Shrnutí za předmět Matematika

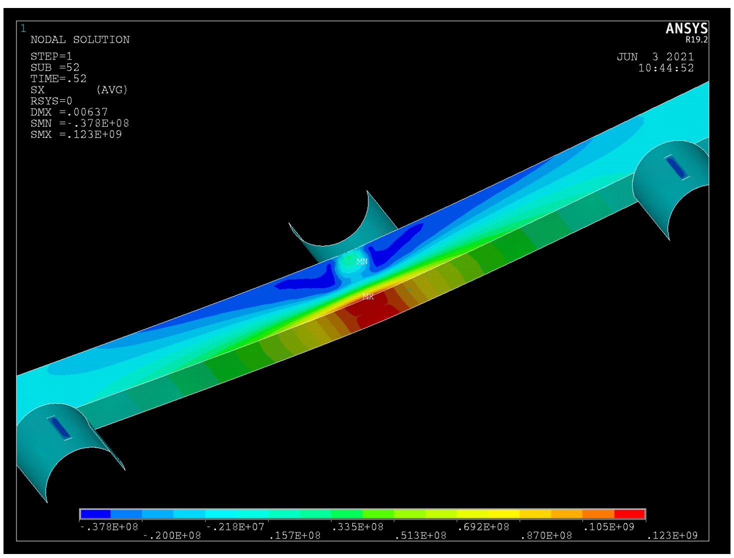
Robert Mařík

květen 2020

Stránka obsahuje dva způsoby shrnutí. Jednak z hlediska aplikací a jednak z hlediska matematického aparátu.

Matematika a dřevo/půda/příroda/materiál

Hookův zákon v 1D nebo pro izotropní materiál



Obrázek 1: *Tříbodový ohyb dřevěného nosníku. Barevně je znároněno napětí podél nosníku, tj. v podélném směru dřeva. Jdou vidět části s tlakovým a tahovým namáháním v tomto směru. Výstup z programu ANSYS, autor modelu J. Milch, LDF MENDELU.*

Hookův zákon umožňuje vyhodnotit, jaká **tvarové změny jsou vyvolány působením vnější síly** na těleso z materiálu podléhajícího deformaci. Naopak umožňuje také určit, jaké **vnitřní napětí nastává u materiálu vystaveného deformaci**.

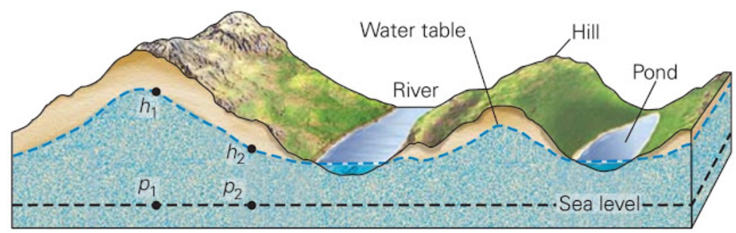
Napětí σ v materiálu při mechanickém namáhání relativní deformací ε je dáno vztahem

$$\sigma = E\varepsilon,$$

kde E je Youngův modul pružnosti.

- Zákon vyjadřuje přímou úměrnost mezi deformací a napětím.
- Jedná se o lineární aproximaci obecného vztahu. Proto je problematické použití tohoto zákona pro velké deformace. Nicméně na naprostou majoritu aplikací je tato lineární aproximace dostatečná a kdybychom ji neučinili, nespočítáme ve statice skoro nic.
- Funkce $\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon$ je lichá funkce proměnné ε, předpokládá **stejné chování v tahu a tlaku**. (Ve skutečnosti pro dřevo neplatí ani pro malé deformace, odtud je poté spousta problémů při přenesení “strojařských” výsledků na dřevo.)

Darcyho zákon

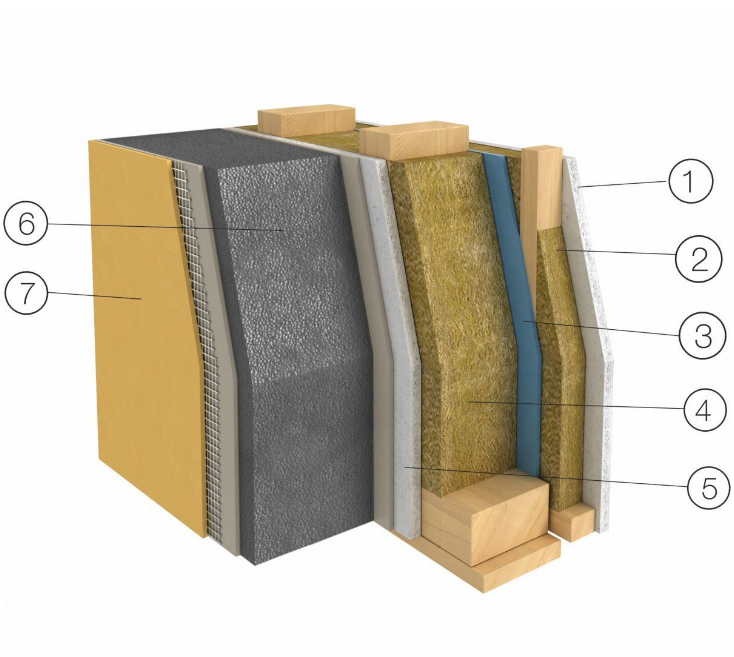


Obrázek 2: *Hydraulická hladina v hornaté oblasti. Zdroj: http://geologylearn.blogspot.com/2015/12/groundwater-flow.html*

Darcyho zákon je vztah mezi hydraulickým gradientem (hnací síla dávající do pohybu vodu v půdě) a filtračním tokem. Umožňuje modelovat, **jakým směrem a jakou rychlostí prosakuje voda porézní zeminou**. Umožňuje posuzovat hydraulické poměry v půdě, je důležitý pro hospodaření s vodou (kolik je vody v půdě a kterým směrem teče) i pro **ochranu vodních zdrojů** (ve vnitrozemí ochrana před **znečištěním**, v přímořských státech i ochrana před **průnikem mořské vody do zdrojů vody pitné**).

Jako všechny materiálové vztahy, je analogický Hookovu zákonu. Často se vyjadřuje pomocí podílu, například na Wikipedii. To je nejjednodušší formulace. Pokud hydraulický gradient není konstantní, není možné použít tuto jednoduchou formulaci a je nutné použít formulací pomocí gradientu. V jednorozměrném případě se jako obvykle gradient redukuje na derivaci podle prostorové proměnné.

Fourierův zákon v 1D nebo pro izotropní materiál



Obrázek 3: *Ukázka sendvičové konstrukce, Tepelný odpor se počítá stejně jako v elektrotechnice elekrický odpor. Vidíme analogii sériového (materiály 1, 6, ...) i paralelního (materiál 2 nebo 4 a k nim paralelně dřevo nad a pod) zapojení. Zdroj: https://www.rdrymarov.cz/*

Fourierův zákon umožňuje **přepočet rozdílu teplot na teplotní tok nebo tepelné ztráty**. Jedná se o vztah mezi teplotním gradientem (hnací síla dávající do pohybu energii v materiálu) a tokem tepla. Analogický Hookovu a Darcyho zákonu, jako ostatně všechny materiálové vztahy aproximované lineární funkcí. Fourierův zákon se často vyjadřuje pomocí podílu, například na Wikipedii. To je nejjednodušší formulace. Pokud teplotní gradient není konstantní (tok není homogenní), není možné použít tuto jednoduchou formulaci a je nutné použít formulací pomocí gradientu. V jednorozměrném případě se jako obvykle gradient redukuje na derivaci podle prostorové proměnné.

V případě **sendvičových materiálů** se využívá analogie mezi různými materiálovými vztahy, nejčastěji podobnost s Ohmovým zákonem. Tepelný odpor různých částí stěny se chová stejně jako paralelně či sériově zapojené rezistory. Protože teorie elektrických obovodů je dobře prozkoumána, přenáší se vzorce, označení a někdy i terminologie z elektrotechniky do stavební fyziky. Matematické zdůvodnění této analogie mezi různými materiálovými vztahy je, že se vždy jedná o **lineární aproximaci reálné reakce materiálu** na vnější podněty.

Rovnice vedení tepla v 1D

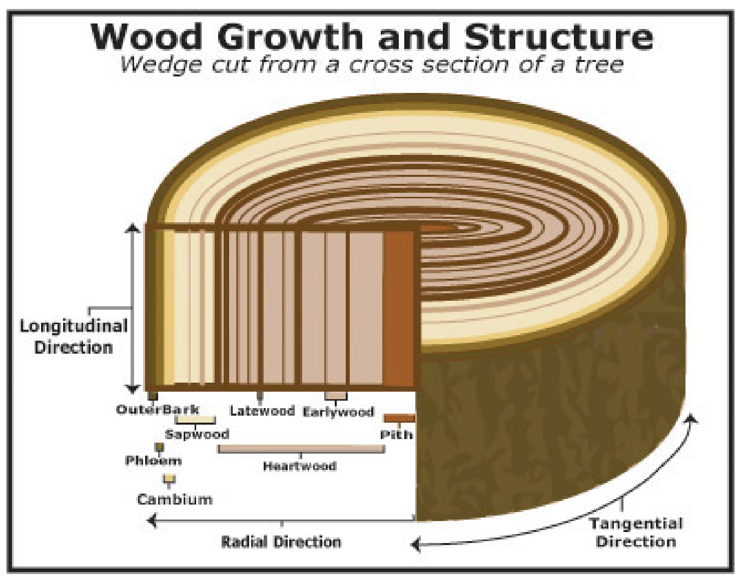
Rovnice vedení tepla je model zahrnující efekt nerovnoměrného rozdělení teploty (dává do pohybu teplo podle Fourierova zákona) a změny v intenzitě toku tepla (například zeslabení toku tepla znamená, že energie se ukládá do materiálu a to se projeví se změnou teploty v daném místě). V jednodimenzionálním povedení umožňuje modelovat **prostup tepla stěnou**, například **postupné ohřívání stěny** a její vyrovnávání se s okolními podmínkami.

Rovnice vedení tepla dokáže modelovat nestacionární děj. Proto je možné ji použít například k výpočtu vlivu **akumulační příčky** na tepelnou pohodu ve dřevostavbě, což může ovlivnit jednu z nevýhod dřevostaveb (velmi malá akumulace), případně zlepšit pohodu v permanentně přehřátých podkrovních bytech.

Rovnice vedení tepla ve 2D nebo 3D

Rozšíření rovnice vedení tepla pro vícerozměrný případ. Umožňuje zmapovat tok tepla a teplotu při proudění energie v krajině, ve městě, v konstrukčním prvku dřevostavby. Tím je možné analyzovat například vliv **tepelných ostrovů v krajině**, nebo vliv **zeleně na teplotní komfort ve městech**.

Hookův zákon pro ortotropní a anizotropní materiál



Obrázek 4: *Anatomické směry dřeva výrazně determinují vlastnosti v jednotlivých směrech. V podélném směru je podstatně vyšší pevnost (modul pružnosti), ale i součinitel tepelné vodivosti a difuzní koeficient. V příčných směrech je vyšší například koeficient bobtnání. Zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Wood_growth_ill.jpg*

- Napjatost a deformaci a v jednotlivých směrech vyjadřujeme tenzorem napětí a tenzorem deformace. Tenzory jsou z matematického hlediska matice, na které jsou naloženy jisté další podmínky (transformují se tak, aby dávalo smysl ve fyzice).
- Na rozdíl od 1D nebo izotropního případu má materiál více parametrů: moduly pružnosti v tahu/tlaku/smyku pro jednotlivé směry a způsoby namáhání, což jsou ve 3D tři směry a tři roviny pro smykové namáhání. Dále Poissonova čísla dávající do relace namáhání v jednom směru a odezvu v jiném směru.
- Využíváme maticový součin a matici rotace. Díky nim umíme transformovat napětí do otočených souřadnic: posouzení namáhání lepených šikmých spojů, namáhání trhlin. Transformace se provádí nasobení maticí rotace z jedné strany a inverzní maticí z druhé strany. Všimněte si, že u komutativní operace by takový postup neměl vůbec smysl: odpovídalo by to například násobení pěti a jednou pětinou - operace by se vyrušily. Díky komutativitě však k vyrušení nedojde a máme k ruce nástroj na transformaci tenzorů, například působících napětí.
- Podobně je možno formulovat tenzorově i další materiálové vztahy: Fourierův zákon, Darcyho zákon.
- Matice vyjadřující materiálové vlastnosti jsou diagonální, pokud jsou souřadné osy zvoleny ve vlastních směrech. U ortotropních materiálů jsou tyto vlastní směry určeny rovinami symetrie. U dřeva se jedná o anatomické směry dřeva (podélný, radiální, tangenciální).

Rovnice exponenciálního růstu/poklesu

Mnoho dějů spějících k rovnováze probíhá rychlostí úměrnou vzdálenosti od rovnovážného stavu. Příkladem je Newtonův zákon ochlazování nebo von Bertalanffyho model růstu. To vede k tomu, že měnící se veličina se k rovnovážnému stavu přibližuje. Tím klesá vzdálenost od rovnovážného stavu a rychlost růstu se zpomaluje. Přesná analýza (vyřešení příslušné diferenciální rovnice) ukazuje, že veličina se blíží asymptoticky k rovnovážné poloze a vydálenost od rovnovážné polohy klesá jako klesající exponenciální funkce (exponenciální funkce $y = e^{-kx}$ kde $k > 0$).

Naopak růst úměrný množství je, na rozdíl od předešlého, prudký a stále se zrychluje. Tento růst je exponenciální ($y = e^{kx}$, kde $k > 0$), pro malé hodnoty roste pomalu, ale později je velmi prudký. Exponenciální funkce roste nejrychleji ze všech základních elementárních funkcí. Například ani mocnina se sebevětším exponentem neroste tak rychle. Nepříliš známým ale nám blízkým zařízením ilustrujícím rychlost růstu exponenciální funkce je třecí brzda níže.

Obrázek 5: *Příklad konvergence ke stacionárnímu stavu rychlostí úměrnou vzdálenosti od tohoto stacionárního stavu. Právě zalité kafe se ochladí o prvních pět stupňů rychle, protože je velký rozdíl mezi teplotou nápoje a okolí. Tepelná výměna je proto intenzivní. Jak se teploty slibžují, rychlost klesá.*

Capstan equation – třecí pásová brzda, spouštěcí buben

Lano se omotává okolo válce a třením se brzdí. Efekt je velmi silný protože růst tahu je úměrný tomuto tahu.

- Omotáním lana o čtvrtotočku na dřevěném kůlu dosáhneme silného brzdícího účinku.
- Omotáním lana o půlotočku dosáhneme ještě násobně většího brzdícího účinku ve srovnání se čtvrtotočkou, vyzkoušejte si.
- Omotáním okolo dřevěného kůlu dvakrát ubrzdíme prakticky cokoliv, co nevyvrátí tento kůl nebo nepřetrhne lano.

Při použití hladkého válce je potřeba více otáček – například capstanová brzda v jachtingu nebo spouštěcí buben v arboristice. Efekt funguje stejně, jenom exponenciální funkce roste s nižším koeficientem v exponentu.

Rovnice ohybové čáry nosníku, kvadratický moment průřezu

Bude doplněno.

Thiemova rovnice

Bude doplněno.

Obrázek 6: *Třecí brzda jako spouštěcí buben. Dostatečné obtočení lana okolo tyče způsobí, že s malou námahou udržíme obrovskou sílu. Zdroj: https://www.skyman.cz/nabidka/arboristika/spousteni-bremen/bubny-a-kotvy/spousteci-buben-tu100-2-popruhy-2958.html*

Vedení tepla v mezikruží

Bude doplněno.

Rovnice podzemní vody

Rovnice podzemní vody je obecná difuzní rovnice specifikovaná pro podzemní vodu. Je v ní započtena dynamika v čase a Darcyho zákon (viz výše). Díky tomu dokáže modelovat časový vývoj hladiny podzmení vody a proudění při různých scénářích čerpání, zasakování, budování vodních děl. Ve velkém měřítku je použitelná pro pochopení funkce vody v krajině. V malém měřítku pro posouzení vlastností studny nebo pro ochranu budov a výkopů před spodní vodou.

Difuzní rovnice

Bude doplněno.

Buckinghamův pí teorém

Fyzikální zákony jsou invariantní vůči změně jednotek. Fyzikálním procesům je jedno, jestli je měříme v metrech nebo

Obrázek 7: *Model Janáčkova kulturního centra v měřítku 1:10. Zdroj: https://ct24.ceskatelevize.cz/regiony/*

v milimetrech. Z tohoto principu vychází rozměrová analýza a její zdokonalení - Buckinghamův pí teorém. Tato technika umožňuje například předpovědět, jak se budou systémy chovat při změně měřítka. Jako aktuální praktické využití uveďme, že v létě 2021 jsme v Brně hostili na výstavišti model koncertní haly v měřítku 1:10 k ověření akustických vlastností budoucí stavby. Změna měřítka má vliv na parametry, přesně podle Buckinghamova teorému. To bylo nutno zohlednit při měření. Konkrétně, bylo nutno desektrát urychlit čas, tj. v praxi použít desetinásobek frekvence zvuku. To si vynutilo další opatření: při vysokých frekvencích by se negativně projevovaly vodní páry a proto bylo nutno je z modelu vytěsnit, což se udělalo natlakováním dusíkem. Další metoda jak se vyrovnat s menšími rozměry bez změny frekvence by mohla spočívat v naplnění médiem, ve kterém se zvuk šíří desetkrát pomaleji než ve vzduchu. Toto je pro použití problematičtější, ale i to by byla cesta. Tato cesta je chybně zmíněna v odkazované reportáži.

Okrajová podmínka v rovnici vedení tepla

Bude doplněno.

Numerické řešení rovnic vedení tepla, difuze, strukturální analýza

Rovnice vedení tepla, difuzní rovnice nebo rovnice popisující reakci na mechanické namáhání pěkně zachycují fyzikální princip děje, ale není praktické je řešit analyticky. Analytické řešení je známo pro jednoduché množiny, typu kruh, obdélník, krychle. Stačí mít netriviální oblast a je nemožné či nepraktické rovnici řešit. Používá se **numerické řešení** kombinace několika technik.

- Převod derivací pomocí konečných diferencí na algebraické výrazy používající čtyři základní aritmetické operace.
- Použití konečných diferencí vede k aproximaci úlohy lineárním systémem a řešení tohoto systému dává dobrý odhad řešení původní úlohy. Řádově desítky tisíc rovnic.
- Pokud materiálové vztahy nejsou lineární, je výsledný systém nelineární. Řeší se například vícerozměrnou modifikací Newtonovy iterační metody.
- Zpravidla je celý proces řešení plně automatizovaný a uživatel nakreslí nebo naimportuje geoemtrii úlohy,

Integrální střední hodnota

Obrázek 8: *Optimální pohyb běžce je takový, aby nedocházelo k výkyvům v poloze těžiště. Těžište hledáme tak, že zprůměrujeme souřadnice všech bodů. Protože však tělo má spojitě rozloženou hmotnost a bodů je nekonečně mnoho, musíme tento průměr chápat ve smyslu integrální střední hodnoty. Zdroj: pixabay.com, autor RoonZ-nl*

Vypočítat aritmetický průměr, hodnotu ležící z určitého úhlu pohledu uprostřed mezi zadanými hodnotami umíme už ze základní školy a používáme v běžném životě (průměrná známka na vysvědčení, průměrný měsíční plat atd.). Někdy však potřebujeme vypočítat průměr spojitě rozložených hodnot. Například těžiště trojúhelníka nebo soustavy hmotných bodů vypočítáme právě aritmetickým průměrem. Co ale s případem, kdy je průměrovaná veličina rozložena spojitě na úsečce, na dvojrozměrné množině v rovině, nebo v tělese v prostoru? V takových případech je nutno počítat průměr pomocí integrálu a takový průměr se nazývá integrální střední hodnota.

- Střední hodnotu funkcí rozložených spojitě na přímce ukazují například měřící přístroje u rychle se měnících veličin. Uvažujme napětí v zásuvce na 230V jako funkci času. Toto napětí se při frekvenci střídavého proudu 50Hz mění padestkrát za sekundu a voltmetr nemá šanci na tyto změny reagovat. Ukazuje zprůměrovanou hodnotu ve smyslu integrální střední hodnoty. (V tomto případě se uvažují výkonové účinky a proto se ve skutečnosti průměruje druhá mocnina napětí a ta se poté zpět odmocní, ale to je v tuto chvíli technický detail.) Pokud chceme okamžitý průběh napětí, musíme použít úplně jiný přístroj - osciloskop. Na něm uvidíme, že napětí se mění cca padesátkrát za sekundu a v některých okamžicích je nad hodnotou 230V, v jiných zase pod ní. To nás ale většinou nezajímá, my potřebujeme průměr, tj. střední hodnotu, což je v Evropě 230V.
- Střední hodnota na dvourozměrné množině definuje těžiště této množiny. To je důleřité z technického hlediska. Například znalost těžiště obrazce, který je průřezem nosníku, umožní po zatížení nosníku identifikovat části nosníku namáhané tahem a části namáhané tlakem. Neutrální osa totiž prochází těžištěm. To je u symetrických obrazců uprostřed. Proto také neutrální osa prizmětického nosníku s průřezem ve tvaru obdélníka je uprostřed. Podobně to platí pro válcové nosníky, například šatní tyče. U složitějších nosníků však situace není na první pohled tak jasná a je nutné stanovit polohu těžiště. V případě těžiště dvourozměnrné množiny dvojným integrálem.
- Tělesa se v mnoha případech pohybují tak, jako by byla jejich hmotnost soustředěna v těžišti. Nejhladší pohyb je přímočarý a proto je například pro běžce nejvýhodnější zvolit takový styl běhu, při kterém se těžiště příliš nevychyluje nahoru/dolů nebo do stran.

Hydrostatická síla na stěnu

Hydrostatická síla na rovinnou stěnu je součinem tlaku a obsahu. Toto však je možné použít jenom v případě, že tlak je ve všech místech stěny stejný. Takový předpoklad nebývá splněn u ploch položenýc napříč různými hloubkami. V takovém případě je nutno celkovou sílu na stěnu vypočítat dvojným integrálem, který v podstatě nejprve rozdělí nekonečně jemně celou plochu tak, aby se vliv různých tlaků v různých místech zohlednil a poté všechny příspěvky poscítá do celkové síly.

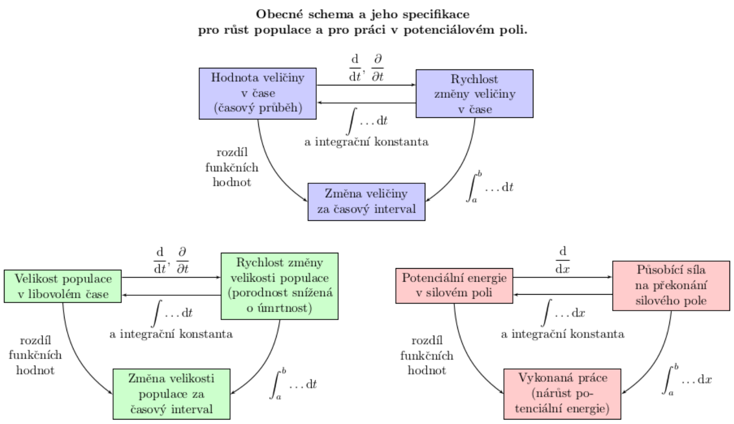
Protože je úloha prakticky zajímavá a často se věnujeme jenom jejím speciálním případům, vznikla řada pouček, jak se vyrovnat s vlivem nestejné hloubky i bez dvojného integrálu. Například metoda zatěžovacího obrazce nebo využití těžiště. Tyto metody však mají své limity a jsou speciálním případem obecného postupu založeného na dvojném integrálu. Přístup využívající dvojný integrál také přirozeně zahrnuje i méně časté situace, kdy je stěna šíkmo nebo kdy je celá stěna ponořena do určité hloubky (například výpusť pod hladinou). V takovém případě není nutné se učit speciální poučky jak tyto efekty započíst do inženýrských metod typu metoda zatěžovacího obrazce, ale tyto požadavky se stávají integrální součástí výpočtu.

Čísla a funkce

- K měření množství čehokoliv potřebujeme *čísla*.
- K vyjadřování vztahů mezi dvěma nebo více veličinami potřebujeme *funkce*.
  - Rostou obě veličiny současně? *rostoucí funkce*
  - Je růst jedné veličiny spojený s poklesem druhé? *klesající funkce*

– Lze z výstupu funkce zrekonstruovat vstupní data? Jak? *prostá funkce*, *inverzní funkce*

Derivace



Obrázek 9: *Vzájemné souvislosti derivace a dvou integrálů.*

K měření rychlosti změn potřebujeme *derivace*.

- Derivace veličiny podle času udává rychlost změny veličiny v čase.
- Derivace veličiny podle prostorové souřadnice (jednorozměrný gradient) udává rychlost změny veličiny ve směru příslušné prostorové osy.
- Vektor z derivací veličiny podle prostorových souřadnic (vícerozměrný gradient) udává směr a rychlost změny veličiny.

První dvě operace jsou vlastně totéž, jenom pro jinou nezávislou proměnnou a umíme je i obrátit. Pro tyto potřeby jsme zavedli pojem integrál. Třetí operaci (kdy je zadaný gradient a máme najít původní funkci) se naučíme obrátit pomocí křivkového integrálu druhého druhu, pokud se spolu setkáme v předmětu Aplikovaná matematika v navazujícím studiu.

Symbolicky zapsáno, platí $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$, kde $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)$ tj. $F'(t) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = f(t)$.

Lineární aproximace

Vstup: $y = f(x)$, $x = x_0$ *Výstup:* Aproximace funkce $f(x)$ v okolí bodu x_0 přímkou.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Výraz $f'(x_0)$ je změna funkce f vyvolaná jednotkovou změnou proměnné x
- Výraz $x - x_0$ je změna ve vstupních datech, pokud hodnotu x_0 změníme na x
- Výraz $f'(x_0)(x - x_0)$ je odhad změny funkce f, pokud hodnotu x_0 změníme na x

Využití:

a) **Konstitutivní zákony** v 1D, kdy bereme $x_0 = 0$ a $f(x_0) = 0$.

$$f(x) \approx 0 + f'(0)(x - 0) = kx$$

b) **Newtonova metoda** používá aproximaci pro $x_0 = x_n$, $x = x_{n+1}$ a $f(x_{n+1}) = 0$, tj.

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

a odsud

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

c) **Konstitutivní zákony ve 2D a 3D,** kdy rozšiřujeme zákon z 1D do vícerozměrného vztahu mezi vektory

$$\vec{j} = A\vec{q},$$

kde $\vec{j}$ je tok, A symetrická matice a $\vec{q}$ podnět vyvolávající tok $\vec{j}$. V tomto případě nás zajímají vlastní směry jako neulové vektory splňující

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}$$

pro vhodné reálné číslo λ. Pokud jsou vlastní směry v souřadnicových osách, je matice A diagonální a v diagonále jsou její vlastní čísla.

Diferenciální rovnice

Pokud neznám časový průběh veličiny ani její rychlost, ale vím, jak spolu hodnoty veličiny s rychlostí souvisí, příslušným matematickým modelem je diferenciální rovnice.

- Obecná diferecnciální rovnice prvního řádu je
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y,t),$$
my jsme se naučili řešit dvojí integrací rovnice se separovanými proměnnými ve tvaru
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)g(t).$$
- Diferenciální rovnice tvaru
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)$$
má monotonii řešení dánu znaménkem pravé strany a odsud mohu posoudit i stabilitu konstantních řešení.

- Diferenciální rovnice tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y) - g(y)$$

je stejného typu jako předchozí rovnice a monotonie řešení stabilita vyplyne ze vzájemného srovnání obou funkcí na pravé straně.

Transportní děje

Tento přístup používáme v situacích, kdy rychlost změny veličiny souvisí se změnami v toku, který tuto veličinu přenáší.

Celkovou bilanci je možno vyjářit vztahem dávajícím do relace rychlost akumulace stavové veličiny a součet přírůstku ze zdrojů s přírůstkem díky toku.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot \vec{j}$$

- Výraz $\vec{j}$ vyjařuje tok (přesněji hustotu toku).
- Výraz $\nabla \cdot \vec{j}$ vyjadřuje nárůst hustoty toku, tj. jeho zesílení v daném místě.
- Výraz $-\nabla \cdot \vec{j}$ vyjadřuje pokles hustoty toku, tj. jeho zeslabení toku v daném místě.

Celková bilance se nazývá rovnice kontinuity.

Od gradientu k toku

Gradient vyjadřuje směr a intenzitu růstu skalární veličiny. Tok je iniciován záporně vzatým gradientem (směr a intenzita poklesu).

Od záporně vzatého gradientu k toku nás odvedou konstitutivní zákony. Tyto umíme formulovat v jedné i více dimenzích a zpravidla je formulujeme v lineární aproximaci.

Tok je vyvolán nerovnoměrnostmi v prostorovém rozložení veličiny, tj. *gradientem*.

Jedna dimenze

V 1D je nárůst vyjádřen prostorovou derivací $\frac{\partial u}{\partial x}$ (jednorozměrný gradient) a pokles výrazem $-\frac{\partial u}{\partial x}$ (záporně vzatý jednorozměrný gradient). Tok je

$$\vec{j} = -k\,\frac{\partial u}{\partial x},$$

kde k je reálná konstanta.

Více dimenzí

- Ve 2D a 3D je nárůst vyjádřen gradientem $\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \vdots \end{pmatrix}$ a pokles záporně vzatým gradientem $-\nabla u$. Tok je

  $$\vec{j} = -D\nabla u,$$

  kde D je 2×2 nebo 3×3 matice.

Difuzní rovnice

Difuzní rovnice vznikne spojením rovnice kontinuity

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot \vec{j}$$

a konstitutivního zákona

$$\vec{j} = -D\nabla u,$$

do jedné rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot (-D\nabla u)$$

tj.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \nabla \cdot (D\nabla u)$$

a) Transport vázané vody ve dřevě, kdy hustotou stavové veličiny je koncentrace vody a rovnice je bezzdrojová, tj.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla u)$$

b) Transport energie vedením tepla, kdy hustotou stavové veličiny je hustota energie (entalpie), platí

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \sigma = 0$$

$$\vec{j} = -k\nabla T$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k\nabla T)\,.$$

Numerická aproximace

1. Rovnice, viz Newtonova metoda.
2. Derivace aproximujeme pomocí dvou nebo tří po sobě jdoucích hodnot.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Při použití v rovnici vedení tepla nebo v difuzní rovnici vede na soustavu lineárních rovnic $AX = B$. Tato soustava může být velká (stovky rovnic a proměnných) a je velmi řídká (v každé rovnici několik málo neznámých). Proto řešíme numerickými metodami odvozenými pro tyto typy soustav.

3. Integrál můžeme aproximovat lichoběžníkovou metodou jako obsah pod lomenou čarou.
4. Diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y, t)$$

můžeme aproximovat podobně jako ve druhém případě, ale s výhodou, že rovnice se dají řešit postupně od počáteční podmínky dopředu nebo dozadu.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + f(y_n, t_n)h \\ t_{n+1} &= t_n + h \end{aligned}$$