Písemná část zkoušky z Matematiky, 3.1.2023, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno:................................

- **Zadání je na dvou stranách.**
- Do vzorců stačí dosadit (integrály a derivace vypočítat), nemusíte dopočítávat numericky na kalkulačce.

1. [15 bodů $(3+3+3+3+3)$] Derivace.

(a) Napište definici derivace a vysvětlete, jakou roli v této definici hraje pojem limita. Proč tam limitu potřebujeme?

(b) Hmotnost m ryby v gramech je dána její délkou l v centimetrech vztahem

$$m = cl^3,$$

kde c je parametr, konstanta závislá na druhu ryby. Vypočtěte derivaci hmotnosti podle délky.

(c) Určete pro rybu z předchozího textu, v jakých jednotkách vychází derivace hmotnosti podle délky.

(d) Předpokládejte, že ryba z předchozího textu má délku 70 centimetrů a roste v čase rychlostí dva centimetry za měsíc. Určete, jakou rychlostí roste její hmotnost.

(e) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y = \frac{a}{(x+6)^2} \quad \text{a} \quad y = 1 + 2e^{ax},$$

kde $a > 0$ je parametr.

(Některé odpovědi budou obsahovat parametry c resp. a.)

---

2. [9 bodů $(3+2+2+2)$] Integrál.

(a) Vypočtěte integrál $\int e^{-x} + 3x \, \mathrm{d}x$.

(b) Z otvoru navrtaného do javoru cukrového vytéká míza a vytéká stále pomaleji. Předpokládejme, že vytéká rychlostí $r(t) = e^{-t}$, kde t je čas v hodinách a rychlost je v dekagramech za hodinu. Určete (včetně jednotky), kolik mízy vyteče za první čtyři hodiny po navrtání stromu.

(c) V předchozím příkladě vypočtěte střední hodnotu rychlosti vytékání za první čtyři hodiny

(d) V předchozím příkladě vypočtěte funkci, udávající množství vytečené mízy jako funkce času.

---

3. [5 bodů $(2+1+1+1)$] Lineární aproximace funkce

(i) Napište vzorec pro lineární aproximaci funkce $y = f(x)$ v okolí bodu x_0.

(ii) Může se stát, že lineární aproximací je vodorovná přímka, tj. že výsledná aproximace nezávisí na x?

(iii) Může se stát, že lineární aproximací je přímá úměrnost, tj. funkce ve tvaru $y = kx$?

(iv) Může se stát, že lineární aproximací je klesající exponenciální funkce, tj. funkce tvaru $y = e^{-x}$?

Odpovědi podpořte konkrétním příkladem nebo odpověď stručně zdůvodněte.

4. [7 bodů $(3+4)$] Diferenciální rovnice

(a) Rychlost, s jakou hladovějící šelma v zimě ztrácí hmotnost, je úměrná odmocnině z hmotnosti. Napište matematický model popisující vývoj hmotnosti v čase.

(b) Rychlost, s jakou se mění hmotnost pasoucího se býložravce, je dána růstem způsobeným konzumací potravy a úbytkem vlivem metabolismu. Předpokládejme, že rychlost růstu hmotnosti vlivem konzumace je konstantní a rychlost úbytku hmotnosti vlivem metabolismu je úměrná hmotnosti. Napište matematický model popisující vývoj hmotnosti v čase a najděte všechny jeho stacionární body. U těchto bodů určete stabilitu.

V obou případech jenom sestavte diferenciální rovnici a ve druhém bodě splňte další požadované úkoly. Rovnici řešit nemusíte.

5. [8 bodů $(4+4)$] Lineární algebra.

(i) **(A)**Napište definici vlastního čísla a vlastního směru matice. Uveďte příklad matice, kde **(B)** každý směr je vlastním směrem a **(C)** příklad matice, která nemá žádný vlastní směr.

(ii) Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Každou část odpovědi (kromě definice) podpořte výpočtem nebo slovním zdůvodněním, podle toho, co je kratší a snazší.

6. [6 bodů $(3+3)$] Difuzní rovnice

(a) Difuzní rovnice ve studii sledující rozložení znečištění má tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Z tohoto tvaru určete, jaké předpoklady jsou v modelu obsaženy. Zaměřte se na **(A)** stacionárnost, **(B)** existenci zdrojů a na vlastnosti prostředí jako je **(C)** linearita materiálových vlastností, **(D)** homogenita, **(E)** izotropie.

(b) Tok tepla ve dvourozměrném materiálu ve kterém nejsou zdroje tepla je dán vektorem

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte divergenci tohoto toku a napište, co je možné z této informace vyčíst o změně teploty v materiálu.

Pokud jsou v textu tučně písmena pro jednotlivé části otázky, vyznačte stejnými písmeny odpovědi.

- **Požadavek: písemka alespoň 15 bodů z 50 možných a součet bodů z písemky s bonusovými body alespoň 25.**

3.1.2021

1) a) $\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

limita v definici převádí průměrnou rychlost na okamžitou (geometricky převádí směrnici sečny na směrnici tečny)

b) $\frac{dm}{dl} = c \cdot 3 l^2$

c) gram / centimetr

d) $\frac{dl}{dt} = 2 \frac{cm}{měsíc}$, $l = 70$ cm

$\cancel{\frac{dl}{dt}} \cancel{=} \cancel{\frac{dl}{dt}}$ $\quad \frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = c \cdot 3 l^2 \cdot \frac{dl}{dt}$

$\frac{dm}{dt} = c \cdot 3 \cdot 4900 \cdot 2$ g/měsíc

e)

$\frac{dy}{dx} = a \cdot (-2)(x+6)^{-3}$ (pro $y = \frac{a}{(x+6)^2}$)

$\frac{dy}{dx} = 2a e^{ax}$ (pro $y = 1 + e^{2ax}$)

---

2) a) $\int e^{-x} + 3x \, dx = -e^{-x} + \frac{3}{2} x^2 + C$

b) $\int_0^4 e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^4 = -e^{-4} - (-e^0) = 1 - e^{-4}$

c) $\frac{1}{4} \int_0^4 e^{-t} dt = \frac{1}{4} (1 - e^{-4})$

d) $\int_0^t e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^t = 1 - e^{-t}$ (nebo pomocí nevlastního integrálu)

3) (i) $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

(ii) Ano, nastane vždy když platí $f'(x_0) = 0$.
Například $\cos x \simeq 1$ v okolí $x_0 = 0$.

(iii) Ano, vždy když je $x_0 = 0$ a $f(0) = 0$.
Např. $\sin x \simeq x$ v okolí $x_0 = 0$.

(iv) Ne, protože funkce e^{-x} není lineární.

---

4) m ... hmotnost

a)
$$\frac{dm}{dt} = -k\sqrt{m}$$

b)
$$\frac{dm}{dt} = k_1 - k_2 . m$$

$k_1 - k_2 . m = 0$ pro $m = \frac{k_1}{k_2}$ ... jediný stac. bod.

$f(m) = k_1 - k_2 m$ klesá $\Rightarrow$ stac. bod je stabilní

---

5) i)
(A) $A . \vec{v} = \lambda . \vec{v}$ $\vec{v} \neq 0$ ... vlastní směr (vektor)
λ ... vlastní číslo (hodnota)

(B) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ... každý vektor se zobrazí sám na sebe

(C) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ... matice rotace, každý vektor se otočí o úhel θ. Pokud není $\theta = \pi$ nebo $\theta = 0$ nebo $\theta = k \cdot \pi$, nemá vlastní směry

(ii) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
U diagonální matice jsou vlastní čísla v diagonále a vlastní směry ve směru souřadných os.

6) a)

(A)... Ne, není stacionární

(B)... Ne, nejsou zdroje

(C)... Ano, jsou lin. mat. vlastnosti.

(D)... Ano, je homogenní

(E)... Ano, je izotropní

b) $$\nabla \cdot \vec{q} = \frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{y}\right) =$$

$$= 1 + 0 - 0 = 1$$

Divergence je větší než nula, tok tepla zanikne a to znamená, že se materiál ochlazuje.