(b) Obsah S kruhu je možné vypočítat pomocí poloměru r vzorcem

$$S = \pi r^2.$$

Kruh se zvětšuje. Napište, jaká veličina vyjadřuje rychlost růstu poloměru, jaká veličina vyjadřuje rychlost růstu obsahu a odvoďte vztah mezi oběma rychlostmi.

(c) V předchozí úloze bychom potřebovali zajistit, aby obsah kruhu rostl konstantní rychlostí. Musí růst poloměr také konstantní rychlostí, nebo rychlostí přímo úměrnou či nepřímo úměrnou poloměru? Či jinak? Odpověď zdůvodněte.

6. [6 bodů $(4+2)$] Difuzní rovnice

(a) Napište difuzní rovnici v kartézských souřadnicích pro co nejjednodušší materiálové vlastnosti (homogenní a izotropní materiál s lineární materiálovou charakteristikou). Uvažujte dvě dimenze, přítomnost zdrojů a nestacionární děj.

(b) Mohou kromě zdrojů být v difuzní rovnici i spotřebiče? Pokud ano, vysvětlete, jak je do rovnice můžeme zahrnout nebo kde v rovnici figurují. Pokud ne, vysvětlete, jak modelujeme procesy, kde se transportovaná velična spotřebovává.

- **Požadavek: písemka alespoň 15 bodů z 50 možných a součet bodů z písemky s bonusovými body alespoň 25.**

1\. (a) $\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\frac{df}{dx}$ ... okamžitá rychlost v bodě x

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ... průměrná rychlost na intervalu $[x, x+h]$

(b) $\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right) = a e^{ax}$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{b}{(x+1)^3}\right) = \frac{d}{dx}\left(b(x+1)^{-3}\right) = b.(-3)(x+1)^{-4}$

(c) $\frac{dh}{dt}$ je rychlost s jakou roste délka krápníku v jednotkách kapr. mm/rok

(d) $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=4} = \frac{f(6) - f(2)}{6-2} = \frac{8-5}{4} = \frac{3}{4}$

2\) (a) $\int_0^1 \frac{1}{4}e^x - 4x \, dx = \left[\frac{1}{4}e^x - 4\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}e - 2 - \left(\frac{1}{4}e^0 - 0\right) =$

$= \frac{1}{4}e - 2 - \frac{1}{4}$

(b) $\int_0^4 10 - \sqrt{t} \, dt = \left[10t - \frac{2t^{3/2}}{3}\right]_0^4 = 40 - \frac{2}{3}.8 - 0 = \cancel{24}$

(c) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$.

Například je takto možné definovat funkce, které nejsou elementárními funkcemi.

3 (a) $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$

$$AX = B \implies X = A^{-1} \cdot B$$

(b) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(c) Stačí zvolit souřadnou osy ve vlastních směrech. Automaticky to je splněno pro izotropní materiály (každý směr je vlastní).

---

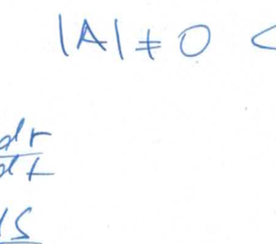
4 (a) x… množství enzymu

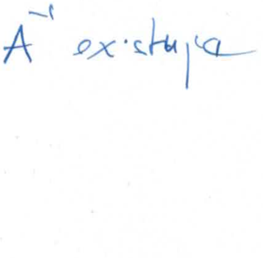
$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 \cdot x$$

(b) přímá úměrnost … závislost tvaru $y = k \cdot x$, $k \in \mathbb{R}$
nepřímá úměrnost … závislost tvaru $y = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}$

(c) $$\frac{dx}{dt} = \frac{k_1}{x} - k_2 \cdot x$$

$\uparrow$
použijeme nepřímou úměrnost, pro malé x je numericky velké





---

5 (a) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$; $|A| \neq 0 \iff A^{-1}$ existuje

(b) rychlost růstu poloměru : $\frac{dr}{dt}$
rychlost růstu obsahu : $\frac{dS}{dt}$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

(c) $$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dS}{dt}}{2\pi r} = \frac{konst}{r}$$ … $\frac{dS}{dt}$ je konstantní pokud r roste rychlostí nepřímo úměrnou poloměru

6(a) $$\frac{\partial u}{\partial t} = f + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

(b) Ano, spotřebiče jsou započteny jako zdroje se zápornou vydatností.