Písemná část zkoušky z Matematiky, 20.12.2022, (90 minut)

1	2	3	4	5	6

Jméno: VZOR

Zadání je na dvou stranách. Pro tučně vyznačené části otázky označte stejným způsobem části Vaší odpovědi, aby bylo jasné, která část odpovědi se vztahuje ke které části otázky.

1. [15 bodů $(3+3+3+3+3)$] Derivace.

(i) Napište **(a)** definiční vzorec pro derivaci, **(b)** fyzikální význam derivace, **(c)** fyzikální význam podílu z definice derivace a **(d)** jednotku derivace.

(ii) Vypočtěte derivaci funkcí

$$y(x) = 3e^{ax+5}, \quad y(x) = 3x^3 + ax$$

kde $a > 0$ je parametr.

(iii) Funkce T vyjadřuje teplotu v Brněnské přehradě jako funkci času. **(a)** Co vyjadřuje derivace $\frac{dT}{dt}$? **(b)** Je možné vypočítat hodnotu derivace i v případě, že neznáme funkční předpis, ale máme k dispozici hodnoty pro jednotlivé týdny v roce? Jak? Pokud je více možností, napište tu, která dává lepší výsledek.

(iv) Rychlost růstu populace v prostředí s omezenou nosnou kapacitou je úměrná velikosti populace a volnému místu v prostředí. Populace roste z počáteční hodnoty rovné polovině nosné kapacity. Napište matematický model pro takový růst. Velikost populace označte x, nosnou kapacitu K, ostatní parametry (jsou-li potřeba) libovolně.

(v) Tuhost K nosníku obdélníkového průřezu je rovna

$$K = awh^3,$$

kde a je konstanta, w je šířka a h výška průřezu. **(a)** Vypočtěte derivaci $\frac{dK}{dh}$ a **(b)** napište fyzikální interpretaci této derivace.

2. [10 bodů $(4+4+2)$] Diferenciální rovnice

V šedesátých letech byly představeny dvě průlomové ekologické teorie: rovnováha počtu druhů na ostrovech (Mc Arthur a Wilson) a problematika metapopulací (Levins). Na základě následujícího zadání sestavte diferenciální rovnice pro oba modely.

(i) Veličina x značí podíl fragmentů životního prostředí, které jsou osídleny metapopulací. Rychlost změny tohoto podílu je dána rozdílem rychlosti osidlování nových fragmentů a rychlostí vymírání populace na již osídlených fragmentech.

- Rychlost, s jakou jsou osídlovány nové fragmenty, je úměrná současně procentu osídlených a procentu neosídlených fragmentů.
- Rychlost, s jakou vymírá populace na již osídlených fragmentech, je úměrná procentu osídlených fragmentů.

(ii) Veličina N značí počet druhů na ostrově a tato veličina se mění v čase. Rychlost změny počtu druhů na ostrově je dána rozdílem rychlosti s jakou ostrov osidlují nové druhy a rychlosti, s jakou na ostrově usazené druhy vymírají.

- Rychlost usazování nových druhů je nepřímo úměrná počtu druhů na ostrově.
- Rychlost vymírání druhů je přímo úměrná počtu druhů na ostrově.

(iii) Modifikujte předchozí model předpokladem, že rychlost usazování nových druhů na ostrově, není nepřímo úměrná počtu druhů na ostrově, ale klesá lineárně s jejich počtem.

3. [5 bodů $(2+3)$] Lineární algebra.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Najděte součiny AB a BA.

(ii) Najděte vlastní čísla a jeden vlastní vektor matice AB.

4. [4 body $(2+2)$] Integrál.

(i) Vypočtěte integrál $\int_0^1 ax^2 \, dx$, kde a je parametr.

(ii) Rychlost s jakou se v průběhu prvních tří hodin mění teplota je $r(t) = 6 - t$ stupňů Celsia za hodinu. **(a)** O kolik se změní teplota za tyto tři hodiny? **(b)** Jedná se o nárůst nebo pokles?

5. [7 bodů $(4+3)$] Uvažuje následující difuzní rovnici v kartézských souřadnicích.

$$0 = \sigma + D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

(i) Napište, jaký proces může rovnice modelovat. Jestli se jedná o stacionární či nestacionární proces, jestli jsou přítomny **(a)** zdroje stavové veličiny, jestli je použito zjednodušení pro **(b)** izotropní (pro **(b)** homogenní) materiál, jestli jsou předpokládány **(c)** lineární materiálové vztahy. (Stačí napsat písmeno části otázky a k tomu ano/ne.)

(ii) Difuzní rovnice je odvozena z rovnice kontinuity a pracuje s pojmem divergence. **(a)** Napište vzorec pro výpočet divergence v kartézských souřadnicích a **(b)** fyzikální význam divergence. **(c)** Vysvětlete proč není divergence v rovnici (1), resp. ve kterých členech rovnice (1) se divergence schovává a jak.

6. [9 bodů $(3+3+3)$] (Průřez)

(i) Napište **(a)** definici inverzní matice a **(b)** velmi stručně jedno její využití.

(ii) Napište, jakou metodu je možno použít pro numerické integrování, tj. pro integrování funkce u které neznáme funkční předpis, ale hodnoty jsou dány tabulkou. Napište **(a)** název metody, **(b)** obecný vzorec, **(c)** použití vzorce pro výpočet integrálu

$$\int_1^4 f(x) \, dx$$

pro funkci danou následující tabulkou. (Stačí dosazení do vzorce. Numericky nedopočítávejte.)

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	10	11	14	18	22	28	32	38

(iii) **(a)** Napište vzorec pro lineární aproximaci funkce $y = f(x)$ a poté **(b)** napište specifikaci tohoto vzorce pro funkci splňující $f(0) = 0$ a pro aproximaci v okolí počátku. Napište **(c)** kde se s uvedenou aproximací můžeme v praxi setkat. (Vybírejte příklad blízký studovanému oboru, např. spojený s chováním některého fyzikálního pole v materiálu.)

- **Požadavek: písemka alespoň** 15 **bodů z** 50 **možných a součet bodů z písemky s bonusovými body alespoň** 25.

Zkouška z matematiky 20.12.2022

1) (i) a) $$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

b) Rychlost s jakou se mění f jako funkce x je $\frac{df}{dx}$. Změna f vyvolaná jednotkovou změnou x.

c) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ je průměrná rychlost s jakou se mění f na intervalu $[x, x+h]$

d) Stejná jako jednotka podílu $\frac{f}{x}$, tj. podíl jednotek f a x.

(ii) $$\frac{d}{dx}\left(3e^{ax+5}\right) = 3e^{ax+5} \cdot a$$

$$\frac{d}{dx}\left(3x^3 + ax\right) = 9x^2 + a$$

(iii) a) Rychlost růstu teploty v čase

b) Ano, pomocí centrální diference $\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

(iv) $$\frac{dx}{dt} = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) \qquad x(0) = \frac{K}{2}$$

(v) a) $$\frac{dk}{dh} = 3awh^2$$

b) Rychlost růstu tuhosti jako funkce výšky. Změna tuhosti při jednotkové změně výšky

---

2) i) $$\frac{dx}{dt} = k_1 x (1-x) - k_2 x$$

ii) $$\frac{dN}{dt} = \frac{k_1}{N} - k_2 \cdot N$$

iii) $$\frac{dN}{dt} = (a - bN) - k_2 \cdot N$$

5(i) a) ANO b) NE c) ANO d) ANO

+ stacionární ANO

(ii) a) Pro $\vec{F} = (P, Q)$ je

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

b) Divergence udává zdrojovými toku v daném místě

c) $D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ je divergence vektorového pole $\left(D_x \frac{\partial u}{\partial x}, D_y \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

---

6)

(i) a) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

b) Řešení soustavy $Ax = B$ je $X = A^{-1} \cdot B$, pokud A^{-1} existuje.

(ii) a) Lichoběžníkové pravidlo

b) $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right)$

kde $x_{i+1} = x_i + h$, $x_0 = a$, $x_n = b$

c) $\int_1^4 f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left(11 + 2 \cdot 14 + 2 \cdot 18 + 22 \right)$

(iii) a) $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .. aproximace v okolí x_0

b) $f(x) \approx 0 + f'(x_0) \cdot (x - 0) = f'(x_0) \cdot x$

c) Fourierův zákon, Darcyho zákon, Fickův zákon, obecně konstitutivní vztahy

3) i) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ ... vlastní čísla diagonální nebo trojúhelníkové matice jsou čísla v diagonále

alternativa: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 3 \cdot 0 =$

$= (2-\lambda)(1-\lambda)$

$(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$ pro $\lambda = 2$ a $\lambda = 1$

vl. vektor příslušný $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a jeho násobky

vl. vektor příslušný $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a jeho násobky

---

4) i) $\int_0^1 a x^2 \, dx = \left[\frac{a}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{a}{3} - 0 = \frac{a}{3}$

ii) $\Delta T = \int_0^3 6 - t \, dt = \left[6t - \frac{t^2}{2} \right]_0^3 = 18 - \frac{9}{2} - 0 = \frac{27}{2}$

též s využitím toho, že $r(t)$ je lineární a s využitím střední hodnoty $r = \frac{1}{2}(r(0) + r(3)) = \frac{1}{2}(6 + 3) = \frac{9}{2}$

$\Delta T = 3 \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$

teplota roste protože ΔT je kladná.