Vektorová pole, tok, zákony zachování

Robert Mařík

2019-2021

https://youtu.be/DonzhFhcyQ4

Připomenutí derivací

Derivace umožňují studovat a popisovat změny veličin, vyjadřovat kvantitativně jejich vzájemné souvislosti.

(Obyčejná) derivace $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

- S touto derivací se pracuje u funkce jedné proměnné $f(t)$. Např. $f(t)=kt^2$, kde k je parametr (reálné číslo).
- Derivace je okamžitá rychlost změny veličiny f vzhledem k t, tj. nárůst veličiny f vyvolaný jednotkovým nárůstem veličiny t. (Prakticky však veličinu t změníme o malou hodnotu a nárůst přepočítáme na jednotkovou změnu.)
- Jednotka derivace je stejná, jako bychom veličiny f a t dělili.
- V modelech a při praktickém využití pracujeme s definicí derivace jako s rychlostí změny. Při výpočtu ale využíváme dostupné vzorce pro výpočet derivace. Například pro funkci z prvního bodu platí $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=2kt$.

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, ….

- S touto derivací se pracuje u funkce více proměnných, typicky $f(x,y,z,t)$. Např. $f(x,y,z,t)=xt^2$
- Jedná se o obyčejnou derivaci podle jedné proměnné, přičemž ostatní proměnné považujeme za parametry. Tj. v případě funkce z minulého bodu je $\frac{\partial f}{\partial t}=2xt$, $\frac{\partial f}{\partial x}=t^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0$.
- Pro jednotku a výpočet platí totéž co u obyčejné derivace.
- Při aplikacích často pracujeme s gradientem, tj. s vektorem sestaveným z parciálních derivací podle jednotlivých prostorových proměnných. Pro funkci tří proměnných x, y a z a pro potřeby matematické formulace fyzikálních zákonů gradient uvažujeme jako sloupcový vektor

$$\nabla f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}.$$

Pro úsporu místa jej někdy píšeme v transponovaném tvaru

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)^T.$$

Gradient je vektor, který má směr odpovídající směru nejrychlejšího růstu skalární veličiny a velikost odpovídá změně veličiny na jednotku délky.

Transportní jevy

https://youtu.be/ULoUeHincbM

Pochopení a modelování transportních dějů je důležité pro většinu technických oborů. Podstata těchto dějů je často odlišná, přesto mají navenek podobné chování a tím je umožněn jednotný přístup při matematickém modelování.

Příklady veličin podléhajících transportním dějům

- povrchová voda
- podzemní voda
- teplo
- voda ve dřevě

Obecná bilance veličiny, která má zdroje a spotřebiče a je přenášena tokem vypadá následovně.

- Existuje veličina, spojitě rozložená v prostoru, charakterizující stav systému. Tuto veličinu budeme nazývat *stavovou veličinou* a její hustotu označíme u.
- Stavová veličina se může v prostoru přemisťovat *tokem* $\vec{\jmath}$.
- Stavová veličina může vznikat a zanikat. *Zdroje* i *spotřebiče* budeme uvažovat společně a jejich vydatnost rozlišíme znaménkem: spotřebiče budou zdroje se zápornou vydatností. Celkovou vydatnost zdrojů a spotřebičů v daném místě, tj. množství veličiny vygenerované na jednotku objemu (nebo plochy, nebo délky, podle počtu dimenzí v úloze) za jednotku času, označíme σ.

Zákon zachování (se zohledněním toku a zdrojů) je vlastně celková bilance stavové veličiny. Přirozeným jazykem je možno tuto bilanci formulovat následovně.

Přírůstek množství veličiny je součtem přírůstku ze zdrojů a přírůstku způsobeného tokem.

Toto je jednoduchý, ale přitom neuvěřitelně silný nástroj, který umožní popsat řadu zcela odlišných dějů. Pro použití v matematickém modelu ale musíme jednotlivé pojmy kvantifikovat. Měřit rychlost, s jakou se mění množství veličiny v daném místě umíme pomocí derivace podle času. Měřit změny v toku přenášejícím sledovanou veličinu jsme se naučili jako jednu z aplikací parciálních derivací: jedná se o záporně vzatou derivaci podle prostorové proměnné vynásobenou fyzikální materiálovou konstantou. Ještě se musíme naučit měřit intenzitu toku a její změny ve dvou nebo třech dimenzích.

Tok a gradient v konstitutivních zákonech

https://youtu.be/xUhAudBfGLo

Poznámka (konstitutivní zákony). V aplikacích často formulujeme zákony nebo vztahy mezi fyzikálními veličinami specifickými pro danou látku nebo materiál a udávají odezvu tohoto materiálu na externí stimul. Tyto zákony se nazývají *konstitutivní zákony* a formulujeme je pomocí gradientu a toku vektorového pole. Viz též Wikipedie.

Například vítr (tok molekul vzduchu) je vyvolán nerovnoměrným rozložením vzduchu (jeho hustoty a tím i tlaku) v prostoru a směřuje z míst s vyšším tlakem do míst s tlakem nižším. Větší rozdíl tlaků způsobí “větší vítr” a tím větší tok vzduchu. Toto platí i pro jiné proudění, jak ukážeme dále.

Nerovnoměrnost v prostorovém rozložení charakterizuje gradient. V ustáleném stavu je pro široké rozmezí fyzikálních problémů závislost intenzity toku na gradientu lineární. A protože nulovému gradientu (nulovému stimulu) odpovídá nulový tok (nulová odezva), bude tato lineární funkce přímou úměrností.

V dalším shrneme důležité praktické příklady, kdy je tok úměrný gradientu. Konstanta úměrnosti je obecně pouze konstantou pro daný problém a dané hodnoty parametrů. Může se měnit s velikostí studovaného objektu (například obsah průřezu geologické vrstvy, kterou proudí voda), s fyzikálními vlastnostmi proudící látky (např. viskozita nebo hustota tekutiny, stlačitelnost vzduchu), s fyzikálními vlastnostmi prostředí (např. velikost pórů v pórovitém prostředí nebo vlhkost dřeva). Proto je možné tyto zákony najít v různých tvarech, s různými členy a případnými přídavnými konstantami, které například odseparují vliv vlastností proudící látky a vliv vlastností prostředí. Vždy záleží na konkrétní situaci, zvyklostech v příslušném podoboru, nebo na přístupu autora. Není proto naší ambicí vést výklad dopodrobna, všímejme si jenom základních myšlenek.

Vícerozměrné konstitutivní zákony

Zákony uvedené níže byly často odvozeny v jednorozměrném případě a letmo zmíněny v přednášce Derivace II. V moderní formulaci používáme obecný vektorový zápis, který zohledňuje i směr. Konstanta úměrnosti potom zprostředkovává vztah mezi dvěma vektory. Jedná se tedy z matematického pohledu o matici, která umožní nejenom změnit délku vektoru a jeho jednotku, ale i směr. Tato matice se navíc při změně báze transformuje speciálním způsobem, tak jako vektory. Takové objekty nazýváme **tenzory**. Níže budeme pojmem tenzor rozumět matici 3×3 nebo 2×2, podle kontextu. (Obecněji je možno považovat skalární veličiny a vektory za tenzory nižších řádů, toto my však dělat nebudeme.)

Vizualizace toku a vrstevnic pro anizotropní materiál, kdy tok není vždy kolmý na směr maximálního spádu stavové veličiny.

Fickův zákon (difuze)

V roce 1855 německý lékař A. Fick objevil, že difuzní tok $\vec{J}$ (množství látky které projde při difuzi jednotkovou plochou za jednotku času) je úměrný gradientu koncentrace c této látky. Matematicky vyjádřeno pomocí moderní terminologie to znamená, že platí

$$\vec{J} = -D\nabla c.$$

Veličina D se nazývá difuzní koeficient. Pokud má $\vec{J}$ stejný směr jako ∇c, je D skalární veličina. Pokud směry nejsou stejné, je D tenzor. Z fyzikálních důvodů je tenzor D symetrický.

Difuzí se například dřevo zbavuje vlhkosti při vysoušení.

Darcyho zákon (proudění podzemní vody)

V letech 1855 a 1856 francouzský inženýr H. Darcy pokusy prokázal přímou úměru mezi rozdílem tlaků na koncích trubice naplněné porézní zeminou (jednalo se vlastně o rozdíl výšek pro šikmou trubici) a rychlostí proudění vody touto trubicí. Tok (množství vody, která proteče jednotkovou plochou za jednotku času) je dán vztahem

$$\vec{q} = -K\nabla p,$$

kde p je tlak a K je koeficient vodivosti (někdy též koeficient filtrace), v obecném případě symetrický tenzor, v izotropním případě, kdy $\vec{q}$ a ∇p mají stejný směr, veličina skalární.

Někdy se tento zákon neformuluje pomocí gradientu tlaku, ale pomocí gradientu jiné veličiny, kterou zavádíme v hydrologii pro názorné studium efektů, souvisejících s prouděním vody. Nejčastěji se jedná o *vodní potenciál* a hydraulickou výšku či piezometrickou hladinu. Piezometrická hladina je veličina používaná k tomu, abychom do jednoho jednoduše modelovatelného faktoru (má rozměr stejný jako délka) započítali všechny veličiny mající vliv na proudění podzemní vody, od rozdílu nadmořských výšek, přes kapilární a osmotické jevy až po vnější síly vyvolané tlakem geologických vrstev a jiné. Jedná se vlastně o celkovou energii vody s tím, že některé části považujeme za zanedbatelné. Například často neuvažujeme kinetickou energii nebo osmózu a kapilární jevy.

Fourierův zákon (vedení tepla)

Fourierův zákon se týká vedení tepla a vyjadřuje, že vektor hustoty tepelného toku $\vec{q}$ vyvolaného gradientem teploty ∇T je dán vztahem

$$\vec{q} = -k\nabla T.$$

Je-li materiál anizotropní, což je nejobecnější případ, je veličina k symetrickým tenzorem. Je-li materiál izotropní, je k skalární veličinou, případně skalární veličina násobená jednotkovou maticí, pokud potřebujeme zachovat její maticový charakter.

Soretův efekt (termodifuze)

Tok tepla je vyvolaný nerovnoměrným rozložením teploty. Difuze chemické látky je vyvolána nerovnoměrným rozložením koncentrace této látky. Většinou je hybatelem procesu nerovnoměrnost v rozložení látky, která se tímto procesem transportuje. Nemusí to však být vždy. Příkladem je termodifuze, což je pohyb prvků vyvolaný nerovnoměrným rozložením teploty. Například při difúzi vody ve dřevě s nerovnoměrným rozložením teploty je tok dán vztahem

$$\vec{J} = -D\nabla c - sD\nabla T,$$

kde s je koeficient termodifuze.

Rozeznáváme kladný a záporný Soretův efekt. Při kladném dochází k transportu ve směru klesající teploty, při záporném naopak ve směru rostoucí teploty. Te je v kontrastu s ostatními konstitutivními zákony, kde tok proudí vždy jenom do míst s menší hustotou stavové veličiny. Viz Wikipedia a heslo Thermophoresis. Viz Wikipedia a heslo Thermophoresis.

Speciální případy vztahu mezi gradientem a tokem

Uvažujme vztah mezi gradientem a tokem ve tvaru

$$\vec{j} = -K\nabla u \ ,$$

kde K je symetrický tenzor. Gradient má ve trojrozměrném případě vyjádření

$$\nabla u \ = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)^T$$

a ve 2D

$$\nabla u \ = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)^T ,$$

kde horní index T značí transponovanou matici, tj. jedná se o sloupcový vektor.

Obecný případ (anizotropní)

Veličina K je matice

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$

jejíž komponenty splňují $k_{ij} = k_{ji}$. Často jsou všechny veličiny kladné a prvky v hlavní diagonále jsou dominantní.

Komponenty vektoru $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)^T$ jsou

$$\begin{aligned} j_x &= -k_{11}\frac{\partial u}{\partial x} - k_{12}\frac{\partial u}{\partial y} - k_{13}\frac{\partial u}{\partial z}, \\ j_y &= -k_{21}\frac{\partial u}{\partial x} - k_{22}\frac{\partial u}{\partial y} - k_{23}\frac{\partial u}{\partial z}, \\ j_z &= -k_{31}\frac{\partial u}{\partial x} - k_{32}\frac{\partial u}{\partial y} - k_{33}\frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned}$$

což zjistíme prostým maticovým násobením. Prostor pro další úpravu není.

Ortotropní případ, vhodně zvolené osy

V obecném případě je zpravidla možné transformovat soustavu souřadnic tak, aby tenzor K byl diagonální. Pro praktické výpočty se toto však často nevyplatí. Pokud však je studovaný problém ortotropní, má charakteristické směry (přesněji, má tři roviny symetrie materiálových vlastností), je možné zvolit souřadnice v souladu s těmito směry a matice K je diagonální.

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix}$$

Komponenty vektoru $\vec{j}$ jsou

$$\begin{aligned} j_x &= -k_{11}\frac{\partial u}{\partial x}, \\ j_y &= -k_{22}\frac{\partial u}{\partial y}, \\ j_z &= -k_{33}\frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}$$

S diagonální maticí se pracuje velmi dobře, protože má v hlavní diagonále vlastní čísla. Tato vlastní čísla jsou fyzikální charakteristikou úlohy. Například největší vlastní číslo a odpovídající vlastní směr charakterizují směr, ve kterém je odezva materiálu na vnější podnět maximální a vlastní číslo udává velikost této reakce. Tyto fyzikální charakteristiky nemohou být závislé na volbě souřadné soustavy, ve které úlohu popisujeme. Co se mění s volbou souřadné soustavy jsou pouze souřadnice vlastního vektoru. Vlastní čísla jsou však skalární a proto jsou invariantní při otočení soustavy souřadnic. Pokud bychom neměli možnost zvolit soustavu souřadnic tak, aby matice byla diagonální, máme alespoň jistotu, že vlastní čísla zůstanou stejná.

Ortotropní případ ve 2D

Stejné jako ve 3D, pouze chybí třetí rovnice.

Izotropní případ

Stejné jako ortotropní případ, ale navíc platí $k_{11} = k_{22} = k_{33} = k$. Potom $\vec{j} = -k\nabla u$, kde k je konstanta a vektory toku a gradientu mají opačný směr.

Divergence

https://youtu.be/wrYpaPerg3M

Budeme sledovat tok vektorového pole a bude nás zajímat, o kolik se tok v daném místě mění.

- Pro jednoduchost rozdělíme tok na tři nezávislé části ve směru jednotlivých os a vztáhneme vše k jednotkám času a průřezu, tj. budeme uvažovat hustotu toku nějaké fyzikální veličiny.
- Je-li tato hustota toku popsána vektorovým polem $\vec{q} = (P, Q, R)$ v jednotkách kilogram na metr čtvereční za sekundu, znamená to, že kolmým průřezem jednotkového obsahu projde za jednotku času P kilogramů sledované látky, jejíž tok popisujeme. Často se pracuje i s objemovým tokem, kdy množství neměříme v kilogramech ale v metrech krychlových a například při ustáleném proudění v trubici (hydrodynamika) je tok roven vektoru rychlosti a při proudění porézním materiálem (proudění podzemní vody) je roven filtrační rychlosti.
- Derivace $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ udává, o kolik studovaný tok v daném místě vzroste ve směru osy x a tento nárůst je vztažený na jednotku délky.
- Ve směru osy y máme tok vyjádřený veličinou Q a proto nás podobně zajímá $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$.
- Analogicky $\dfrac{\partial R}{\partial z}$.
- Celková změna toku bude součtem všech tří příspěvků. Pokud je kladná, znamená to, že z daného místa více veličiny vytéká, než kolik teče dovnitř. Pokud je záporná, je tomu naopak. Jestli se v případě nerovnováhy v daném místě může proudící veličina tvořit nebo spotřebovávat nebo akumulovat nebo jestli v daném místě může ubývat z tohoto rozboru nezjistíme. Záleží na charakteru proudící veličiny a na okolnostech s tímto prouděním spojených. Tuto informaci nám pro další popis musí dodat externí věda (obecná fyzika, fyzika materiálu, fyzika životního prostředí, hydrologie, pedologie, …).
- Při preciznější argumentaci dávající do souvislosti parciální derivace jednotlivých komponent toku s tím, co se reálně s vektorovým polem děje, je nutné si pomoci stejně jako u derivací, tj. uvažovat ne dané místo, ale jistý konečně velký objem (viz obrázek), vztáhnout dané veličiny na jednotku objemu a rozměry tohoto objemu limitně stáhnout k nule. Toto však již přesahuje ambice v našem kurzu a jedná se o formalismus, kterému se vyhneme přímým představením hotového výsledku.

Výše uvedenými úvahami je motivována následující definice a věta. (Definice je maličko nepřesná, protože nemáme nástroje pro pečlivější formulaci.)

Definice (divergence). *Divergence* vektorového pole $\vec{F}$ v daném bodě je převis toku vektorového pole z tohoto místa nad tokem do tohoto místa. Tento tok se počítá přes hranici infinitezimálně malého referenčního tělesa a je vztažený na jednotku objemu. Divergenci vektorového pole $\vec{F}$ označujeme $\nabla \cdot \vec{F}$ nebo $\operatorname{div} \vec{F}$.

Věta (výpočet divergence). *Pro vektorovou funkci*

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k},$$

kde P, Q a R jsou funkce tří proměnných x, y a z vypočteme divergenci vztahem

$$\nabla \cdot \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Pro vektorovou funkci dvou proměnných vypočteme divergenci analogicky, pouze chybí třetí člen.

Poznámka (fyzikální interpretace divergence). Vektorové pole používáme k modelování toku veličin, které nás zajímají (teplo v materiálu, tekutina nebo chemická látka v materiálu, voda nebo plyn v půdě a podobně). Divergence vektorového pole udává tok z jednotkového objemu látky v daném místě. Udává, jestli se v daném místě a čase tok nabývá na intenzitě (kladná divergence) nebo ustává (záporná divergence). Tento efekt může být způsoben tím, že veličina přenášená tímto polem se v daném místě buď kumuluje, nebo ubývá a také tím, že daná veličina v bodě může vznikat nebo zanikat.

Divergence je lokální veličina. Udává informaci o daném bodě. Pro měření však je nutné mít konečný objem a pro stanovení toku konečně velkou hranici. Vzájemný vztah mezi lokální veličinou a konečným objemem je založený na předpokladu, že podmínky se nemění skokem a okolí každého bodu jsou nepříliš odlišné od podmínek v okolních bodech.

Poznámka (fyzikální interpretace divergence v měřitelných pojmech). Protože tok přes hranici umíme měřit u těles, představíme si okolo bodu který nás zajímá, těleso. Například kouli nebo krychli. Poté určíme tok přes hranici. Tok hranicí ven počítáme kladně a dovnitř záporně. Celkový tok hranicí určíme jako součet přes všechny části hranice. Podíl celkového toku přes hranici tělesa a objemu tohoto tělesa je odhad pro divergenci v daném bodě.

Přesnou divergenci získáme postupem uvedeným v předchozí poznámce, pokud limitním přechodem stáhneme rozměry tělesa k nule.

Pokud se daném místě množství veličiny nemění s časem, tj. žádná veličina se tam neakumuluje ani neubývá, mluvíme o stacionárním proudění a stacionárním poli. Situace se zjednoduší, protože potom divergence souvisí jenom s přítomností zdrojů a spotřebičů.

Poznámka (praktická interpretace divergence stacionárního pole). Pokud při ustáleném proudění je v některém místě divergence kladná, znamená to, že v tomto místě musí být zdroj této veličiny. Pokud je záporná, je v daném místě spotřebič. Pro pohodlí při popisu toku bereme spotřebiče jako záporné zdroje. Vektorové pole, jehož divergence je rovna nule, se nazývá **nezřídlové pole**. To proto, že pokud toto pole popisuje ustálený tok, tak se jedná o tok v prostředí bez zdrojů a spotřebičů.

Ze střední školy z fyziky umíme modelovat vektorové pole pomocí siločar. Siločáry nezřídlového pole nikde nezačínají ani nekončí a jsou to uzavřené křivky. Například stacionární magnetické pole je nezřídlové. Absence zdrojů magnetického pole se projevuje tak, že rozříznutím tyčového magnetu vzniknou dva menší plnohodnotné magnety. Nevznikne samostatný jižní pól a samostatný severní pól magnetu. To je rozdíl oproti poli elektrickému, kdy rozdělením tyče s opačně nabitými konci vznikne jedna kladně nabitá a jedna záporně nabitá tyč poloviční délky.

Výpočet gradientu a divergence

https://youtu.be/UzT_PDj5ukY

Viz přednáška.

Rovnice kontinuity

https://youtu.be/_iHeE-9DJrA

- Přírůstek stavové veličiny za jednotku času v jednotkovém objemu (nebo ploše, nebo délce, podle dimenzionality úlohy) je derivace hustoty u podle času.

$$\text{Přírůstek} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

- Přírůstek veličiny v jednotkovém objemu (nebo ploše, nebo délce) za jednotku času způsobený tokem $\vec{\jmath}$ je záporně vzatá divergence vektorového pole $\vec{\jmath}$. Tento přírůstek je způsobený snížením toku, proto má předřazeno záporné znaménko.

$$\text{Přírůstek způsobený tokem } = -\nabla \cdot \vec{\jmath}$$

Matematickou formulací celkové bilance je **rovnice kontinuity**.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot \vec{\jmath}$$

Poznámka (fyzikální interpretace členů rovnice kontinuity).

- Člen $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ udává, jak rychle se roste hustota stavové veličiny u v daném místě a čase.
- Člen σ udává vydatnost zdrojů stavové veličiny, přičemž spotřebiče jsou uvažovány jako zdroje záporné vydatnosti. Tento člen tedy udává, kolik stavové veličiny v tomto místě vzniká v jednotkovém objemu za jednotku času.
- Člen $\nabla \cdot \vec{\jmath}$ udává v daném bodě změnu ve velikosti proudění přenášejícím stavovou veličinu. Přesněji, udává, o kolik více veličiny z daného místa vyteče ve srovnání s množstvím veličiny, které do tohoto místa vteče. Jinak řečeno, udává, o kolik zesílí v daném místě tok $\vec{\jmath}$. My potřebujeme mít zachyceno zeslabení (množství které chybí v toku se "použije" na akumulaci veličiny v daném místě) a proto uvažujeme záporně vzatou divergenci, tj. $-\nabla \cdot \vec{\jmath}$.
- Pokud zdroje stavové veličiny neexistují, jedná se o *bezzdrojovou rovnici* a klademe $\sigma = 0$.
- Pokud studujeme systém v ustáleném stavu, kdy se stavová veličina nemění v čase, je člen $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ na levé straně nulový. V tomto případě mluvíme o *stacionárním stavu* a *stacionární rovnici kontinuity*. Stacionární rovnice kontinuity typicky popisuje systémy, které byly dostatečně dlouhou dobu ve stabilních podmínkách a dosáhly rovnovážného stavu.
- Viděli jsme, že za určitých podmínek mohou některé členy v rovnici kontinuty chybět. Naopak člen $\nabla\cdot\vec{\jmath}$ charakterizující

změny v toku je v rovnici kontinuity přítomen vždy. Bez něj by rovnice kontinuity ztratila smysl (resp. redukovala by se na triviální případ, kdy veličina v daném místě vzniká danou rychlostí a zůstává zde, tj. problém řešitelný čistě integrováním).

V matematice často rovnici kontinuity uvažujeme ve výše uvedeném tvaru. Při praktickém použití většinou preferujeme názornou interpretaci jednotlivých veličin a proto se v rovnici mohou objevit další konstanty úměrnosti, které umožní sladit jednotky a fyzikální interpretaci členů. Někdy se naopak snažíme konstanty co nejvíce redukovat metodami transformace popsanými v přednášce o diferenciálních rovnicích. Proto volíme vhodné násobky veličin vystupujících v matematické formulaci tak, aby se co nejvíce konstant eliminovalo, případně shluklo do jediné veličiny. Zkušenosti ukazují, že je vhodné volit veličiny bezrozměrné. Například v publikaci P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I je zavedena bezrozměrná vlhkost, bezrozměrný čas a bezrozměrná vzdálenost na straně 61 pro rovnici popisující difuzi a charakteristická délka, Biotovo číslo (bezrozměrná tepelná vodivost) a bezrozměrná teplota, bezrozměrný čas a bezrozměrná vzdálenost pro rovnici popisující vedení tepla na stranách 88 a 89.

V této rovnici není zahrnut případ, kdy se veličina přenáší ještě i prouděním hmotného prostředí (konvekce).

Rovnice mělké vody

Rovnici kontinuity můžeme použít pro popis vody v korytě. Úloha je jednodimenzionální a tok Q je skalární veličina. Divergence toku se díky jednodimenzionálnosti redukuje na derivaci podle prostorové proměnné $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Zachovávající se veličinou je množství vody. Hustota zachovávající se veličiny je množství vody na metr délky toku, tj. *průtočný průřez* A (obsah průřezu říčního toku v daném místě). Zdroje zpravidla neuvažujeme, tj. $\sigma = 0$. Rovnice kontinuity má potom tvar

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

a nazývá se Saint-Venantova rovnice nebo též *rovnice mělké vody*. Tato rovnice se používá při popisu *proudění v korytě* nebo při modelování *vln tsunami*.

V rovnici jsou dvě funkce, tok Q definující pohyb stavové veličiny a průřez A definující množství stavové veličiny. Někdy je vhodnější pracovat se stavovou veličinou h udávající výšku hladiny. Jak jsme zmínili v úvodní přednášce o derivacích, je derivace $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h}$ rovna šířce hladiny. Abychom mohli celou rovnici převést na tvar pracující jenom se stavovou veličinou h, je nutné udělat nějaké dodatečné předpoklady, jako například pracovat s konkrétním tvarem koryta.

Proudění tekutiny v mechanice kontinua

V mechanice kontinua podobně jako u vedení tepla neuvažujeme zdroje. Stavovou veličinou je hustota ρ, která popisuje množství látky v daném místě. Tato látka je přenášena tokem, který je roven součinu rychlosti $\vec{u}$ a hustoty ρ. Rovnice kontinuity popisující proudění dané rychlostí $\vec{u}$ má poté tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0,$$

kde ρ je hustota. Tato rovnice napsána pro vzduch je jednou z rovnic používaných při modelování vývoje počasí

Pro nestlačitelnou tekutinu je hustota konstantní, což eliminuje nestacionární člen a redukuje rovnici na

$$\nabla \cdot \vec{u} \ = 0.$$

Důsledkem této rovnosti je zvýšení rychlosti molekul pohybující se nestlačitelné tekutiny při proudění místem s menším průřezem.

Středoškolský makroskopický tvar jednorozměrné rovnice kontinuity pro proudění nestlačitelné tekutiny je

$$Su \ = \text{konst.}$$

Difuzní rovnice

https://youtu.be/MH8IzenZZCo

Difuzní rovnice je rovnice kontiuity s dosazeným konstitučním vztahem pro tok. Použijeme-li pro kvantifikaci souvislosti toku a gradientu lineární aproximaci, je možné psát

$$\vec{\jmath} = -D\nabla u,$$

kde D konstanta úměrnosti. Pokud tok $\vec{\jmath}$ a gradient ∇u leží v jedné přímce, je D reálné číslo, jinak je D matice. Například při studiu pohybu vody ve dřevě se voda řídí nejen směrem maximálního poklesu vlhkosti, ale stáčí se současně do podélného směru, ve kterém dřevo vede vlhkost nejlépe. V takovém případě je D matice. Spojením rovnice kontinuity

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot \vec{\jmath}$$

a vztahu pro tok stavové veličiny dostáváme rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot (-D\nabla u).$$

Tuto rovici je možno upravit na tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \nabla \cdot (D\nabla u),$$

který se nazývá *difuzní rovnice.*

Poznámka (fyzikální interpretace difuzní rovnice).

- Člen $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ udává, jak rychle se mění hustota stavové veličiny u. Je stejný jako v rovnici kontinuity.
- Člen σ udává vydatnost zdrojů stavové veličiny. Je stejný jako v rovnici kontinuity.
- Člen ∇u udává nerovnoměrnost v prostorovém rozložení stavové veličiny. Pomocí difuzní matice D a konstitutivního zákona tuto nerovnoměrnost přepočítáme na tok, který se snaží uvažovanou nerovnoměrnost vyrovnat. Tento tok je reprezentován výrazem $-D\nabla u$.
- Záporně vzatá divergence toku udává, jak tok v daném místě ztrácí na intenzitě. Vzhledem k zápornému znaménku v konstitutivním zákoně má záporně vzatá divergence tvar
$$\nabla \cdot (D\nabla u).$$
Představuje přírůstek hustoty stavové veličiny v daném místě za jednotku času, způsobený zeslábnutím toku.
- Rovnice jako celek vyjadřuje, že navýšení hustoty stavové veličiny (tj. množství stavové veličiny v jednotkovém objemu) je součtem navýšení díky zdrojům a navýšení díky zeslabení toku v daném místě.

Vedení tepla

Důležitým speciálním případem difuzní rovnice je rovnice vedení tepla. Stavovou veličinou, která se zachovává v úlohách s vedením tepla, je vnitřní energie ve formě tepla. Zpravidla nemá smysl uvažovat členy vyjadřující zdroje, tj. $\sigma = 0$. Protože teplo neměříme přímo, je vhodnější model formulovat pro teplotu T. Jsou-li ϱ a c po řadě hustota a měrná tepelná kapacita materiálu, má člen vyjadřující změnu hustoty energie v daném místě tvar $\varrho c\dfrac{\partial T}{\partial t}$. Úměrnost mezi gradientem teploty a tokem tepla zprostředkovává *Fourierův zákon.* Difuzní rovnice má v tomto případě tvar

$$\varrho c\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla T)$$

Poznámka (fyzikální interpretace rovnice vedení tepla).

- Veličina $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ udává rychlost růstu teploty tělesa a koeficient ρc tuto hodnotu přepočítává na údaj, jak rychle roste vnitřní energie tělesa (kinetická energie molekul.)
- Výraz $D\nabla T$ udává (až na znaménko), jak se nerovnoměrnost v rozložení teploty vyrovnává tokem tepla. Přesněji, tok tepla je $-D\nabla T$.
- Člen $\nabla\cdot(D\nabla T)$ udává, kolik tepla z celkového toku v daném místě zůstává a podílí se na zvýšení teploty. Vzhledem k absenci zdrojů je to také jediný mechanismus, jak v daném místě může vnitřní energie přibývat či ubývat.
- Rovnice jako celek vyjadřuje to, že pokud z daného místa více energie odtéká, než kolik do místa proudí, dojde v tomto místě k odpovídajícímu snížení teploty. V tomto bodě je totiž divergence toku $\nabla \cdot (-D\nabla T)$ kladná a výraz z rovnice $\nabla \cdot (D\nabla T)$ je proto záporný.

Tato rovnice je zobecnění rovnice vedení tepla v jedné dimenzi, kterou jsme odvodili primitivními prostředky (jenom pomocí parciálních derivací, bez gradientu a divergence) ve tvaru

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

v úvodní přednášce.

Rovnice vedení tepla se používá například při *tepelné ochraně budov*, při modelování *tepelných ostrovů* v krajině, při *tepelné modifikaci dřeva*, nebo při studiu *permafrostu.*

V literatuře věnované problematice dřeva se rovnice vedení tepla ve dřevě označuje jako Druhý Fourierův zákon (P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I, str. 88).

V některých případech nemusí být člen charakterizující zdroje nulový. Teplo může vznikat například při tření nebo při průchodu elektrického proudu transformací z jiného druhu energie. Dále teplo vzniká například při betonování po přidání vody do cementu, známý je problém jak uchladit Hooverovu přehradu při stavbě.

Voda v porézním materiálu

V porézním materiálu voda prostupuje materiálem a zachovává se její množství, což bude stavová veličina. Hustotu tohoto množství, tj. obsah vody v jednotce objemu, označíme c a pro tuto veličinu formulujeme matematický model. Zdroje neuvažujeme. Úměrnost mezi gradientem koncentrace vody a jejím tokem zprostředkovává *Fickův zákon.* Modelem je potom difuzní rovnice bez zdrojů.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla c)$$

Tato rovnice se používá například při modelování procesu *sušení dřeva* v sušárnách nebo při modelování *dřeva ve vlhkém prostředí.* Stejná rovnice napsaná pro vzduch se používá k modelování proudění v atmosféře při *předpovídání počasí.*

V literatuře věnované problematice dřeva se rovnice difuze použitá na modelování vlhkosti ve dřevě označuje jako Druhý Fickův zákon (A. Požgaj a kol., Štruktúra a vlastnosti dreva, str. 202, P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I, str. 60).

V praxi je dřevo často s jistou přesností homogenní, ale difuzní koeficient dřeva závisí na vlhkosti, tedy vztah mezi gradientem vlhkosti a difuzním tokem není lineární. Přesto i v tomto případě používáme Fickův zákon, ovšem složky difuzního koeficientu nepovažujeme za konstanty, jsou závislé na c a jejím prostřednictvím i na x.

Rovnice podzemní vody

Proudění podzemní vody je vlastně úloha s řekou se zasypaným korytem. Taková voda teče ve srovnání s povrchovou vodou velmi pomalu, protože prosakuje půdou. Prostor, kde se podzemní voda nachází, se nazývá *zvodeň*. Stejně jako řeka v korytě na povrchu, i voda v podzemní zvodni teče v jistém smyslu “z kopce”. V tomto případě však kromě nadmořské výšky může hrát roli i rozdíl tlaků nebo další efekty. Vliv všech těchto efektů shrnujeme do jediného pojmu *piezometrická výška*. Směr “z kopce” pro podzemní vodu je poté směr poklesu piezometrické výšky. V daném místě se může voda hromadit, to poznáme nárůstem hladiny spodní vody. Také může z hlediska zvodně část vody zanikat, například pokud je zde čerpaná studna nebo průsak do jiné zvodně. Voda může ve zvodni i vznikat, například zasakovacím vrtem nebo průsakem dešťových srážek. Pokud do celkové bilance započteme rozdíl mezi přítokem a odtokem a všechny zdroje a spotřebiče, množství vody se zachovává.

Podzemní zvodeň je typickým porézním materiálem, přesto k modelování vody v tomto prostředí přistupujeme speciálním způsobem. Úloha se většinou uvažuje ve dvou dimenzích, protože horizontální rozměry zvodně jsou mnohem větší než její hloubka. Zachovává se množství vody, ale stejně jako u vedení tepla je výhodné formulovat model pro lépe měřitelnou veličinu, *piezometrickou výšku* h. Přírůstek množství podzemní vody za časovou jednotku na jednotkové ploše v daném místě zvodně má tvar $S_S \dfrac{\partial h}{\partial t}$, kde S_S je *specifická zásobnost*. Úměrnost mezi gradientem piezometrické výšky a filtračním tokem zprostředkovává *Darcyho zákon*. Difuzní rovnice má (s konstantou úměrnosti T, *transmisivitou*) tvar

$$S_S \frac{\partial h}{\partial t} = \sigma + \nabla \cdot (T \nabla h).$$

Tato rovnice se nazývá *rovnice podzemní vody*. Zdroje jsou nejčastěji zasakovací nebo odvodňovací vrty, dále studny, poldry, výkopy nebo zářezy. Informace získané z rovnice podzemní vody se využívají například k ochraně lomů, dolů a stavebních jam před *zaplavením*, k hospodaření s *pitnou vodou*, k ochraně před šířením *kontaminace z chemických provozů*. Aplikace jsou dále v detekci zdroje kontaminace pitné vody a odhadu rychlosti šíření kontaminace, včetně *kontaminace slanou mořskou vodou* v přímořských oblastech.

U proudění s napjatou hladinou (mezi dvěma nepropustnými vrstvami, angl. *confined aquifer*) transmisitiva závisí pouze na fyzikálních vlastnostech zvodně. Například pro homogenní izotropní materiál je konstantní. U proudění s volnou hladinou (bez horní nepropustné vrstvy, angl. *unconfined aquifer*) je transmisivita úměrná tloušťce vrstvy obsahující vodu. Zpravidla nulovou hodnotu piezometrické hladiny volíme na dolní nepropustné vrstvě a potom platí $T = kh$, kde k závisí pouze na fyzikálních vlastnostech půdy. Proto se často rovnice podzemní vody pro proudění s volnou hladinou zapisuje ve tvaru

$$S_S \frac{\partial h}{\partial t} = \sigma + \nabla \cdot (kh \nabla h).$$

Rovnice vedení tepla ve 2D v různých podmínkách

https://youtu.be/5hy6lB1O4KQ

Uvažujme rovnici vedení tepla ve dvou rozměrech a v prostředí bez zdrojů.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla T) \qquad (***)$$

Stacionární stav

Stacionární stav znamená, že stavové veličiny nezávisí na čase. Derivace podle času je v takovém případě nulová. Rovnice (***) se redukuje na

$$\nabla \cdot (D \nabla T) = 0.$$

Homogenní izotropní materiál a lineární materiálové vztahy

Materiál má ve všech místech (homogenní) a ve všech směrech (izotropní) stejné vlastnosti. Veličina D je reálná skalární veličina (konstanta).

Podle pravidla derivace konstantního násobku se rovnice (***) redukuje na

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = D \nabla \cdot (\nabla T)$$

a ve složkách

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

Pro $\tau = \dfrac{Dt}{\rho c}$ (změna jednotky času) dostáváme

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Ortotropní materiál, nehomogenní nebo nelineární

Materiál má dva charakteristické směry související s rovinami symetrie. Zvolíme soustavu souřadnic tak, aby osy byly orientovány ve směru vlastních vektorů.

Veličina D je diagonální matice. Pro

$$D = \begin{pmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{pmatrix}$$

je tvar rovnice (***) ve složkách

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Homogenní ortotropní materiál a lineární materiálové vztahy

Materiál má dva charakteristické směry související s rovinami symetrie a materiálové charakteristiky jsou ve všech místech stejné a nezávislá na T. Stejné jako předchozí případ, ale D_x a D_y jsou konstanty. Podle pravidla pro derivaci konstantního násobku se rovnice (***) redukuje na

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Umění identifikace předpokladů z tvaru difuzní rovnice

Jasná kuchařka, jak identifikovat předpoklady vedoucí ke konkrétní formě difuzní rovnice může vypadat násedovně. Obecný tvar v kartézských souřadnicích je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

a pokud máte před sebou podobnou rovnici, ve které některý člen chybí, znamená to, že tato rovnice v sobě již obsahuje jisté předpoklady. Ty se pokusíme identifikovat. Některý člen může být lehce modifikovaný, například a levé straně mohou figurovat dodatečné multiplikativní konstanty (například v případě rovnice vedení tepla) nebo člen popisující zdroje může být nekonstantní (například při studiu vývoje populace se zahrnutím prostorového rozložení používáme logistický růst $\sigma = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right)$), zajímavé však pro nás jsou podstatné odlišnosti shrnuté v následujících odrážkách. Vždy je to "něco za něco". Jednodušší rovnice se lépe dále zpracovává, ale neumí zachytit plnou škálu efektů, které jsou v obecné rovnici.

- Je v rovnici člen $\frac{\partial u}{\partial t}$ s derivací podle času? Pokud ano, je rovnice *nestacionární* a dokáže popsat časový vývoj děje. Pokud ne, jedná se o *stacionánrní* rovnici popisující děj po dosažení ustáleného stavu. Stacionární rovnice je jednodušší, ale nedokáže zachytit časový vývoj.
- Je v rovnici člen bez časové a prostorové derivace? Tj. v našem označení σ? Pokud ano, popisuje tento člen vydatnost zdrojů nebo spotřebičů a rovnice je schopna zachytit situace, kdy stavová veličina vzniká nebo zaniká. Pokud ne, jedná se o *bezzdrojovou rovnici.* Takové rovnice popisuje stav, kdy se stavová veličina může jenom přemisťovat nebo kumulovat. Bezzdrojová rovnice je jednodušší, ale nedokáže modelovat vznik či zánik stavové veličiny.
- Jsou přítomny všechny prostorové souřadnice, nebo jenom některé? Počet prostorových souřadnic defiuje *dimenzi problému*, tj. určuje, zda se jedná o úlohu v prostoru, v rovině nebo na přímce.
- Jsou všechny difuzní koeficienty stejné (například D), nebo jsou odlišeny (například indexy D_x, D_y, D_z)? Pokud jsou stejné, jedná se o *izotropní* materiál a rovnice dokáže popsat pouze materiál mající ve všech směrech stejné vlastnosti. Pokud jsou difuzní koeficienty odlišeny, jedná se o *anizotropní* nebo *ortotropní* materiál a dokážeme s ní popsat i materiály mající díky své struktuře jiné vlastnosti v jednotlivých směrech.
- Jsou difuzní koeficienty uvnitř derivací ve členech typu

  $$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

  nebo jsou difuzní členy zjednodušeny do tvaru

  $$D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

  s druhými derivacemi? Pokud jsou zjednodušeny do druhého tvaru se součinem difuzního koeficientu a druhé derivace, znamená to, že rovnice je sice jednodušší, ale rovnice je schopna popsat pouze materiál, který je *homogenní* a konstitutivní zákon v tomto materiálu je *lineární.* V opačném případě (nehomogenita materiálu, nelinearita materiálu, případně obojí) necháváme difuzní koeficienty uvnitř derivace, tak jak to je v obecném případě. Rovnice je komplikovanější, ale umožňuje práci s obecnějšími materiály.

Shrnutí, hlavní myšlenky

https://youtu.be/TjyB3kP2uXE

- Pomocí gradientu a aparátu lineární algebry můžeme vyjádřit vztah mezi pohybem fyzikální veličiny a mechanismem, který tento pohyb iniciuje. Většinou se jedná o vztah mezi vektorovým polem toku a gradientem jistého skalárního pole.

- Pomocí parciálních derivací a divergence dokážeme určit, jestli se v nějakém místě veličina proudící tímto místem "ztrácí" nebo "přibývá".
- Dokážeme dokonce s rozumnou interpretací, čím případné ubývání přenášené veličiny může být způsobeno (zdroje a spotřebiče nebo akumulace v daném místě), zformulovat rovnici, která dané proudění plně popisuje. Výsledkem jsou rovnice vedení tepla, rovnice difuze, rovnice proudění podzemní vody a jiné.
- Obecná rovnice odvozená podle předchozích bodů je obecná a pro práci na konkrétní úloze se ji snažíme nějak blíže specifikovat. Například zjednodušit, pokud máme informaci o charakteru materiálových vztahů (lineární/nelineární) a materiálu (homogenní/nehomogenní). Jiným zjednodušením je, pokud se zajímáme o stacionární stav, který se nastolí po dosažení rovnováhy.
- Posláním široké škály příkladů různých specifikací rovnice kontinuity (vedení tepla, proudění povrchové a podzemní vody a další) je, aby si student uvědomil široký záběr obecné formulace rovnice kontinuity. Na zkoušku se naučte obecnou rovnici a jenom informativně si přečtěte její speciální případy. Obory pracující se dřevem (dřevařství, nábytek, dřevostavby) si uložte do paměti rovnice popisující modelování tepla a vlhkosti ve dřevě. Budou se vám hodit ve studiu. Na krajinářství se zase zaměřte na modelování vody, mělké i podzemní.

Shrnutí více matematickou formou

- Ukázali jsme si, že má smysl založit model na bilanci, která vyjadřuje, že rychlost růstu stavové veličiny je součtem příspěvku vygenerovaného zdroji a příspěvku přineseného tokem.
- Rychlost růstu je derivace podle času,
$$\frac{\partial u}{\partial t}.$$
- Příspěvek přinesený tokem je roven zeslabení toku v daném místě. Zeslabení toku vypočteme jako záporně vzaté zesílení toku, tj. záporně vzatou divergenci toku,
$$-\nabla\cdot\vec{j}.$$
- Celková bilance se poté nazývá rovnice kontinuity a má tvar
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma-\nabla\cdot\vec{j}.$$
- Tok $\vec{j}$ zpravidla vypočteme jako záporně vzatý gradient stavové veličiny vynásobený difuzní maticí, tj.
$$\vec{j}=-D\nabla u.$$
- Spojením předchozích vztahů dostáváme difuzní rovnici
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma+\nabla\cdot(D\nabla u)\,.$$
To je rovnice popisující obecně transport energie nebo hmoty prostředím. Například vedení tepla nebo difuzi vody při sušení dřeva.
- Pro konkrétní výpočet je často nutné rovnici zapsat v souřadnicích. Například pokud máme dvojrozměrný model a směr souřadných os zvolíme ve vlastních směrech matice D (potom matice D bude diagonální s diagonálními prvky například D_x a D_y), má difuzní rovnice tvar
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma+\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$
- Pokud je materiál homogení a má lineární materiálovou odezvu, je dokonce možné rovnici dále zjednodušit na
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma+D_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+D_y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{N}$$
Tato formulace je jednodušší než předešlá, protože obsahuje druhé derivace místo kvaziderivací.
- Pokud je rovnice například stacionární (stavová veličina nezávisí na čase, derivace podle času je nulová), bezzdrojová (neobsahuje zdroje ani spotřebiče, veličina σ je nulová), z homogenního a lineárního materiálu (viz předchozí bod) redukuje se rovnice (N) na
$$0=D_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+D_y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{S}$$
Tato rovnice je jednodušší než "plná rovnice" (N) a proto ji dokážeme řešit i ve složitějších podmínkách. Někdy například umíme vyřešit nestacionární rovnici (N) a máme dynamiku jak rychle roste stavová veličina, například jak rychle roste teplota v materiálu. To je nejlepší scénář, někdy však může být nerealizovatelný. Někdy ale umíme vyřešit jenom stacionární rovnici (S) a najdeme jenom rozložení stavové veličiny po dosažení rovnovážného stavu. To je také dobrá a užitečná informace sama o sobě. Navíc může sloužit jako odrazový můstek k řešení nestacionární rovnice (N) tak, že od stacionárního řešení postupujeme zpětně v čase.
- Pokud je materiál z předchozího bodu ještě navíc izotropní, tj. pokud má stejné vlastnosti ve všech směrech, je $D_x=D_y$ a rovnici je možno vydělit do tvaru
$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$
O této rovnici si ukážeme (v roce 2021 jsme si ukázali už na minulé přednášce) že zapojením druhých diferencí pro numerickou aproximaci druhé derivace (viz přednáška číslo 2) se model redukuje na soustavu lineárních rovnic, jak jsme ji poněkud naivní metodou odvodili v přednášce číslo 7.

Praktická aplikace (zajímavost z jiné oblasti než nauky o materiálu)

Jste frustrovaní, že k rovnici nemáme řešení? Bohužel ho není obecně možné najít. Rovnici dokážeme přesně vyřešit jenom ve velmi speciálních případech. I bez vyřešení však z rovnice získáváme užitečné informace. Navíc rovnice může být stavebním kamenem složitějšího modelu. Místo slibů konkrétní příklad zase na jiné (ale aktuální) téma.

V článku A Local and Time Resolution of the COVID-19 Propagation—A Two-Dimensional Approach for Germany Including Diffusion Phenomena to Describe the Spatial Spread of the COVID-19 Pandemic je prostorové šíření epidemi COVID modelováno difuzní rovnicí (1) ve tvaru

$$\frac{\partial c}{\partial t} = q + \nabla \cdot (D \nabla c),$$

což je přesně rovnice, se kterou jsme pracovali zde. Je to rovnice ve své neobecnější formě, aby bylo možno zachytit

- časový vývoj (o ten nám jde),
- nehomogenitu v šíření (například ve městech je jiná rychlost šíření než na venkově) a
- existenci zdrojů (vir se umí množit).

Tato rovnice se řeší pro Německo, což znemožňuje kvůli složité geometrii nalezení analytického přesného řešení. To totiž umíme v prakticky použitelné formě najít jenom pro obdélník a několik málo dalších množin. Proto se tento model řeší numericky. V prvním odstavci podkapitoly 4 článku je numerický model pro jednotlivé spolkové země označen číslem (7) a redukce na soustavu lineárních rovnic (8). V následujícím odstavci je zmíněna Jacobiho metoda pro numerické řešení soustav lineárních rovnic. S touto metodou jsme se setkali v předchozí přednášce o soustavách rovnic.

Model je dokonce možné doplnit dynamikou růstu zahrnující nárůst nejenom vlivem difuze, ale i vlivem množení viru v daném místě. Přesněji, v odstavci 6 odkazovaného článku se model doplňuje rovnicemi (9) až (11) ve tvaru

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S_j}{\mathrm{d}t} &= -\kappa_j \frac{I_j}{N_j} S_j, \\
\frac{\mathrm{d}I_j}{\mathrm{d}t} &= \kappa_j \frac{I_j}{N_j} S_j - \eta_j I_j, \\
\frac{\mathrm{d}R_j}{\mathrm{d}t} &= \eta_j I_j.
\end{aligned}$$

Toto jsou již naši staří známí ze světa derivací funkce jedné proměnné. Například první rovnice vyjadřuje, že počet S_j lidí zdravých a náchylných k onemocnění COVID19 ve spolkové zemi s indexem j se snižuje rychlostí přímo úměrnou současně množství náchylných lidí a množství I_j infikovaných lidí a nepřímo úměrnou celkové velikosti populace v této zemi N_j. Konstanta úměrnosti je κ_j a abychom se mohli spolehnout na to, že tato konstanta je kladná, je úbytek skupiny dosud zdravých lidí zachycen záporným znaménkem na pravé straně rovnice. Podobně je možné interpretovat další rovnice, je to vlastně klasický SIR model epidemie. Prolistujete si výše odkazovaný anglický článek o modelování epidemie v Německu a všimněte si, že se nic ručně nemusí počítat. Rovnice se nasimulují v počítači a člověk jenom plní ty úlohy, které počítače neumí a nikdy umět nemůžou: sestaví model na základě své představy o fungování procesu a poté interpretuje výstup ze simulace.