

Matematika

Robert Mařík

26. ledna 2023

Obsah

1 Derivace	4
Funkce	4
Přípravné úvahy pro zavedení derivace	6
Derivace	8
Aplikace derivací 1: Jak rychle? (změna v čase)	9
Aplikace derivací 2: Jak strmě? (změna v prostoru)	11
Výpočet derivace	11
Funkce více proměnných	12
Rovnice vedení tepla v 1D	13
Shrnutí, hlavní myšlenky	14
2 Derivace a lineární aproximace	16
Aplikace derivací 3: Jak citlivě? (reakce na změnu)	16
Lineární aproximace	17
Lineární aproximace a jednorozměrné materiálové vztahy	18
Aproximace vyššího řádu	19
Konečné diference a numerická aproximace derivace	21
Odbočka: od vazeb mezi atomy k materiálovým vlastnostem	21
Řešení rovnic	22
Shrnutí, hlavní myšlenky	24
3 Derivace a další užitečné nástroje	25
Parita funkce	25
Lokální extrémy	27
Postačující podmínka pro lokální extrém	28
Odbočka: triky pro práci s funkcemi 1	29
Buckinghamův II-teorém	30
Vektorové funkce, gradient	31
Shrnutí, hlavní myšlenky	32
4 Integrál, integrál a integrál	33
Neurčitý integrál	33
Určitý integrál (Newtonův)	35
Určitý integrál (Riemannův)	37
Shrnutí, hlavní myšlenky	40
5 Integrály pro pokročilé	41
Vlastnosti integrálu	42
Střední hodnota	43
Výpočet práce pomocí integrálu	43
Numerická aproximace určitého integrálu	44
Integrace substituční metodou	45

Integrál jako funkce meze	46
Příklad: řetěz jinak (pomocí změny potenciální energie)	47
Shrnutí, hlavní myšlenky	47
6 Diferenciální rovnice	49
Motivace	49
Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu	50
Modely využívající diferenciální rovnice	51
Geometrická interpretace a transformace jednotek	53
ODE tvaru $\frac{dy}{dx} = f(y)$, autonomní ODE	54
ODE tvaru $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ (rovnice se separovanými proměnnými)	55
Diferenciální rovnice vyšších řádů	57
Diferenciální rovnice metodou konečných diferencí	57
Shrnutí, hlavní myšlenky	58
7 Lineární algebra (operace s vektory a maticemi)	59
Vektory	59
Pootočení vektoru	62
Matice	62
Aplikace maticového součinu 1/3	63
Aplikace maticového součinu 2/3	63
Aplikace maticového součinu 3/3: matice jako zobrazení, tenzory	65
Vlastní čísla a vlastní vektory	67
Transponovaná matice	68
Tenzor malých deformací	68
Rozložení teploty na tepelně vodivé desce	69
Shrnutí, hlavní myšlenky	70
8 Lineární algebra (inverzní matice a determinanty)	71
Inverzní matice	71
Matice přechodu	72
Zobrazení v různých soustavách souřadnic	73
Praktická aplikace: transformace tenzoru	73
Obecné vzorce pro transformaci tenzoru	74
Role vlastních vektorů při transformaci matic	75
Transformace symetrické matice na diagonální tvar	75
Determinant matice	76
Determinant matice 2×2 (křížové pravidlo)	76
Determinant matice 3×3 (Sarusovo pravidlo)	76
Determinant matice ve schodovitém tvaru	76
Souvislost některých pojmů	77
Hookův zákon, matice tuhosti a poddajnosti	77
Vlastní vektory matice a matice inverzní	78
Shrnutí, hlavní myšlenky	79
9 Lineární algebra (soustavy lineárních rovnic, transformace tenzorů)	80
Variety zápisu soustavy lineárních rovnic	80
Soustava lineárních rovnic	80
Vektorový zápis soustavy lineárních rovnic	81
Maticový zápis soustavy lineárních rovnic	81
Využití inverzní matice pro řešení soustavy lineárních rovnic	81
Inverzní matice k diagonální matici	82
Iterační metoda řešení soustav lineárních rovnic	82

Hodnost matice	83
Výpočet hodnoti	83
Existence a jednoznačnost řešení soustavy lineárních rovnic	83
Gaussova eliminace	84
Gaussova-Seidelova iterační metoda	85
Shrnutí, hlavní myšlenky	85
10 Vektorová pole, tok, zákony zachování	86
Připomenutí derivací	86
Transportní jevy	86
Tok a gradient v konstitutivních zákonech	87
Vícerozměrné konstitutivní zákony	87
Speciální případy vztahu mezi gradientem a tokem	88
Divergence	89
Výpočet gradientu a divergence	90
Rovnice kontinuity	90
Rovnice mělké vody	91
Proudění tekutiny v mechanice kontinua	91
Difuzní rovnice	92
Vedení tepla	92
Voda v porézním materiálu	93
Rovnice podzemní vody	93
Rovnice vedení tepla ve 2D v různých podmínkách	94
Umění identifikace předpokladů z tvaru difuzní rovnice	94
Shrnutí, hlavní myšlenky	95
Shrnutí více matematickou formou	95
Praktická aplikace (zajímavost z jiné oblasti než nauky o materiálu)	96
11 Dvojný integrál	98
Motivace	98
Dvojný integrál	98
Linearita a aditivita	98
Výpočet	99
Aplikace dvojného integrálu	100
Shrnutí, hlavní myšlenky	103
12 Vybrané postupy numerické matematiky	104
Numerické řešení diferenciálních rovnic	104
Numerické řešení diferenciálních rovnic ve 2D a 3D	104
Nondimenzionalizace a bezrozměrné veličiny	105
Metoda konečných diferencí	106
Ukázka programu FlexPDE	107

Kapitola 1

Derivace

Motivace.

- Seznámíme se s pojmem derivace funkce. Tento pojem umožňuje u měnící se veličiny určovat, jak rychle se tato veličina mění. Zatímco v případě rovnoměrné změny je problematika rychlosti triviální a řešitelná středoškolskými prostředky, v případě změny jejíž rychlost akceleruje nebo klesá je nutné zapojit zcela nový aparát, nazývaný infinitezimální počet. Derivace je jeho prvním představitelem. S dalším, integrálem, se setkáme později.
- Ze střední školy je student zvyklý na to, že si má osvojit dovednosti, jak se to počítá. Pro nás je však už důležité si uvědomit, že vůbec nějak dokážeme zachytit rychlost změny. Že s tím dokážeme pracovat, že například dokážeme pomocí těchto pojmů naformulovat fyzikální zákony pracující s rychlostmi změn. A věřte či ne, takové jsou skoro všechny. V podstatě celá středoškolská fyzika je postavena na studiu veličin, měnících se konstantní rychlostí. S tím se dá modelovat mnoho dějů okolo nás, ale pro hlubší poznání světa je to žalostně málo. Derivace umožní pracovat s libovolnými rychlostmi změn. Nesoustřeďte se proto na počítání, soustřeďte se na význam a využití. Soustřeďte se na rozpoznání kontextu, ve kterém problematiku studujeme.
- Po přečtení přednášky byste měli mít v hlavě vybudovanou spojnici mezi derivací a rychlostí. Pokud se ve slovním popisu děje mluví o rychlosti, v matematickém modelu tato rychlost figuruje prostřednictvím derivace.

https://youtu.be/yMcaw_J6MKE

Funkce

<https://youtu.be/eNOiuvZ8sas>

Při hlubším než povrchním studiu libovolného systému nás zajímají veličiny spojené se studovaným problémem a vztahy mezi těmito veličinami. Tyto vztahy jsou zprostředkovávány funkcemi. Jako příklad si představme nosník vetknutý do

země a na konci zatížený vodorovnou silou F . Deformace nosníku δ na konci (skalární veličina) souvisí s velikostí zatěžující síly (skalární veličina). Pro studium problému je vhodné mít převodní pravidlo, které pro každé zatížení udává deformaci. Toto pravidlo bude z matematického úhlu pohledu funkce (funkce jedné proměnné). Může mít například formu

$$\delta = \frac{1}{k}F,$$

kde k je konstanta pro daný nosník (tuhost).

Na řadu použití stačí intuitivní chápání funkce i jejích vlastností. Někdy je však potřeba si myšlenky zpřesnit a plně formalizovat. V následujícím představíme definici funkce, rozdělíme funkce na rostoucí, klesající a ostatní a ukážeme si využití těchto vlastností.

Funkce jedné proměnné

Definice (funkce jedné proměnné). Budte A a B neprázdné podmnožiny množiny reálných čísel. Pravidlo f , které každému prvku množiny A přiřadí jediný prvek množiny B se nazývá *funkce* (přesněji: *reálná funkce jedné reálné proměnné*). Zapisujeme $f : A \rightarrow B$. Skutečnost, že prvku $a \in A$ je přiřazen prvek $b \in B$ zapisujeme $f(a) = b$. Přitom říkáme, že b je *obrazem prvku* a při zobrazení f , resp. že a je *vzorem prvku* b při zobrazení f .

Poznámka (terminologie). Množina A z definice funkce se nazývá *definiční obor funkce* f . Označujeme $D(f)$ (resp. $\text{Dom}(f)$). Je-li M podmnožina definičního oboru, definujeme množinu $f(M)$ jako množinu všech obrazů bodů množiny M . Množina $f(\text{Dom}(f)) = B$ se nazývá *obor hodnot funkce* f . Označujeme $H(f)$ (resp. $\text{Im}(f)$).

Je-li $y = f(x)$ nazýváme proměnnou x též *nezávislou proměnnou* a proměnnou y *závislou proměnnou*. *Grafem* funkce rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ s vlastností $y = f(x)$.

Přímá a nepřímá úměrnost

Je to až k nevíře, ale k popisu obrovského množství dějů stačí čtyři základní operace: sčítání, odčítání, násobení a dělení. Vzhledem k požadavku na konzistenci fyzikálních jednotek se nejčastěji setkáváme s násobením a dělením a proto funkce pracující s těmito operacemi mají výsadní postavení. Takový, že si vysloužily pojmenování běžně užívané i mezi nematematiky: přímá a nepřímá úměrnost. Je to formální popis situace, kdy souvislost mezi dvěma veličinami je zprostředkována násobením konstantou (přímá úměrnost), nebo kdy je násobením konstantou zprostředkována souvislost mezi jednou veličinou a převrácenou hodnotou druhé veličiny.

Definice (přímá a nepřímá úměrnost). Veličina y je *přímo úměrná* veličině x jestliže existuje konstanta k taková, že platí

$$y = kx.$$

Veličina y je *nepřímo úměrná* veličině x jestliže existuje konstanta k taková, že platí

$$y = \frac{k}{x}.$$

Poznámka. Je-li veličina y úměrná veličině x , píšeme

$$y \sim x \text{ nebo } y \propto x.$$

Je-li navíc konstanta úměrnosti blízká jedničce, tj. x a y jsou blízké, píšeme

$$y \approx x.$$

Pro nepřímou úměrnost píšeme podobně $y \sim \frac{1}{x}$, $y \propto \frac{1}{x}$ a $y \approx \frac{1}{x}$ s využitím toho, že nepřímá úměrnost je vlastně přímá úměrnost pro převrácenou hodnotu.

Příklad.

- Při pohybu konstantní rychlostí je dráha s úměrná času t . Příslušnou konstantou úměrnosti je rychlost v , tj. $s = vt$. Pro $t = 1$ je dráha s přímo rovna konstantě úměrnosti v . Proto můžeme konstantu úměrnosti reprezentovat jako dráhu za jednotku času. Takto rychlost i chápeme a v tomto smyslu čteme i její jednotku. Nečteme “kilometrů lomeno hodin” ale “kilometrů za hodinu”.
- Při pohybu po předem stanovené dráze s je čas nepřímou úměrný rychlosti v . Platí $t = \frac{s}{v}$. Konstantou úměrnosti je dráha s . Pro $v = 1$ je čas přímo roven dráze. Proto je možno konstantu úměrnosti slovně vyjádřit tak, že udává čas, který je nutný pro projetí příslušné dráhy jednotkovou rychlostí.

- Při periodickém pohybu je frekvence f nepřímo úměrná periodě T . Příslušnou konstantou úměrnosti je jednička, tj. $f = \frac{1}{T}$.
- Objem V koule o poloměru r je přímo úměrný třetí mocnině poloměru. Existuje tedy konstanta k taková, že platí $V = kr^3$. Pro $r = 1$ je objem V přímo roven konstantě k . Konstanta proto k vyjadřuje objem koule jednotkového poloměru. Protože objem koule jednotkového poloměru je $\frac{4}{3}\pi$ učí se žáci v matematice rovnou vzorec $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
- Dynamická odezva stromů ve větru je častým námětem mnoha vědeckých prací. Souhrnná studie [Jackson, T. et al \(2021\) The motion of trees in the wind: a data synthesis. Biogeosciences.](#) tvrdí, že v některých případech (zpravidla listnáče v lese) je základní frekvence vlastních kmitů stromů nepřímo úměrná odmocnině výšky, což je vztah známý pro kyvadlo.

$$f = \frac{1}{T} \sim \frac{1}{\sqrt{H}}.$$

U jiných stromů (zpravidla jehličnaté stromy) je základní frekvence přímo úměrná průměru d a nepřímo úměrná druhé mocnině výšky H , tj.

$$f = \frac{1}{T} \sim \frac{d}{H^2}.$$

Tento vztah je znám pro nosníky. To ukazuje, že pro některé stromy je pro dynamické vlastnosti dominantní hmota v koruně, pro jiné stromy hmota podél kmene.

- Síla působící na těleso ve vzdálenosti r od planety je dána vztahem $F = \frac{k}{r^2}$, kde k je konstanta úměrnosti (závislá na hmotnosti planety i tělesa). Toto můžeme slovně vyjádřit tak, že síla je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti. Pro r rovno jedné je síla F přímo rovna konstantě k . Konstanta úměrnosti k proto udává sílu působící na těleso v jednotkové vzdálenosti od planety.

Monotonie funkce

V následující definici jsou nejdůležitější pojmy rostoucí a klesající funkce. Názorně řečeno, jsou to funkce které zachovávají (rostoucí) nebo obracejí (klesající) směr nerovnosti při aplikaci funkce na obě strany nerovnice.

Definice (monotonie funkce). Necht f je funkce a $M \subseteq \text{Dom}(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f .

- Řekneme, že funkce f je na množině M *rostoucí* jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ s vlastností $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- Řekneme, že funkce f je na množině M *klesající* jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ s vlastností $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.
- Řekneme, že funkce f je na množině M (*ryze*) *monotonní* je-li buď rostoucí, nebo klesající na M .

Nespecifikujeme-li množinu M , máme na mysli, že uvedená vlastnost platí na celém definičním oboru funkce f .

Poznámka (monotonie z hlediska řešitelnosti nerovnic). Je-li funkce f rostoucí nebo klesající, je i prostá a nerovnice uvedené v předchozí definici jsou dokonce ekvivalentní. Můžeme tedy na obě strany nerovnice aplikovat tutéž rostoucí funkci, nebo rostoucí funkci z obou stran nerovnice vynechat.

- Je-li f rostoucí, platí

$$x_1 \leq x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2).$$

- Je-li f klesající, platí

$$x_1 \leq x_2 \iff f(x_1) \geq f(x_2).$$

- Stejně vztahy platí i pro ostré nerovnosti.

Tyto poučky použijeme vždy, když rozvažujeme, zda můžeme k oběma stranám nerovnice přičíst stejné číslo (můžeme), zda můžeme obě strany nerovnice vynásobit stejným nenulovým číslem (můžeme, ale pokud násobíme záporným číslem, obrací se směr nerovnosti), zda můžeme obě strany nerovnice logaritmovat logaritmem o stejném základě (můžeme, ale v případě logaritmu a základě menším než 1 se obrací směr nerovnosti), umocnit (nemůžeme, leda bychom měli dodatečnou informaci například o tom, že obě strany nerovnice jsou kladné nebo obě strany nerovnice jsou záporné) apod. Takových situací je mnoho a protože není v lidských silách si všechny pamatovat, stačí je míst spojeny s definicí rostoucí a klesající funkce.

Příklad (užitečnost monotonie při práci s nerovnicemi). Funkce $\ln x$ a \sqrt{x} jsou rostoucí a proto z nerovnic

$$\ln x > \ln 6$$

a

$$\sqrt{x} > \sqrt{6}$$

plyne

$$x > 6.$$

Zejména v druhém případě je nutné si uvědomit, že použijeme definici rostoucí funkce a skutečnost, že nezápornost obou stran nerovnice zajišťuje, že pracujeme na intervalu kladných hodnot x , kde je druhé mocnina rostoucí funkce. Nestačí říct, že umocňujeme obě strany nerovnice, jak by někdo mohl tento krok dezinterpretovat. Umocněním obou stran nerovnice se obecně může změnit obor pravdivosti, proto tato operace u nerovnic není povolena. Na celém svém definičním oboru totiž druhá mocnina rostoucí není.

Příklad (nerovnice obsahující nemonotonní funkce).

Funkce $\frac{1}{x}$ a $y = x^2$ nejsou ani rostoucí ani klesající a proto z žádné z nerovností

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$$

a

$$x^2 \leq 5^2$$

neplyne ani $x \leq 5$ ani $x \geq 5$. Tento příklad ukazuje, že nerovnice obsahující nemonotonní funkce jsou v obecném případě složitější, protože nemůžeme speciálních vlastností monotonních funkcí. Někdy však není nutné pracovat na celém definičním oboru, ale je možno definiční obor zúžit na množinu, kde funkce již monotonní je. Například funkce \sqrt{x} nabývá nezáporných hodnot a funkce $\frac{1}{x}$ je klesající na $(0, \infty)$. Proto z nerovnosti

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{5}$$

plyne

$$\sqrt{x} \geq 5 = \sqrt{25}.$$

Druhá mocnina je na intervalu $(5, \infty)$ rostoucí a proto odsud plyne dále

$$x \geq 25.$$

Přípravné úvahy pro zavedení derivace

<https://youtu.be/e4bnDYi5nkc>

Průměrná rychlost a okamžitá rychlost

Průměrnou rychlost určujeme tak, že změnu sledované veličiny přepočteme na jednotku času (u závislosti na čase), délky (u závislosti na poloze) nebo obecně na jednotku veličiny, na které sledovaná veličina závisí.

Průměrná rychlost s jakou se mění funkce f na intervalu $[x, x+h]$ je dána vztahem

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Průměrná rychlost pracuje jenom s informací v koncových bodech intervalu a proto bohužel neobsahuje informaci, co přesně se děje uvnitř intervalu, přes který průměrujeme. Počítáme-li ale průměr přes stále kratší interval, nevýhoda průměrné rychlosti mizí. Cílem je počítat průměr přes interval prakticky nerozlišitelný od nuly. To by dalo okamžitou rychlost. **Numerický experiment** ukazuje, že u některých funkcí toto funguje pěkně, u některých bohužel ne.

Pokud průměrujeme za stále kratší čas, čísel i jmenovatel se blíží k nule a jsou potíže s interpretací zlomku. Nulou totiž není možné dělit. Musíme vytvořit koncept, který umožní sledovat, co se děje s funkčními hodnotami funkce, pokud se vstupními daty jdeme “na krev” ke kraji definičního oboru. K tomu použijeme pojem limita. Budeme se (zatím) soustředit na tzv. vlastní limitu ve vlastním bodě. Tím se oproti obecnému postupu mnohé usnadní. Zejména pojem limity můžeme opřít o pojem spojitost, který je přece jenom intuitivnější.

Spojitost

Definice spojitosti zavádí jakousi třídu funkcí, které jsou v jistém smyslu pěkné a můžeme pro ně použít postupy, které pro obecné funkce nefungují. Jsou zde funkce, jejichž funkční hodnoty se mění plynule a nemůžou se změnit skokově. Malá změna ve vstupních datech vyvolá malou změnu ve funkčních hodnotách.

Buď $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkce jedné proměnné.

Definice (okolí). *Okolím* bodu x_0 rozumíme libovolný otevřený interval obsahující bod x_0 .

Definice (spojitost). Řekneme, že funkce f je *spojitá* v bodě x_0 jestliže je v tomto bodě definovaná a pro libovolnou předem zadanou toleranci (i extrémně malou) existuje okolí bodu x_0 takové, že všechny body z okolí bodu x_0 mají funkční hodnotu v rámci uvažované tolerance nerozlišitelnou od $f(x_0)$. Řekneme, že funkce f je *spojitá* na otevřeném intervalu, je-li spojitá v každém jeho bodě.

Definice spojitosti sice není zcela názorná, ale následující definice a věta velmi pomůže. Zhruba řečeno vysvětlují, proč si v naprosté většině prakticky využitelných případů můžeme spojitost ověřit jenom tím, že zjistíme, zda je funkce definována.

Definice (elementární funkce). Všechny mnohočleny, goniometrické, cyklometrické, exponenciální a logaritmické funkce a obecná mocnina se nazývají *základní elementární funkce*. Všechny funkce, které ze základních elementárních funkcí získáme konečným počtem operací sčítání, odečítání, násobení, dělení a skládání těchto funkcí navzájem se nazývají *elementární funkce*.

Věta (spojitost elementárních funkcí). *Všechny elementární funkce jsou spojitě v každém vnitřním bodě svého definičního oboru.*

Podobně jako spojitost funkce jedné proměnné je definována spojitost funkcí více proměnných. Zůstane dokonce v platnosti předešlá věta. V naprosté většině základních praktických aplikací vystačíme s popisem pomocí elementárních funkcí a proto jsou funkce, se kterými pracujeme, zpravidla automaticky spojitě. Opatrnost je nutné pouze tam, kde bychom se od elementárních funkcí odchýlili, například při použití nekonečných řad.

Poznámka. Body, v jejichž okolí je funkce ohraničená, ale je zde porušena spojitost, jsou například následující.

skok Na jeho odhalení stačí zvolit toleranci v definici spojitosti menší, než je výška skoku. Například $f(x) = \frac{|x|+x}{2x}$ je jednotkový skok v nule.

odstranitelná nespojitost Tato nespojitost nás zajímá nejvíce. Je to nespojitost, která zmizí pokud vhodně dodefinujeme funkční hodnotu v bodě nespojitosti. Například funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

je spojitá funkce. Vznikla doplněním jedné funkční hodnoty do definice funkce $\frac{\sin x}{x}$, která má odstranitelnou nespojitost v bodě $x = 0$.

Grafy.

Limita

Definici limity opřeme o pojem spojitosti. V podstatě pod limitu skryjeme buď funkční hodnotu spojitě funkce (pokud existuje), nebo hodnotu, která danou funkci učiní spojitou. Můžeme tedy limitu považovat za “nejlepší rozumnou náhradu” funkční hodnoty v tom smyslu, že po předefinování jedné funkční hodnoty se funkce stane spojitou, tj. relativně pěknou.

Definice (limita). Necht f je funkce definovaná v okolí bodu x_0 , s případnou výjimkou bodu x_0 . Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *limitu* rovnou číslu L , jestliže funkce $g(x)$ definovaná vztahem

$$g(x) = \begin{cases} L & x = x_0 \\ f(x) & \text{jinak,} \end{cases}$$

je spojitá v bodě x_0 . Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Velmi stručně řečeno: pokud se nedá nějaké číslo do funkce dosadit přímo, mohlo by to jít pomocí limity. Například funkce

$$\frac{\sin x}{x}$$

není definována v nule. V okolí nuly se však chová v jistém smyslu pěkně: má funkční hodnoty prakticky nerozlišitelné od jedničky, viz graf v odstavci věnovanému spojitosti. Proto platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Derivace

<https://youtu.be/Xh1opdJZy4k>

Teď jsme připraveni (alespoň teoreticky) počítat průměrnou rychlost na intervalu, jehož délka je nerozlišitelná od nuly. Vypočteme průměrnou rychlost na intervalu délky h a poté položíme h rovno nule. Ve smyslu limity, pokud je to nutné.

Bud $y = f(x)$ funkce definovaná na nějakém otevřeném intervalu.

Definice (derivace). *Derivací* funkce f v bodě x rozumíme limitu

$$\frac{df}{dx} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Derivaci funkce f v bodě x_0 označujeme $f'(x_0)$ nebo $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Derivaci v libovolném bodě potom f' , $f'(x)$ nebo $\frac{df}{dx}$. Zápís $\frac{df}{dx}$ je Leibnizova notace, zápís f' je Lagrangeova notace.

Poznámka (slovní interpretace definice derivace).

- Výraz z čitatele, tj. $f(x+h) - f(x)$, je změna veličiny f na intervalu $[x, x+h]$. Často označujeme též Δf .
- Podíl, tj. $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ je změna veličiny f na intervalu $[x, x+h]$ přepočítaná na jednotku veličiny x , tj.

v jistém smyslu průměrná rychlost na tomto intervalu. Často označujeme též $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

- Limita v definici derivace stahuje délku intervalu, na kterém počítáme průměrnou rychlost, k nule. Tím se z průměrné rychlosti stane okamžitá rychlost.

Část definičního vztahu	Slovní interpretace
$f(x)$	funkční hodnota v bodě
$f(x+h)$	funkční hodnota ve vedlejší bodě
$f(x+h) - f(x)$	změna funkce na intervalu $[x, x+h]$
$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	průměrná rychlost změny funkce na intervalu $[x, x+h]$, též změna funkce po přepočtu na interval jednotkové délky
$\lim_{h \rightarrow 0} \dots$	limita pro redukci průměrné rychlosti na okamžitou
$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	okamžitá rychlost změny funkce v bodě x , derivace



Obrázek 1.1: Souvislost mezi chováním funkce a derivací této funkce

Interpretace derivace v nematematických disciplínách je okamžitá rychlost s jakou veličina f reaguje na změny veličiny x . Často studujeme veličiny závislé na čase s v tomto případě jde tedy o rychlost, s jakou se veličina mění v čase. Další možnosti a obraty používané pro slovní vyjádření derivace jsou zmíněny níže v podkapitole věnované derivaci podle času. Analogickou terminologii (rychlost růstu, rychlost změny) zpravidla přenašíme i na případy, kdy nezávislou proměnnou není čas. Rychlost potom chápeme v abstraktním slova smyslu.

Obecně, ať již je nezávislou proměnnou čas či jiná veličina, se derivace $f'(x)$ často slovně interpretuje jako změna veličiny f , odpovídající změně veličiny x o jednotku. Je to podobné, jako údaj o rychlosti na tachometru v automobilu. Ten udává, kolik kilometrů ujedeme za hodinu. Od skutečně uražené dráhy se tento údaj může lišit, protože pohyb může

trvat třeba jenom deset minut. A kdyby jízda opravdu trvala hodinu, mohlo vlivem jízdy v zácpě dojít k podstatnému nesouladu se skutečně uraženou dráhou. Přesto je okamžitá rychlost ukazovaná na tachometru při jízdě automobilem užitečná veličina a nemáme problémy s jejím chápáním. Stejně tak pohlížejme na derivaci.

Poznámka (jednotka derivace). Jednotka derivace $\frac{df}{dx}$ funkce $f(x)$ je stejná, jako jednotka podílu $\frac{f(x)}{x}$.

Věta (existence derivace implikuje spojitost). Má-li funkce f derivaci na intervalu I , je na tomto intervalu spojitá.

Věta (znaménko derivace implikuje monotonii).

- Má-li funkce f kladnou derivaci na intervalu I , je na tomto intervalu rostoucí.
- Má-li funkce f zápornou derivaci na intervalu I , je na tomto intervalu klesající.

Derivace funkce	Chování funkce
Derivace je nulová.	Funkce je konstantní. Sledovaná veličina se nemění při změně vstupních dat.
Derivace je kladná.	Funkce roste. Pokud data na vstupu rostou, sledovaná veličina také roste.
Derivace je záporná.	Funkce klesá. Pokud data na vstupu rostou, sledovaná veličina klesá.
Derivace je numericky malá (blízká k nule).	Funkce se mění pomalu. Sledovaná veličina reaguje na změny ve vstupních datech pouze málo.
Derivace je numericky velká (hodně kladná nebo hodně záporná).	Funkce se mění rychle. Malá změna na vstupu má velký vliv na sledovanou veličinu.
Derivace je konstantní.	Funkce je lineární. Klesá nebo roste pořád stejně rychle. Pokud vstup roste aritmetickou řadou (po stejných skocích), sledovaná veličina roste nebo klesá také aritmetickou řadou.
Derivace roste.	Funkce je nelineární a roste stále rychleji. Pokud je funkce kladná, rostoucí derivace znamená, že růst se stále zrychluje.
Derivace klesá k nule.	Funkce je nelineární a přibližuje se k vodorovné asymptotě. Pokud je funkce kladná, k nule klesající derivace znamená, že růst se stále zpomaluje a zastaví se.

Aplikace derivací 1: Jak rychle? (změna v čase)

<https://youtu.be/ysSFnm8Yrdo>

Poznámka (slovní vyjádření derivace podle času). Derivace v bodě, pokud ji nahlížíme z hlediska časové změny veličiny, je okamžitá rychlost s jakou se mění tato veličina. Protože kladná změna je růst, nahrazujeme někdy slovo “změna” slovem “růst”. Protože rychlost je změna za jednotku času, nahrazujeme někdy slovo “rychlost” obratem “změna za jednotku času”. Derivaci podle času můžete tedy přechít libovolným z následujících obrátů. Všechny se běžně používají a všechny chápeme stejně – jako derivaci podle času.

- Rychlost růstu
- Rychlost změny (implicitně předpokládáme, že kladná změna odpovídá růstu a záporná změna poklesu)
- Nárůst za jednotku času
- Změna za jednotku času
- Časová změna veličiny

Pokud potřebujeme pracovat s poklesem, násobíme derivaci faktorem -1 . Toto čteme též jako “záporně vzatá derivace.”

Zákon ochlazování

Horké těleso o teplotě T je v chladnější místnosti o teplotě T_0 . Z fyziky je známo (Newtonův zákon tepelné výměny), že rychlost s jakou klesá teplota tělesa je úměrná teplotnímu rozdílu. Tento rozdíl je $T - T_0$ (od většího odečítáme menší).

- Veličina T je teplota tělesa měřená například ve stupních Celsia.
- Veličina t je čas měřený například v hodinách.
- Derivace $\frac{dT}{dt}$ ve stupních Celsia za hodinu je rychlost, s jakou roste teplota tělesa.
 - Pokud je například derivace kladná a rovna hodnotě 5 stupňů Celsia za hodinu, znamená to, že teplota roste rychlostí 5 stupňů Celsia za hodinu.
 - Pokud je například derivace záporná a rovna hodnotě -5 stupňů Celsia za hodinu, znamená to, že teplota klesá rychlostí 5 stupňů Celsia za hodinu.
 - Pokud je derivace dána vztahem $-e^{-t}$, kde t je čas v hodinách a derivace vychází ve stupních Celsia za hodinu, využijeme toho, že $e^0 = 1$ a $e^{-1} = 0.37$. To znamená, že na počátku se teplota snižuje okamžitou rychlostí jeden stupeň Celsia za hodinu, tato rychlost ochlazování se pozvolna mění a například po hodině se teplota snižuje už jenom rychlostí 0.37 stupně Celsia za hodinu.
- Matematickým vyjádřením toho, že rychlost s jakou se mění teplota je úměrná teplotnímu rozdílu $T - T_0$ je rovnice

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0),$$

kde k je konstanta úměrnosti a záporné znaménko vyjadřuje, že teplota klesá. Konstanta k je číselně rovna rychlosti ochlazování v situaci, kdy je jednotkový rozdíl mezi teplotou objektu a okolí.

- Neznámou v sestavené rovnici je funkce a v rovnici figuruje derivace této funkce. Takové rovnice se naučíme řešit později.

V této chvíli je pro nás cenné to, že umíme přeformulovat fyzikální popis vývoje (rychlost změny teploty je úměrná rozdílu teplot) na kvantitativní popis, kde dokážeme realizovat numerickou simulaci. Realizace takové simulace může

vypadat například tak, že na krátký časový krok budeme předpokládat konstantní rychlost. Tuto rychlost použijeme pro odhad nové teploty, tato nová teplota změní teplotní rozdíl, tím se změní i rychlost a postup opakujeme. Toto děláme **na počítači**.

Poznámka (smysl příkladu se zákonem ochlazování).

Předchozí příklad je často v různých obměnách používán na modelování ochlazování kávy, což je proces, který většina lidí důvěrně zná. Nemáme pochopitelně ambice se domnívat, že bychom dokázali z této rovnice odvodit nějaké zásadní výsledky aplikovatelné při pití ranní kávy nebo při konzumaci horké polévky. Učíme se na malých věcech, abychom později mohli dělat věci velké. Na známých věcech se učíme aparát, který bude našim jediným nástrojem tam, kde intuice začne selhávat. Z tohoto příkladu je nutné si odnést, že derivace, jako rychlost změny, hraje roli při kvantitativním popisu dějů a při studia procesů, kdy se mění veličiny. Ať už doopravdy (studium pohybu nebo dějů, probíhajících v čase) nebo virtuálně (problémy spojené s mechanikou, včetně statiky, stability a deformací, často pracují s virtuálními změnami, tj. se změnami, které jsou sice z hlediska úlohy přípustné, ale příroda je z nějakého důvodu nerealizuje). Tedy naprostá většina dějů a jevů, které studujeme a chceme jim rozumět. Jakmile se v popisu fyzikálního zákona objeví slovo *rychlost*, někdy nahrazené souslovím *časová změna*, znamená to, že kvantitativní popis se děje pomocí derivací.

Uhlík 14C a datování organických nálezů

V roce 1940 byl objeven uhlík ^{14}C . Jedná se o radioaktivní prvek s mnoha skvělými vlastnostmi. Jednou z nich je vhodná rychlost rozpadu, která jej činí vhodným pro datování archeologických nálezů pozůstatků živých organismů

- Rychlost, s jakou se mění množství (a tedy i koncentrace y v daném vzorku) nerozpadnutého radioaktivního materiálu je úměrná jeho množství (a tedy i koncentraci). Tato skutečnost je přirozeným důsledkem toho, že pro daný nestabilní izotop mají všechny atomy stejnou pravděpodobnost, že u nich dojde k rozpadu a tato pravděpodobnost se s časem nemění. Kvantitativně je proces rozpadu popsán rovnicí

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y,$$

kde λ je konstanta úměrnosti.

- Konstanta úměrnosti λ vyjadřuje rychlost, s jakou se rozpadá jednotkové množství látky.
- Uhlík je na datování vhodný, protože jej během života absorbují živé organismy a protože poločas rozpadu jej činí vhodným pro datování většiny archeologicky zajímavých nálezů. (Pro datování vzorků starších než

50 tisíc let je nutné použít jiný prvek, protože v tomto případě již uhlíku ^{14}C ve vzorku zůstane málo.)

Aplikace derivací 2: Jak strmě? (změna v prostoru)

<https://youtu.be/cy2Mqw4KN4E>

Derivace v bodě můžeme nahlížet z hlediska prostorové změny veličiny. Tím zjistíme, jak nerovnoměrně je veličina rozložena v prostoru. Často se derivace podle prostorové proměnné nazývá *gradient*, zejména pokud nepracujeme v jednorozměrném případě, ale pokud popisujeme děj probíhající v rovině nebo v prostoru.

Vedení tepla (dřevařství, nábytek, dřevostavby)

Nerovnoměrnost rozložení teploty v tělese vede k vyrovnávání teplot přenosem tepla. Uvažujme teplotu T tyče jako funkci polohy x na tyči. Ke kvantitativnímu vyjádření vedení tepla je nutné vědět, jaký rozdíl teplot připadá na jednotku délky. V homogenním případě vydělíme teplotní rozdíl vzdáleností. V obecném případě rychlost s jakou se mění teplota podél tyče (gradient teploty) vyjadřujeme pomocí derivace

$$\frac{dT}{dx}.$$

Využívá se v posuzování izolačních vlastností a při sušení dřeva.

Koryto řeky (krajinářství)

Uvažujme příčný řez korytem řeky, jak je na obrázku. Z tohoto obrázku je zřejmé, že při zvyšování obsahu průřezu roste hladina. Pokud by stěny byly svislé (tj. B nezávislé na h), byla by změna průřezu ΔA (například v milimetrech čtverečních) vyvolaná změnou výšky Δh (například v milimetrech) rovna šířce řeky B v milimetrech, protože koryto by bylo obdélníkové a podíl obsahu obdélníka a jeho výšky je šířka. V případě nekonztantního B dostáváme místo podílu derivaci, tj.

$$\frac{dA}{dh} = B.$$

Derivace průřezu koryta podle výšky koryta hraje důležitou roli například při přechodu říčního proudění v bystřinné. Tato veličina vyjadřuje, jak rychle se mění obsah průřezu s rostoucí hladinou. V praxi je možné ji spočítat pro speciální tvary koryta, proto jsou vzorce pro vodní skok související s tímto přechodem k dispozici jenom ve speciálních případech, jako například koryto obdélníkového tvaru.

Výpočet derivace

https://youtu.be/-k_roagRII0

- **Nikdy** (nebo alespoň skoro nikdy) nederivujeme pomocí definice, ale používáme **vzorce** pro derivace základních elementárních funkcí a pro derivace matematických operací s funkcemi.
- Viz cvičení v prvním týdnu.

Vztah mezi rychlostmi měnicích se veličin

Pokud existuje mezi dvěma veličinami známý vztah, můžeme pomocí derivací odvodit vztah mezi rychlostmi, s jakými se tyto veličiny mění. Ukážeme si to na příkladu kyvadla. Podobně se chová strom s dlouhým kmenem a korunou nahoře, například listnaté stromy v lese.

Perioda matematického kyvadla délky L je dána vzorcem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \text{ Tento vzorec je možno přepsat do tvaru}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{L},$$

který ukazuje, že perioda je úměrná odmocnině délky kyvadla.

Pro derivování použijeme vzorec pro derivaci konstantního násobku a mocninné funkce.

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dL} &= \frac{d}{dL} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{L} \right) \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \frac{d}{dL} \left(L^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{gL}}. \end{aligned}$$

Tento výraz udává v jednotkách sekunda na metr, jak rychle se prodlužuje perioda kyvadla při prodloužení délky kyvadla. Například pro $L = 2$ m je derivace **číselně rovna** 0.71 s m^{-1} . Prodloužení dvoumetrového kyvadla o metr prodlouží periodu o 0.71 sekundy. Protože derivace je okamžitá rychlost změny a na delším intervalu se tato rychlost může změnit, je blíže realitě spíše formulace pro jednotky tisíckrát menší: "Prodloužení kyvadla o milimetr prodlouží periodu o 0.71 milisekundy."

Pokud se kyvadlo délky $L = 2$ m prodlužuje (po přenesení ze zimy do vytopené místnosti se závěs se prodlužuje teplotní roztažností), je rychlost prodlužování $\frac{dL}{dt}$ a rychlost, s jakou

roste perioda je (s použitím pravidla pro derivaci složené funkce)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dL} \frac{dL}{dt} = \frac{\pi}{\sqrt{gL}} \frac{dL}{dt}$$

Pokud se kyvadlo prodlužuje rychlostí 0.5 milimetru za sekundu, je

$$\frac{dL}{dt} = 0.0005 \text{ m s}^{-1}$$

a

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\pi}{\sqrt{2 \cdot 9.81}} 0.0005 = 0.00035$$

Derivace vychází bez jednotky (sekunda lomeno sekundou se zkrátí) a je možné ji přepsat do tvaru

$$\frac{dT}{dt} = 0.35 \frac{\text{ms}}{\text{s}}.$$

Perioda kyvadla se prodlužuje rychlostí 0.35 milisekundy za sekundu.

Rychlost nabíjení kondenzátoru

Elektrický odpor dřeva a mnoha dalších stavebních materiálů souvisí s vlhkostí a tato souvislost je umožňuje sestavení vlhkoměru. Protože elektrický odpor těchto materiálů je velký, není vhodné pro určení elektrického odporu použít Ohmův zákon a změřený proud a napětí. Jedna z možností je měření času nutného k nabití nebo vybití kondenzátoru přes odpor. Napětí U na kondenzátoru o kapacitě C souvisí s nábojem na kondenzátoru vztahem

$$U = \frac{1}{C} Q.$$

Derivováním tohoto vztahu podle času dostaneme vztah mezi rychlostmi změn těchto veličin ve tvaru

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt}.$$

Veličina $\frac{dQ}{dt}$ je nabíjecí proud. Ten dokážeme určit analýzou elektrického obvodu, jak si ukážeme v přednášce o diferenciálních rovnicích. Tím budeme znát derivaci $\frac{dU}{dt}$ a najít napětí jako funkci času z derivace se naučíme v přednášce o integrálech. Důležitým prvním krokem při analýze uvažovaného elektrického zapojení je však souvislost časové změny napětí a časové změny náboje, tj. derivace dvou souvisejících veličin.

Funkce více proměnných

<https://youtu.be/ewpboJPe-Dc>

Funkce má na vstupu více proměnných, na výstupu reálné číslo. Některé pojmy, jako například monotonie, ztrácejí ve světě funkcí více proměnných smysl, například monotonie nebo inverzní funkce. Proměnné značíme pomocí jejich fyzikálního označení. Bez fyzikálního kontextu zpravidla používáme funkce dvou, tří, nebo n proměnných v následujícím tvaru.

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y)$ Geometricky můžeme chápat jako výšku přiřazenou bodu v rovině a výsledkem je **plocha ve 3D**, nebo barvu přiřazenou bodu v rovině a výsledkem je **obarvená rovina**.
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z)$ Geometricky můžeme chápat jako barvu přiřazenou bodu v prostoru a výsledkem je **obarvený prostor**.
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Geometrická představa zde není možná, chápeme čistě abstraktně.

Parciální derivace

Změna funkce více proměnných může být způsobena změnou libovolné nezávislé proměnné. Pokud sledujeme například ve stěně měnící se teplotní profil, zajímá nás, jak se teplota v jednotlivých místech stěny mění v čase a jak se teplota mění v řezu stěnou. Zdá se býti rozumné oddělit obě změny a studovat každou samostatně. Buď v daném bodě fixovat polohu a sledovat časový vývoj v tomto bodě, nebo v daném čase udělat něco jako teplotní snímek a srovnávat teplotu ve vybraném bodě s okolními teplotami ve stejném čase. To vede k následujícímu přístupu, kdy u funkce více proměnných sledujeme reakci na změnu jedné jediné veličiny.

Následující definice výše uvedenou myšlenku odděleného sledování změny funkce (závislé veličiny) jako reakce na změnu jedné jediné vstupní informace (jedné nezávislé veličiny) uvádí v život. Definice je stejná jako u derivace funkce jedné proměnné, změna je pouze v tom, že je přítomna i další proměnná.

Definice (parciální derivace). Buď $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funkce dvou proměnných, x a y , tj. $f(x, y)$. Výraz

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

se nazývá *parciální derivace funkce f podle x* . Podobně,

$$\frac{\partial f}{\partial y} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

je *parciální derivace funkce f podle y* .

Podobně můžeme definovat parciální derivaci pro funkce libovolného konečného počtu proměnných. V těchto parciál-

ních derivacích vlastně sledujeme, jak reaguje veličina f na změny jenom v jedné proměnné. Proměnná, přes kterou se nederivuje, má vlastně roli parametru, nijak se nemění.

Rovnice vedení tepla v 1D

<https://youtu.be/22F5frFRI60>

Studujeme vedení tepla v jednorozměrné tyči. Teplota je funkcí dvou proměnných, polohy a času. Tedy $T = T(t, x)$. Parciální derivace $\frac{\partial T}{\partial t}$ udává je rychle (například ve stupních Celsia za hodinu) roste v daném místě teplota. V různých částech desky může být tato veličina jiná a vždy se vztahuje k danému bodu. Přirozeně se mění i v čase, například v prostředí s konstantní teplotou postupně systém dospěje do stavu se stacionárním rozložením teploty, kdy se teplota v žádném místě ani neroste ani neklesá a parciální derivace podle času je nulová. Derivace $\frac{\partial T}{\partial x}$ udává jak prudce (například ve stupních Celsia na centimetr) roste teplota ve směru osy x .

Poznámka. Potřebujeme fyzikální zákony řídící vedení tepla. Bez nich matematika model vedení tepla nemá jak naformulovat. Tyto zákony je potřeba matematice dodat “z venku”, z aplikované vědy. Tou je v tomto případě fyzika, jindy může být biologie nebo geologie. Jakmile jsou potřebné zákony a případně materiálové vztahy k dispozici, stává se problém čistě matematickým a fyzika přijde ke slovu při závěrečné interpretaci. Použijeme následující fyzikální fakta.

- Rozdílem teplot je způsoben tok tepla. Velikost toku tepla je úměrná teplotnímu rozdílu a teplo teče z místa v větší teplotou do místa s menší teplotou.
- Teplota se zvyšuje dodáním tepla. Změna teploty je úměrná dodanému teplu.

V dalším už nastupuje matematický popis a ve vhodných chvílích vždy použijeme výše uvedené fyzikální zákony. Mluvíme o teple, ale jako mechanický model si můžeme představit proudění tekutiny (pro jednoduchou představu) nebo proudění vlhkosti (pro odvození rovnice difuze namísto rovnice vedení tepla). Budeme uvažovat libovolné místo materiálu a budeme matematicky vyjadřovat děje, které přispívají ke změně teploty.

- Rychlost s jakou s daném místě roste teplota (v čase) je

$$\frac{\partial T}{\partial t}$$

a měříme ji například ve stupních Celsia za minutu. Tato rychlost je úměrná rychlosti s jakou do daného místa dodáváme teplo. Proto v dalším budeme hledat rychlost dodávání tepla a daného místa a poté se sem vrátíme

a dáme tuto rychlost do souvislosti s rychlostí růstu teploty.

- Je-li například parciální derivace $\frac{\partial T}{\partial t}$ rovna $2^\circ\text{C}/\text{min}$, znamená to, že v daném místě roste teplota v čase rychlostí dva stupně Celsia za minutu.
- Pokud je parciální derivace záporná a rovna například hodnotě $-2^\circ\text{C}/\text{min}$, znamená to, že teplota v tomto místě klesá rychlostí dva stupně Celsia za minutu.
- Rychlost s jakou s daném místě roste teplota jako funkce polohy je $\frac{\partial T}{\partial x}$ a měříme ji například ve stupních Celsia na centimetr.
 - Je-li například parciální derivace $\frac{\partial T}{\partial x}$ rovna $2^\circ\text{C}/\text{cm}$, znamená to, že v daném místě roste teplota ve směru osy x tak, že na každém centimetru naroste o dva stupně Celsia.
 - Pokud je parciální derivace záporná a rovna například hodnotě $-2^\circ\text{C}/\text{cm}$, znamená to, že ve směru osy x teplota klesá a na každém centimetru klesne o dva stupně Celsia.
- Pro přepočítání nerovnoměrného rozložení teploty na tok tepla nás zajímá nikoliv jak teplota v prostoru roste, ale jak klesá. Proto musíme vzít derivaci podle prostorové proměnné záporně, abychom dostali pokles teploty. Tento pokles vynásobíme konstantou, která převede spád teploty na tok tepla. Tuto konstantu označíme k (nazývá se součinitel tepelné vodivosti a dodá nám ji fyzika, přesněji Fourierův zákon) a tok tepla q ve směru osy x je

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x}.$$

To je veličina, která udává, kolik jouů tepla proteče průřezem za jednotku času.

- Je-li q rovno $7\text{ J}/\text{min}$ znamená to, že průřezem proteče ve směru osy x sedm jouů za minutu.
- Je-li q záporné a rovno $-7\text{ J}/\text{min}$, znamená to, že sedm jouů za minutu proteče v daném místě proti směru osy x .
- Pokud do daného místa přitéká teplo stejnou rychlostí jako odtéká, teplota se nemění a dané místo se ani neohřívá ani neochlazuje. Intenzita ochlazení je dána bilancí mezi přítokem a odtokem. Můžeme si to představit tak, že z tepla které do daného bodu přiteče, se část “oddělí” a přispěje k navýšení teploty a zbytek teče dál. Pro zjištění, kolik tepla se z toku “oddělí” a způsobí v daném místě navýšení teploty potřebujeme vědět, jak rychle v daném místě tok klesá jako funkce proměnné x . Nárůst určíme derivací podle x a pokles z nárůstu uděláme změnou znaménka. Pokles toku tepla je tedy

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

- Například pokles $-\frac{\partial q}{\partial x} = 2 \text{ J}/(\text{min cm})$ toku $q = 10 \text{ J}/\text{min}$ znamená, že o centimetr dál ve směru osy x proteče průřezem směrem doprava už nikoliv deset, ale pouze osm joulů za minutu.
- Stejný pokles u toku $q = -10 \text{ J}/\text{min}$ znamená, že v daném místě proteče směrem doleva deset joulů za minutu, ale o centimetr více vpravo je o 2 méně, tj. $-10 - 2 = -12$ a směrem doleva teče dvanáct joulů za minutu.
- V obou případech intenzita toku klesá podél tohoto toku. Tok slábne.
- Pokles toku vypočtený v předchozím bodě je úměrný rychlosti růstu teploty. Příslušné konstanty úměrnosti dodá fyzika a platí

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t},$$

kde c je měrná tepelná kapacita a ρ je hustota. (V tomto případě jsou hustota i měrná tepelná kapacita vztaženy ne k jednotce objemu, jak jsme zvyklí, ale k jednotce délky. Například ρ je lineární hustota, tj. v gramech na centimetr).

- Například pokles $-\frac{\partial q}{\partial x} = 2 \text{ J}/(\text{min cm})$ toku $q = 10 \text{ J}/\text{min}$ znamená, že o centimetr dál ve směru osy x proteče průřezem směrem doprava už nikoliv deset, ale pouze osm joulů za minutu. Tedy každou minutu se v jenom centimetru délky od toku “odpoj” energie o velikosti dva jouly a ta se “uloží” do materiálu. Navenek se to projeví ohřevem, přičemž hrají roli fyzikální vlastnosti materiálu.
- Rovnice odvozená v předchozím kroku se nazývá **rovnice vedení tepla** a dokáže modelovat například prostup tepla stěnou domu. Tato rovnice zachycuje matematicky to, jak funguje vedení tepla.

Shrnutí. V odvození vidíme, že rovnice vedení tepla je vlastně bilance toku tepla. Hodnota o kolik se v daném místě snižuje tok tepla udává, kolik tepla se v daném místě spotřebovalo. Tato spotřeba tepla se projeví zvýšením teploty v daném bodě.

Část rovnice vedení tepla	Slovní interpretace
$\frac{\partial T}{\partial t}$	Rychlost s jakou roste v daném místě teplota jako funkce času.
$\frac{\partial T}{\partial x}$	Rychlost s jakou roste v daném okamžiku teplota podél tyče.
$-\frac{\partial T}{\partial x}$	Rychlost s jakou klesá v daném okamžiku teplota podél tyče. Záporně vzatá rychlost růstu.
$-k \frac{\partial T}{\partial x}$	Tok tepla. Podle Fourierova zákona je úměrný rychlosti s jakou klesá teplota.
$\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$	Rychlost s jakou roste tok tepla podél tyče.
$-\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$	Rychlost s jakou klesá tok tepla podél tyče. Toto teplo zůstává v daném místě tyče a projeví se nárůstem teploty v tomto místě.
$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$	Upravený výraz z předchozího řádku. Rychlost s jakou klesá tok tepla podél tyče.
Rovnice vedení tepla	Červené výrazy jsou si úměrné.

Poznámka. Vyřešit rovnici vedení tepla je bohužel možné jenom v poměrně speciálních případech, které jsou z praktického hlediska málo významné. Existuje však řada numerických metod jak tuto rovnici vyřešit přibližnými metodami. Tato rovnice je potom “schována” například v softwarech umožňujících vizualizovat tepelné namáhání v okolí kritických prvků staveb, jako jsou okna. Všimněte si univerzálnosti této rovnice. Stejná rovnice, jakou můžeme použít pro posouzení teplotního komfortu ve stavbě, dokáže modelovat například vliv stromu na tepelnou pohodu v městském prostředí nebo prostup tepla do dřeva při jeho tepelné modifikaci.

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Aplikované vědy (fyzika, biologie, nauka o materiálu, hydrologie) přirozeně formulují své zákony a poznatky mimo jiné i kvantitativně a pomocí pojmů vyjadřujících rychlosti změn. Doteď jsme aparátem střední školy uměli počítat jenom průměrně rychlosti za daný časový interval, s derivací dostáváme do ruky nástroj pro práci

s okamžitými rychlostmi.

- Jakmile ve slovním popisu procesu slyšíme slovo rychlost, znamená to, že při matematickém modelování hraje pravděpodobně důležitou roli derivace. Okamžitá rychlost je derivace. Jenom v krásných případech probíhajících konstantní rychlostí můžeme tuto rychlost počítat pomocí podílu, jak to známe u rychlosti pohybu.
- Naučili jsme se nebo se naučíme pomocí vzorců derivovat běžné funkce.
- Derivace umožní předpovědět, co se stane s veličinou, která závisí na jiné veličině a tato jiná veličina se mění známou rychlostí. Ze vztahu, který dává do souvislosti hodnoty dvou veličin, můžeme určit pomocí derivací vztah, dávající do souvislosti rychlosti změn těchto veličin.
- V případě nutnosti umíme rozšířit derivace i do světa funkcí více proměnných. Děláme to tak, že sledujeme rychlost změny způsobenou vždy změnou jenom jedné veličiny. Proto příslušné derivace nazýváme parciální. (Parciální znamená v tomto smyslu částečný.)

Kapitola 2

Derivace a lineární aproximace

Aplikace derivací 3: Jak citlivě? (reakce na změnu)

<https://youtu.be/uKO6IZwraOQ>

Derivace v bodě, pokud ji nahlížíme z hlediska citlivosti reakce funkce na změnu vstupních dat, udává, jaký vliv má jednotková změna ve vstupních datech na změnu funkční hodnoty funkce. Pokud změna ve vstupních datech není jednotková ale násobek jednotkové změny, je i odezva násobná.

Poznámka (derivace jako měřítko citlivosti funkce na změnu vstupních dat). Buď $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkce taková, že má derivaci. Pokud se veličina x změní z hodnoty x_0 o hodnotu Δx (tj. nová hodnota je $x_0 + \Delta x$), potom se f mění přibližně o $f'(x_0)\Delta x$, tj.

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$$

neboli

$$\Delta f \approx \frac{df(x_0)}{dx} \Delta x.$$

Tato aproximace je použitelná pro malé hodnoty Δx .

Co se rozumí malou hodnotou Δx závisí na více faktorech, například i na tom, jak se funkce “vzpírá” tomu, být aproximována výrazem úměrným Δx . Přesněji tuto podmínku zformulujeme po probrání Taylorova polynomu, kdy se použije o něco obecnější postup.

Příklad. Nosník výšky h , šířky a a délky L je uprostřed zatížený silou F . Průhyb s uprostřed nosníku je dán vztahem

$$s = \frac{FL^3}{4Eah^3}, \quad (1)$$

kde E je materiálová konstanta. Pro $h = 20$ cm je průhyb $s = 10$ cm. Zjistěte, jak se průhyb mění při změnách výšky nosníku. Odhadněte, jak se průhyb změní, pokud se h sníží na 18 cm?

Řešení. Relevantními veličinami jsou s a h a vzorec je tedy možno shrnout do tvaru

$$s = \frac{k}{h^3},$$

kde k je konstanta charakterizující danou situaci. Pro zadané hodnoty výšky a průhybu vychází konstanta

$$k = sh^3 = 10 \times 20^3 = 80\,000.$$

Vzorec (1) tedy redukuje na

$$s = 80\,000h^{-3}.$$

Derivováním obdržíme

$$\frac{ds}{dh} = 80\,000 \times (-3)h^{-4} = -\frac{3 \times 80\,000}{h^4}.$$

Změna výšky nosníku je

$$\Delta h = 18 - 20 = -2 \text{ cm}$$

a tomu odpovídá změna průhybu

$$\Delta s = -\frac{3 \times 80\,000}{(20)^4}(-2) = 3 \text{ cm}.$$

Průhyb se tedy zvětší o 3 cm.

Poznámka (smysl předchozího příkladu). Proč nepočítáme přesně? Stačila by selská logika a změna funkce $s = \frac{k}{h^3}$ by byla

$$\Delta s = \frac{k}{(h + \Delta h)^3} - \frac{k}{h^3}. \quad (2)$$

Odpověď je překvapivá: pomocí derivací je vyjádření změny v naprosté většině případů jednodušší. V tomto našem případě máme

$$\Delta s \approx -\frac{3k}{h^4} \Delta h,$$

což je na další práci mnohem příjemnější výraz, než rozdíl dvou zlomků (2). Skutečnost, že platí pouze pro malé Δh

nás nijak neomezuje. Většinou se tento aparát používá tam, kde se chyba limitním přechodem “stáhne na nulu”. Navíc, ukazujeme koncept. *Důležité je si z příkladu odnést, že derivace umožní analyzovat, jak vypočítané veličiny reagují na změny ve vstupních datech. Výsledkem může být například maximální teoretická přesnost se kterou je možné vypočítat výslednou veličinu při vstupních datech zatížených chybou nebo nějakým způsobem nejistých (zákon šíření chyb).*

Lineární aproximace

https://youtu.be/-3h53IvI_Pc

V následujících pasážích se budeme věnovat lineární aproximaci funkce. To je nahrazení funkce s jakkoli složitým funkčním předpisem funkcí s tím nejjednodušším možným předpisem: lineární funkcí. Tím se pochopitelně dopouštíme jisté nepřesnosti a je to něco za něco: k popisu úlohy máme poté k dispozici jednodušší funkce, ale výpočty jsou zatíženy chybou. Někdy tato chyba může být tak velká, že je idea lineární aproximace naprosto nepoužitelná. Ale jindy se jedná o nástroj, který prakticky neřešitelnou úlohu převede na úlohu snadno zvládnutelnou. Linearizace nelineárních úloh je jedním ze základních inženýrských postupů. V mnoha případech dává samotná dobrá výsledky a řeší zadaný problém, v jiných případech slouží jako odrazový můstek ke zvládnutí nelineárního problému.

Lineární aproximace v 1D

Pokud se funkce mění, můžeme odhad změny z předchozího odstavce přičíst k funkční hodnotě a tím máme odhad funkční hodnoty po změně. Toto je principem lineární aproximace, neuvěřitelně jednoduché a přitom velice mocné techniky používané inženýry k tomu, aby se popis problémů a řešení úloh vůbec daly efektivně zvládnout.

Věta (lineární aproximace). *Bud' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkce, která má derivaci. V okolí bodu x_0 platí přibližný vzorec*

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

neboli

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0).$$

Poznámka (slovní interpretace vzorce pro lineární aproximaci). Výše uvedený vzorec není těžké rozšířovat.

- Veličina $f(x)$ je funkční hodnota v bodě x , tu chceme odhadnout.

- Veličina $f(x_0)$ je známá funkční hodnota v bodě x_0 , to je výchozí bod pro odhad.
- Veličina $f'(x_0)$ je odhad změny veličiny f způsobený jednotkovou změnou vstupních dat (zvýšení hodnoty x_0 o jednotku). Tento faktor ještě v dalším kroku musíme přizpůsobit tomu, že změna vstupních dat není jednotková, což uděláme s využitím přímé úměrnosti.
- Veličina $f'(x_0)(x - x_0)$ je odhad změny veličiny f vyvolané změnou veličiny x z x_0 o $\Delta x = x - x_0$ tak, jak jsme jej používali v minulé přednášce.

Poznámka (alternativní vzorec pro lineární aproximaci). Vzorec pro lineární aproximaci se často píše v ekvivalentním tvaru

$$f(x + h) \approx f(x) + f'(x)h,$$

což získáme dosazením $x + h$ za x a x za x_0 .

Příklad (růst stromu). Strom má v roce 2019 výšku 3 metry a roste rychlostí 0.5 metru za rok. V roce x je jeho výška dána vzorcem

$$h(x) = 3 + 0.5(x - 2019).$$

Příklad (aproximace důležitých funkcí v okolí nuly). Ve cvičení ukážeme platnost následujících přibližných vzorců, které platí pro x blízké k nule.

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1, \quad (1 + x)^n \approx 1 + nx.$$

První dva vzorce využijeme později při popisu malých rotací v rovině. Mnoho důležitých aplikací těchto vzorců ve fyzice je na webu [fyzikální olympiády](#) v dokumentu [Aproximace ve fyzikálních úlohách](#).

Lineární aproximace v některých fyzikálních zákonech

Příklad (gravitační potenciál v malých výškách nad zemí). Gravitační potenciál V ve vzdálenosti r od středu koule o hmotnosti M je dán vztahem

$$V(r) = -G \frac{M}{r} = -GM r^{-1},$$

kde G je gravitační konstanta. Najdeme lineární aproximaci v bodě R .

Dosazením obdržíme

$$V(R) = -GM R^{-1}$$

a derivováním

$$\frac{dV}{dr} = GM r^{-2}, \quad \frac{dV(R)}{dr} = GM R^{-2}.$$

Odsud poté získáme lineární aproximaci

$$V(r) \approx -GMR^{-1} + GMR^{-2}(r - R)$$

Pro Zemi jako kouli o poloměru R je $r - R$ výška nad Zemí h a aproximaci je možno po přeznačení napsat ve tvaru

$$V(r) \approx V_0 + gh.$$

V tomto označení je $V_0 = -GMR^{-1}$ konstanta související s volbou nulové hladiny potenciálu a vzhledem k libovolnosti volby nulové hladiny je tato hodnota nepodstatná. Veličina $g = GMR^{-2}$ je tíhové zrychlení vyjádřené pomocí gravitační konstanty G a parametrů Země. Veličina gh je potenciál v tíhovém poli Země. Tuto veličinu známe lépe ze vzorce pro potenciální energii tělesa o hmotnosti m , který má tvar

$$E = mgh.$$

Online výpočet tíhového zrychlení

Příklad (potenciální a kinetická energie). V předchozím příkladě je možné využít vztah

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx, \quad \text{pro malé } x.$$

Přepsáním gravitačního potenciálu V do tvaru obsahujícího výšku nad zemí h a využitím lineární aproximace získáme

$$\begin{aligned} V &= -G \frac{M}{R+h} \\ &= -G \frac{M}{R} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1} \\ &\approx -G \frac{M}{R} \left(1 + (-1) \frac{h}{R}\right) \\ &= -G \frac{M}{R} + G \frac{M}{R^2} h \end{aligned}$$

a po zavedení nových konstant

$$V \approx V_0 + gh,$$

kde $g = G \frac{M}{R^2}$.

Podobně aproximací přesných vztahů plynoucích z Einsteinovy teorie relativity získáme složku energie související s pohybem, tj. kinetickou energii

$$\begin{aligned} E &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= m_0 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\ &\approx m_0 c^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{v^2}{c^2}\right)\right) \\ &= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \end{aligned}$$

pro v mnohem menší než c . Snadno rozšířujeme, že s rychlostí souvisí jenom druhý sčítanec a že se jedná o klasický vzorec pro kinetickou energii $\frac{1}{2}mv^2$.

Ač se jedná “jenom” o lineární aproximaci, je vzorec $E = \frac{1}{2}mv^2$ dokonce mnohem použitelnější, protože výpočet kinetické energie pomocí univerzálně platného relativistického vzorce při malých rychlostech v praxi obvykle zhavaruje na **zaokrouhlovacích chybách**.

Lineární aproximace a jednorozměrné materiálové vztahy

<https://youtu.be/yX6azlYcEs0>

V inženýrské praxi často potřebujeme modelovat odezvu materiálu reagujícího na vnější podnět. Může se jednat například o změnu délky při mechanickém namáhání, tok tepla materiálem při tepelném namáhání, tok tekutiny porézním materiálem (dřevo, půda) při difuzi nebo rozdílu tlaků a podobně.

Pokusíme se modelovat funkci dávající do souvislosti velikost podnětu a reakci materiálu.

- Je přirozené, že při nulovém podnětu není žádná odezva a proto funkce prochází počátkem.
- S velikostí podnětu odezva na tento podnět roste a proto funkce v okolí počátku má kladnou derivaci a roste.
- Z lineární aproximace vidíme, že pro $x_0 = 0$ a $f(0) = 0$ se vzorec pro lineární aproximaci redukuje na

$$f(x) \approx f'(0)x,$$

tj. na přímou úměrnost.

- Ukazuje se, že v řadě praktických úloh je uvedená aproximace dobrá na dostatečně dlouhém intervalu a podle typu úlohy má tato aproximace povahu fyzikálního zákona a svůj vlastní název. Nejčastěji se setkáme se s *Hookovým zákonem* pro deformaci materiálu (relativní prodloužení je úměrné normálovému napětí), *Darcyho zákonem* pro tok tekutiny půdou (filtrační rychlost je úměrná záporně vzatému hydraulickému gradientu), *Fickovým zákonem* pro difuzi (hustota difuzního toku je úměrná záporně vzatému gradientu koncentrace) a *Fourierovým zákonem* pro vedení tepla v materiálu (hustota tepelného toku je úměrná záporně vzatému gradientu teploty). Později, v přednášce o zákonech zachování ve vektorovém poli ke konci semestru, si tyto závislosti naformulujeme ve vícerozměrném prostředí a hlavně ve tvaru, který umožní zohlednit práci s neizotropními materiály (různé fyzikální vlastnosti v různých směrech).

- Matematicky je tedy povaha přímé úměrnosti v materiálových vztazích zřejmá a experimentálně je možné ověřit, pro jaké oblasti platí. Toto nám však mnohdy nestačí a snažíme se tyto vztahy ještě odvodit ze základních fyzikálních vztahů a z představy jak daný proces funguje. To otevírá možnosti potvrdit si, že naše představa o chování materiálu je správná.
- V některých velmi speciálních případech dokonce umíme určit materiálovou charakteristiku výpočtem namísto měření. Pro praktické využití tato dovednost není významná (můžeme vypočítat například koeficient filtrace pro půdu složenou z částic ve tvaru stejně velkých kuliček, v praxi se však s takovým materiálem setkáme nanejvýš při speciálních aplikacích v laboratoři), ale dává nám to důležitý prostor pro ověření fyzikálních hypotéz a matematických postupů.

Derivace a tečna

Lineární aproximace funkce je vlastně aproximace tečnou. Protože pojem tečna ze střední školy chápeme jenom intuitivně, můžeme nyní pomocí derivace tečnu dokonce definovat. Z geometrického pohledu je tečna přímkou bodem $[x_0, f(x_0)]$, která má směrnici $f'(x_0)$. Proto se o derivaci často mluví jako o směrnici tečny.

Definice (tečna). Necht f je funkce, která má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$. Přímkou

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

se nazývá *tečna ke grafu funkce f* v bodě x_0 .

Díky souvislosti derivace s tečnou je derivace jedinečným nástrojem při popisu vlastností křivek. Příslušná oblast se nazývá diferenciální geometrie a je to jakási oblast mezi geometrií a diferenciálním počtem.

Aproximace vyššího řádu

<https://youtu.be/PyZcNSio8J0>

Motivace: Je možné chtít více než je lineární aproximace?

Lineární aproximace vychází z předpokladu, že rychlost růstu (nebo poklesu) se příliš nemění. Někdy můžeme mít dodatečnou informaci o tom, jak se tato rychlost změní. Například pokud se bude rychlost zpomalovat, bude skutečná hodnota funkce menší než lineární aproximace.

Je otázka, zda a jak je možné informaci o tom, jak rychle roste rychlost, případně jak rychle roste rychlost růstu rychlosti, využít. To znamená že budeme studovat derivaci derivace, derivaci derivace derivace atd.

Aproximaci funkce $\cos x \approx 1$ zmíněnou výše (odvodíme ve cvičení), kdy aproximujeme vlastně konstantní funkci, je možné také chápat jako selhání lineární aproximace. Následující slidy a pojem Taylorův polynom nám umožní najít prostředek pro aproximaci i v těchto případech.

Derivace vyšších řádů

Definice (druhá a další vyšší derivace).

- *Druhou derivací* rozumíme derivaci derivace. Označujeme $f''(x)$ nebo $\frac{d^2 f}{dx^2}$.
- Podobně *k -tou derivací* rozumíme derivaci $(k-1)$ -ní derivace. Označujeme $f^{(k)}(x)$ nebo $\frac{d^k f}{dx^k}$.

Platí tedy

$$\frac{d^2 f}{dx^2} := \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right), \quad \frac{d^k f}{dx^k} := \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} \right)$$

aneb

$$f'' := (f')', \quad f''' = (f'')', \quad f^{(k)} = (f^{(k-1)})'.$$

Označení derivací pomocí čárek se nazývá Lagrangeova notace, označení pomocí podílu diferenciálů Leibnizova notace. Ještě se někdy používá i Eulerova notace, používající Df , $D^2 f$ a $D^k f$ pro první, druhou a k -tou derivaci.

Příklad.

- Exponenciální funkce e^x má všechny derivace stejné.
- U mocninné funkce se každým derivováním sníží exponent. Je-li exponentem přirozené číslo, po konečném počtu kroků se exponent sníží na nulu, funkce tedy bude konstantní a všechny další derivace budou nulové.
- Polynomy mají všechny derivace od jistého řádu rovny nule.

Podobně je možné pracovat s parciálními derivacemi parciálních derivací. Například

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

nebo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Druhá derivace a deformace nosníků

Derivace hrají ústřední roli v teorii studující tuhost, deformaci a odolnost proti selhání u nosníků. Máme-li nosník podepřený na koncích a zatížený silou kolmo na podélnou osu nosníku (například vodorovný nosník se svislým zatížením) a je-li $v(x)$ výchylka od rovnovážného stavu v bodě x , potom derivace $\frac{dv}{dx}$ vyjadřuje úhel pootočení svislého

průřezu nosníku vlivem deformace a druhá derivace $\frac{d^2v}{dx^2}$ při malých deformacích vyjadřuje křivost nosníku. Z fyzikálních úvah a ze vztahu mezi křivostí a momentem $M(x)$ síly, která nosník deformuje, je možné odvodit rovnici

$$M(x) = EI \frac{d^2v}{dx^2},$$

kde konstanta E souvisí s materiálem (Youngův modul pružnosti) a I s průřezem nosníku (kvadratický moment průřezu). Podobně, pro nosník namáhaný v ose (například svislá vzpěra) silou F platí vztah

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} + Fv = 0.$$

Aplikace jsou, jak bylo uvedeno, při dimenzování nosníků (angl. beam buclinkg). Odvození výše uvedených rovnic není komplikované, ale vyžaduje dodatečné fyzikální znalosti a proto zde neuvádíme.

Někdy je vhodné mít moment $M(x)$ síly deformující nosník mít vyjádřený pomocí zatížení nosníku. To souvisí s druhou derivací momentu a proto je nutno rovnici ještě dvakrát derivovat. Proto se ohybová rovnice nosníku někdy uvádí jako vztah obsahující dokonce čtvrtou derivaci.

Taylorův polynom a polynomiální aproximace v 1D

Definice (Taylorův polynom). *Taylorův polynom* stupně n pro funkci f v bodě x_0 je polynom

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

tj.

$$T(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}(x - x_0)^n.$$

Taylorův polynom je nejlepší aproximace funkce f polynomm. Je možné ukázat, že rozdíl

$$f(x) - T(x)$$

je blízký k nule, pokud je n dostatečně velké, x dostatečně blízko k x_0 a $(n + 1)$ -ní derivace funkce f je relativně malá. V těchto případech je

$$f(x) \approx T(x).$$

V tomto případě dostáváme následující větu. V ní $O((x - x_0)^{n+1})$ je takzvané **Landauovo velké O**. Tímto zápisem je vyjádřen člen, který je pro x blízka k x_0 v absolutní hodnotě menší než násobek funkce $(x - x_0)^{n+1}$, tj. v bodě x_0 konverguje k nule stejně rychle nebo rychleji jako mocninná funkce s exponentem $n + 1$.

Věta (Taylorova aproximace v okolí nuly) Platí

$$f(x) = T(x) + O((x - x_0)^{n+1}),$$

resp. pro $x = x_0 + h$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)h^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)h^n + O(h^{n+1}),$$

pokud existují spojité derivace funkce f do řádu $n + 1$.

Často používáme aproximaci v nule. Potom dostáváme pro aproximaci v okolí nuly

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + O(x^{n+1}).$$

Příklad.

$$\ln \frac{1+x}{1-x} \approx 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + \frac{2}{9}x^9$$

$$\ln 2 = \ln \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \approx 0.69314604$$

Po tomto výpočtu je prvních pět cifer aproximace $\ln 2$ správně. Tady vidíme i jeden zajímavý trik. Pokud bychom se snažili napsat Taylorův polynom funkce $\ln(x + 1)$, která vypadá příjemněji, chyba aproximace by byla mnohem větší.

[Online výpočet.](#)

Konečné diference a numerická aproximace derivace

<https://youtu.be/U93Q3XaDnDA>

Pro numerické řešení rovnic obsahujících derivace je vhodné umět nahradit derivace veličinami, se kterými se lépe pracuje v numerických výpočtech.

Základním přístupem je vynechání limitního přechodu v definici derivace

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Tedy

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Okamžitá rychlost je nahrazena průměrnou rychlostí na intervalu $(x, x+h)$. Tento podíl se nazývá *dopředná poměrná diference*. Analogicky je definována vztahem

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

zpětná diference.

Lepší aproximace derivace vychází z Taylorova polynomu druhého řádu napsaného pro $f(x+h)$ a $f(x-h)$, tj. ze vztahů

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2,$$

$$f(x-h) \approx f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2.$$

- Pokud tyto vztahy odečteme, dostaneme

$$f(x+h) - f(x-h) \approx 2f'(x)h.$$

a odsud dostáváme aproximaci první derivace pomocí *centrální diference* ve tvaru

$$\frac{df}{dx} = f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Protože používáme aproximaci kvadratickým polynomem, je aproximace derivace pomocí centrální diference přesnější než aproximace pomocí dopředné diference.

- Pokud tyto vztahy sečteme, dostaneme

$$f(x+h) + f(x-h) \approx 2f(x) + f''(x)h^2$$

a odsud dostáváme aproximaci druhé derivace

$$\frac{d^2f}{dx^2} = f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}.$$

Odbočka: od vazeb mezi atomy k materiálovým vlastnostem

Výraz

$$V(r) = \frac{1}{r^{12}} - \frac{2}{r^6} = r^{-12} - 2r^{-6}$$

je (až na konstanty, které pro pohodlí volíme pevně) Lennard-Jonesův potenciál často používaný pro interakci mezi atomy nebo molekulami. Napíšeme Taylorův polynom druhého stupně v bodě $r = 1$. K tomu potřebujeme znát funkční hodnotu a hodnotu prvních dvou derivací v tomto bodě.

$$V(1) = 1 - 2 = -1$$

$$\frac{dV}{dr} = -12r^{-13} - 2(-6)r^{-7} \Big|_{r=1} = -12 + 12 = 0$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} = 12 \cdot 13r^{-14} - 2 \cdot 6 \cdot 7r^{-8} \Big|_{r=1} = 12 \cdot 13 - 12 \cdot 7 = 72$$

$$V(r) \approx -1 + \frac{1}{2}72(r-1)^2$$

Konstanta -1 je nezajímavá, souvisí s nulovou hladinou potenciálu a nulovou hladinou potenciálu si můžeme volit libovolně.

Lineární člen chybí a kvadratický člen je analogický potenciální energii pružiny o tuhosti k ve tvaru

$$U = \frac{1}{2}kx^2.$$

Molekuly či atomy popsané tímto potenciálem se chovají jako tělesa na pružině o tuhosti $k = 72$ kmitající okolo rovnovážné polohy odpovídající $r = 1$. Pro atom o hmotnosti m tedy například platí vzorec pro úhlovou frekvenci oscilací $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, odvozený původně pro těleso na pružině. Analogicky se chovají pružné konstrukce. V klidu jsou ve stavu s minimální potenciální energií a při vychýlení z tohoto stavu o malou hodnotu začínají kmitat.

- Pokud aproximujeme potenciál pomocí Taylorova polynomu, z koeficientu u kvadratického členu můžeme určit frekvenci oscilací.
- Dále můžeme tímto způsobem určit pevnost vazby a tím pro daný materiál určit Youngův modul pružnosti, tj. konstantu úměrnosti mezi deformací materiálu a tahovým nebo tlakovým napětím v materiálu.
- Poloha rovnovážné polohy, resp. její závislost na teplotě (pokud bychom do matematického modelu dodali skutečné parametry i s jejich teplotní závislostí) zase definuje koeficient teplotní roztažnosti materiálu.

Takovým způsobem můžeme u materiálu se známou strukturou odhadnout fyzikální vlastnosti výpočtem. To je důležité, protože teoretické předpovídání vlastností materiálu otevírá

cestu k navrhování nových materiálů s výhodnějšími vlastnostmi. materiál můžeme prozkoumat ještě dříve, než jej vyrobíme a dostaneme na stůl.

Řešení rovnic

<https://youtu.be/1DxpXD8YEYY>

V praxi se setkáváme s případy, kdy je znám výsledek po aplikování funkce na vstupní data a je nutné rekonstruovat tato vstupní data. Řešíme tedy rovnici, kde neznámá je argumentem funkce a je známa funkční hodnota. Pojmy nutné pro korektní formulaci a jednu z velmi rychlých přibližných metod řešení rovnic si představíme v následujících pasážích.

Nejprve se budeme zabývat tím, jestli se k funkční hodnotě dají vstupní data rekonstruovat jednoznačně (prostá funkce). Pokud ano, představíme si pravidlo, které toto přiřazení vstupních dat k výsledku po aplikaci funkce dokáže realizovat (inverzní funkce). A na závěr si ukážeme metodu, jak při řešení rovnic (resp. počítat funkční hodnoty inverzních funkcí) využít derivaci. To vede k velmi rychlé a velmi obecné metodě numerického řešení (Newtonova metoda).

Prostá funkce

Někdy jsme v situaci, že známe výsledek po působení nějaké funkce a potřebujeme zrekonstruovat vstupní hodnotu. Řešíme tedy pro zadanou funkci f a hodnotu y_0 rovnici

$$f(x) = y_0.$$

Řešení této rovnice, pokud existuje, nemusí být určeno jednoznačně. Pro funkce, pro které je určeno jednoznačně, zavádíme následující pojem.

Definice (prostá funkce). Necht f je funkce a $M \subseteq \text{Dom}(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f . Řekneme, že funkce f je *prostá*, jestliže každý obraz má jen jediný vzor, tj. pro každé $y_0 \in f(M)$ existuje jediné $x \in M$ s vlastností $f(x) = y_0$. Nespecifikujeme-li množinu M , máme na mysli, že uvedená vlastnost platí na celém definičním oboru funkce f .

Věta (rovnice s prostou funkcí). Pokud je f prostá funkce a platí

$$f(x) = f(a),$$

potom platí $x = a$.

Příklad. Vlastnost být či nebýt prostá je zásadní pro vyslovení odpovědi na otázku, zda rovnice má jediné řešení, či zda řešení může být více.

- Funkce $\frac{1}{x}$ je prostá a proto z rovnosti $\frac{1}{x} = \frac{1}{5}$ plyne $x = 5$.
- Funkce x^2 není prostá a proto z rovnosti $x^2 = 7^2$ neplyne $x = 7$. Ve skutečnosti pro každou rovnici ve které není prostá funkce, potřebujeme speciální metodu. Proto máme speciální vzorec pro řešení kvadratické rovnice, nebo například speciální postupy pro řešení goniometrických rovnic.

Inverzní funkce

Inverzní úloha je tak trošku jako reverzní inženýrství. Máme výsledek a potřebujeme znát vstupní data. U funkcí to je supersnadné, u konstrukcí supersložitě. Užitečné je ale obojí.

Definice (inverzní funkce). Necht funkce $f : A \rightarrow B$ je prostá. Pravidlo, které každému x z množiny $f(A)$ přiřadí to (jediné) y , pro které platí $f(y) = x$ se nazývá *inverzní funkce* k funkci f , označujeme f^{-1} .

Poznámka (inverzní funkce při řešení rovnic). Jinak zapsáno, je-li

$$f(y) = x$$

a f má inverzní funkci, platí

$$y = f^{-1}(x).$$

Jedná se o zobecnění pouček jak “převádět výrazy na druhou stranu rovnice”.

Symbol $f^{-1}(x)$ lze tedy chápat buď jako hodnotu inverzní funkce k funkci f v bodě x , nebo jako převrácenou hodnotu k číslu $f(x)$, tj jako $[f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)}$. Nebude-li z kontextu zřejmé, o kterou variantu se jedná, musíme toto upřesnit.

Příklad. Funkce $y = x^2$ není prostá na \mathbb{R} a proto zde nemá inverzní funkci. Pokud definiční obor funkce $y = x^2$ zúžíme na nezáporná čísla, tj. požadujeme $x \geq 0$, je taková funkce prostá a má inverzní funkci. Protože tato úloha má praktický význam, vyplatí se pro tuto inverzní funkci zavést speciální označení. Jak dobře víme, inverzní funkcí je druhá odmocnina, tj. funkce $y = \sqrt{x}$.

Newtonova metoda

Newtonova metoda (též Newtonova Raphsonova metoda) je metoda pro numerické řešení rovnic. To používáme v případě,

že není možné (nebo není účelné) řešit rovnici přesně a snažíme se najít přibližné řešení. Například neznáme inverzní funkci, nebo s touto funkcí neumíme pracovat.

Budeme hledat řešení rovnice

$$f(x) = 0.$$

Budeme postupovat tak, že vyjdeme z nějaké aproximace řešení (získáme například graficky nebo zkusmo hrubou výpočetní silou) a tuto aproximaci budeme postupně zpřesňovat. Postup zpřesňování je takový, že v dosažené aproximaci funkci nahradíme lineární funkcí a další aproximace (zpřesnění předchozí aproximace) bude v nulovém bodě této lineární funkce. Za poměrně snadno splnitelných předpokladů (začneme dostatečně blízko nulového bodu a funkce má v nulovém bodě nenulovou derivaci) postup konverguje ke kořeni studované rovnice a to velmi rychle: každým krokem se přibližně zdvojnásobí počet míst, která máme správně.

Z lineární aproximace funkce f v bodě x_0

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

pro $x_0 = x_n$, $x = x_{n+1}$, $f(x_{n+1}) = 0$ dostáváme

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

a po osamostatnění x_{n+1} přímo iterační vzorec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Tento vzorec používáme opakovaně až do dosažení požadované přesnosti. Obvyklým testem pro ukončení výpočtu je porovnání dvou po sobě jdoucích iterací. Pokud se v rámci požadované přesnosti shodují, výpočet končí a známe přibližné řešení zadané rovnice.

Příklad. Zkusme najít číslo takové, jehož kosinus je stejný jako toto číslo. Rovnici

$$x = \cos x$$

nejprve přepíšeme do tvaru

$$x - \cos x = 0$$

a hledáme vlastně řešení nulový bod funkce $f(x) = x - \cos x$. Po dosažení $f'(x) = 1 + \sin x$ získáváme iterační vzorec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$$

a jednotlivé iterace s počátečním odhadem $x_0 = 1$ a s aproximací na 60 desetinných míst **dávají postupně** následující hodnoty.

```
0.7503638678402438930349423066821768532469930658553590309665831
0.7391128909113616703605852909048902340028928367356569073234079
0.7390851333852839697601251208568043328895331231701889796312306
0.7390851332151606416617026256850263723252232625296426915134025
0.7390851332151606416553120876738734040134207763670352584051590
0.7390851332151606416553120876738734040134117589007574649656806
0.7390851332151606416553120876738734040134117589007574649656806
```

Vidíme, že proces opravdu neuvěřitelně rychle konverguje k řešení rovnice. Rychlost konvergence je důležitá, pokud je výpočet funkční hodnoty “drahý”. Například při modelování namáhání dřevěné konstrukce s nelineární charakteristikou aproximujeme rovnici pomocí konečných diferencí soustavou rovnic, která má desítky tisíc proměnných. Každé kolo iterační metody vyžaduje mnoho výpočtů a rychlost konvergence je zásadní.

Python skript

Poznámka (ad hoc iterace). Newtonovu metodu je možné chápat také tak, že rovnici

$$f(x) = 0$$

přepíšeme do ekvivalentního tvaru

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (*)$$

a poté hledáme iteracemi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

takové x , kdy se levá strana rovná pravé. Někdy je možné použít analogickou iterační techniku, kdy však zadanou rovnici převedeme do jiného tvaru, než (*). Zpravidla snížíme šance, že proces konverguje a snížíme rychlost konvergence, ale i tak to může být výhodné, protože nemusíme počítat derivaci funkce. Ad hoc iterace použijeme například při odvození Jacobiho metody pro iterační řešení soustavy lineárních rovnic.

Příklad (ad hoc iterace). Například rovnici

$$x^4 + 7x - 7 = 0$$

můžeme přepsat do tvaru

$$x = \frac{1}{7}(7 - x^4)$$

a iterační vzorec

$$x_{n+1} = \frac{1}{7}(7 - x_n^4)$$

s počátečním odhadem $x = 1$ dává po deseti iteracích **tři desetinná místa shodná**.


```

0 0.857142857142857
1 0.922889272327007
2 0.896366455780602
3 0.907775917517455
4 0.902989981267125
5 0.905019667139163
6 0.904162819564782
7 0.904525248412642
8 0.904372074163256
9 0.904436833065177

```

Vidíme konvergenci a iterační vzorec jsme našli s minimálním úsilím. Rychlost konvergence však není nijak velká a riziko, že výpočet nebude konvergovat roste se složitostí rovnice a silně závisí na zkušenostech uživatele s touto technikou. Newtonova metoda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 + 7x_n - 7}{4x_n^3 + 7}$$

je jistější a se stejným počátečním odhadem konverguje mnohem rychleji, což ukazuje následující **výpočet**.

```

0 0.909090909090909
1 0.904428379310109
2 0.904417592410086
3 0.904417592352745
4 0.904417592352745

```

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Derivace udává trend ve změnách veličin a díky tomu umožňuje za určitých okolností nahrazovat komplikované funkční vztahy pomocí vztahů lineárních. Toto nazýváme lineární aproximace a je to jedna z zásadních metod, jak si inženýři zjednodušují úlohy, které by byly jinak neřešitelné.
- Derivace dokáže detekovat růst a klesání funkce a díky tomu dokážeme také detekovat body, kde se růst zastaví a změní na klesání nebo naopak. Tyto body nás přirozeně zajímají, protože v těchto bodech je studovaná veličina maximální nebo minimální a to má dopad při minimalizaci nákladů, maximalizaci pevnosti či zisku a jiných úlohách z praktického života.
- Pokud trend (rychlost změny, derivace) nestačí k pochycení zásadních vlastností veličiny (nastává v lokálním extrému nebo v případě, že potřebujeme lepší aproximaci, než je aproximace lineární), máme k dispozici nástroje i v tomto případě: derivace vyšších řádů a Taylorův polynom.

Kapitola 3

Derivace a další užitečné nástroje

<https://youtu.be/va5-0hR4tdQ>

Parita funkce

<https://youtu.be/5vRoVfXUbvE>

V následující definici se budeme zajímat o to, jestli existuje nějaký vztah mezi funkční hodnotou v bodě x z definičního oboru a v bodě opačném.

Definice (parita funkce). Nechť funkce f splňuje následující podmínku: $x \in \text{Dom}(x) \implies (-x) \in \text{Dom}(f)$.

- Řekneme, že funkce f je *sudá* pokud platí $f(-x) = f(x)$.
- Řekneme, že funkce f je *lichá* pokud platí $f(-x) = -f(x)$.
- Řekneme, že funkce f má *paritu*, je-li sudá nebo lichá.

Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy y . Graf liché funkce je středově souměrný podle bodu $[0, 0]$.

U sudé funkce stačí mít algoritmus nebo tabulky pro kladné argumenty. Například kosinus je sudá funkce a platí

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

Analogicky pro funkci sinus jako pro lichou funkci platí

$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

Poznámka (využití sudosti v materiálovém inženýrství). Funkční hodnoty sudé funkce jsou rozloženy symetricky podle osy y . Pokud víme, že úloha bude mít osově symetrické řešení, můžeme tuto znalost použít a hledat řešení mezi sudými funkcemi. Například při řešení prostupu tepla deskou, kdy stejný fyzikální proces probíhá na obou stranách desky, je přirozené modelovat jenom polovinu desky a uprostřed nastavit podmínku, která umožní sudé prodloužení do druhé poloviny. Většinou to bývá nulovost derivace. Proto se například při nestacionární difuzi používá v definici

bezrozměrného času, který charakterizuje fyzikální proces, polovina tloušťky materiálu. Viz P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I nebo odpovídající [e-opora](#).

Sudé a liché funkce jsou, díky svým vlastnostem, v jistém smyslu pěkné. V matematice se často snažíme zapsat nějaký objekt pomocí podobných pěkných objektů. Uvidíme to později například při popisu deformace. Jako ukázkou přístupu si můžeme už teď ukázat následující snadnou větu. Věta je teď asi málo užitečná, ale naučíme se na ní trik, kterým později rozdělíme složitější objekt (matici) na součet dvou jiných a šikovnějších objektů (součet symetrické a antisymetrické matice).

Věta (o rozkladu funkce na součet sudé a liché funkce). Platí

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Každou funkci definovanou na $(-\infty, \infty)$ je možné takto rozložit na součet sudé a liché funkce.

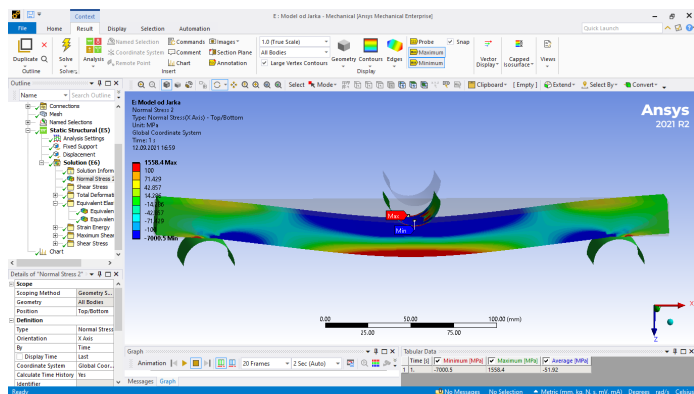
Příklad. Pro funkci $f(x) = e^x$ dostáváme

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

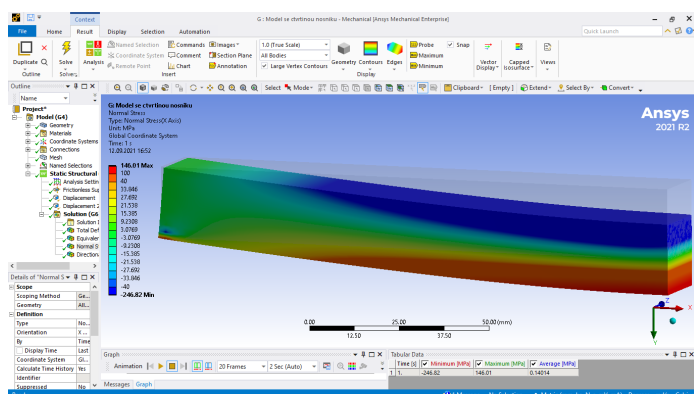
Dvě funkce na pravé straně mají význam v aplikacích a nazývají se hyperbolický kosinus, $\cosh x$, a hyperbolický sinus, $\sinh x$.

Příklad. Je-li funkce $f(x)$ polynom, potom rozkladem na sudou a lichou část dostaneme polynomy, které jsou tvořeny členy původního polynomu tak, že sudá část obsahuje právě členy se sudým exponentem a lichá část právě členy s lichým exponentem.

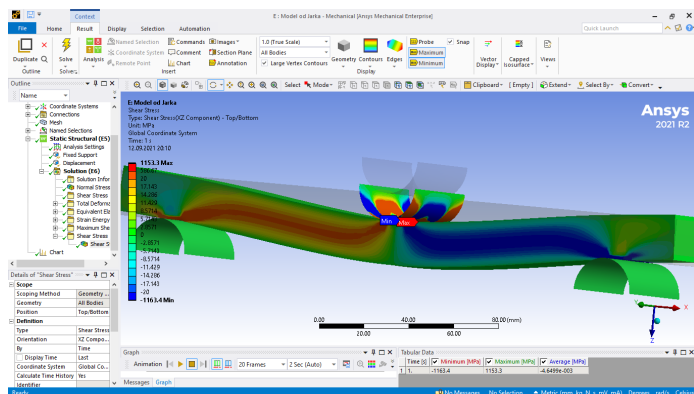
Využití parity při technických výpočtech



Obrázek 3.1: Tříbodový ohyb nosníku. Sleduje se veličina symetricky rozložená vzhledem ke středu (napětí ve směru nosníku).



Obrázek 3.2: Tříbodový ohyb nosníku s využitím symetrie. Počítá se jenom čtvrtina tělesa.



Obrázek 3.3: Tříbodový ohyb nosníku. Sledovaná veličina (smykové napětí v rovině boční stěny) je symetrická, ale vlevo i vpravo se liší znaménkem.

Model tříbodového namáhání nosníku vykazuje dvě roviny symetrie: uprostřed (levá půlka je zrcadlem pravé) a uprostřed podélně podle svislé osy. Stačí tedy modelovat jenom čtvrtinu nosníku. To je výhoda. Protože dřevo je anizotropní materiál s nelineárními materiálovými vlastnostmi, trvá řešení modelu i na nejrychlejších počítačích dlouho a využití symetrie dokáže značně zkrátit čas výpočtu. Na obrázku nahoře je tříbodové namáhání nosníku modelované i s podporami použitými pro deformaci. Dole je zjednodušená situace, kdy nás zajímá jenom část mezi levou dolní a prostřední horní čelistí zkušebního stroje. Protože se jedná jenom o výřez, končí pravá strana poněkud nepřírozně. Po zrcadlovém doplnění chybějící části nosníku se však obě poloviny spojí a výsledek bude odpovídat modelování celého nosníku.

Na dvou obrázcích je barevně napětí ve vodorovném směru. Pokud bychom na přední stranu nakreslili vodorovné čárečky, souvisí toto napětí se silou, která se snaží tyto čárečky natáhnout (kladná hodnota, červená barva) nebo stlačit (záporná hodnota, modrá barva). Z popisu je jasné, že situace je symetrická. Z obrázku například vyčteme, která část je podél nosníku namáhána tahem a která tlakem a jak velká jsou tato tahová a tlaková napětí. Co je však důležité, pravá polovina je zrcadlovou kopií levé poloviny a proto není nutné zde výpočty opakovat. Výsledná funkce bude sudou funkcí proměnné x , pokud počátek soustavy umístíme do středu nosníku a osu x orientujeme ve směru nosníku.

Třetí obrázek znázorňuje smykové napětí v rovině xz , tj. v rovině boční stěny. Pokud bychom si na boční stěně nakreslili čtverečky, sledujeme tímto silou, snažící se tyto čtverečky deformovat. Situace je opět symetrická, jako v zrcadle. Ale v tomto případě platí, že co se zkosí doprava se v zrcadle zkosí doleva a naopak. Proto se sledovaná veličina liší v levé a pravé půlce znaménkem. Bude popsána funkcí, která je lichou funkcí proměnné x . Stačí vypočítat levou půlku a podle ní doplnit půlku pravou.

Pro zajímavost: u dřeva jako nelineárního anizotropního materiálu je nutné před výpočtem rozhodnout, na kolik elementů se během výpočtu těleso rozdělí a při výpočtu postupně zvyšovat zatížení, sledovat poměry v každém kousku tělesa a rozhodovat, kdy se dostaneme mimo platnost Hookova zákona pro deformaci a přepneme v daném místě na nelineární chování. Proto výpočet trvá cca 20 minut nebo 40 minut (podle velikosti elementů, na které se těleso rozdělí). Oproti tomu výpočet například s ocelí trvá řádově vteřiny, protože úloha je lineární, izotropní, dá se vypočítat hned konečný stav a je možné během výpočtu zmenšovat velikost elementů jenom v místech, kde to je nutné. U dřeva výpočet jedné čtvrtiny modelu výrazně pomůže, závislost doby výpočtu na složitosti dokonce není lineární. Výpočet čtvrtinového modelu trvá výrazně kratší dobu než je čtvrtina

doby pro výpočet celého modelu.

Lokální extrémy

<https://youtu.be/E1XxOQDtto0>

Motivace: Jak najít minimum potenciálu?

V příkladě s aproximací potenciálu pomocí Taylorova polynomu se nám povedlo potenciál aproximovat pomocí kvadratické funkce v okolí vrcholu paraboly. To je častá úloha, protože systémy s potenciální energií se často nacházejí ve stavu blízkému minimu této energie. Otázka je, jak toto minimum najít. Budeme řešit poněkud obecnější úlohu, jak hledat nejenom minimální hodnotu, ale i maximální hodnotu. Zaměříme se na minima a maxima, která jsou lokální (s funkcí pracujeme pouze na určitém intervalu, třeba i krátkém).

Lokální extrémy spojitých funkcí

Následující definice si všímají bodů které mají tu vlastnost, že v okolí není možné najít body buď s vyšší funkční hodnotou (potom se jedná o lokální maximum, nikde v okolí mi funkce neukáže více) nebo s nižší funkční hodnotou (analogicky, lokální minimum).

Definice (lokální extrémy). Necht $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Řekneme, že f má v bodě x_0 *lokální maximum*, pokud platí

$$f(x) \leq f(x_0)$$

pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0 .

- Řekneme, že f má v bodě x_0 *lokální minimum*, pokud platí

$$f(x) \geq f(x_0)$$

pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0 .

- Řekneme, že f má v bodě x_0 *lokální extrém*, pokud v tomto bodě má buď lokální maximum nebo lokální minimum.

Přímo z definice lokálních extrémů a rostoucí a klesající funkce plyne, že funkce nemůže mít lokální extrém v bodě, kde je rostoucí nebo kde je klesající. Tuto skutečnost vyjadřuje pomocí derivací následující věta.

Věta (Fermatova o lokálním extrému, nutná podmínka pro lokální extrém). Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, potom je derivace funkce f v bodě x_0 nulová, nebo neexistuje.

Předchozí věta představuje *nutnou podmínku* pro lokální extrém. V bodě kde není splněna (tj. pokud je derivace v tomto bodě kladná nebo záporná) extrém nemůže nastat. Tím je eliminováno obrovské množství bodů z definičního oboru funkce. V prakticky využitelných případech nám po této eliminaci často zůstane jenom jediný bod, podobně jako v následující úloze.

Příklad: Nosník maximální tuhosti

Příklad. Z kulatiny o průměru d chceme získat nosník obdélníkového průřezu, který se při zatížení co nejméně prohýbá. Z fyzikálních úvah víme, že musí být maximální součin wh^3 , kde w je šířka a h výška nosníku.

Trik 1: Budeme měřit jednotky v násobcích průměru. Proto je $d = 1$. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že kulatina má jednotkový průměr.

Z Pythagorovy věty (nakreslete si průřez, tj. obdélník vepsaný do kružnice) plyne $w = \sqrt{1 - h^2}$ a snažíme se tedy řešit úlohu

$$wh^3 = h^3 \sqrt{1 - h^2} \rightarrow \text{MAX},$$

kteřá má fyzikální smysl na intervalu $(0, 1)$.

Trik 2: Protože uvažujeme jenom kladné délky, je funkce kladná a bude maximální tam, kde bude maximální její druhé mocnina. Je tedy možné studovat ekvivalentní úlohu

$$(wh^3)^2 = h^6(1 - h^2) = h^6 - h^8 \rightarrow \text{MAX}$$

na intervalu $(0, \infty)$. Výhoda je zřejmá: místo součinu dvou funkcí, z nichž jedna je navíc složená, studujeme dvoučlenný polynom. Pro funkci

$$f(h) = h^6 - h^8$$

dostáváme

$$\frac{df}{dh} = 6h^5 - 8h^7 = 2h^5(3 - 4h^2).$$

Tato derivace je nulová pro

$$h^2 = \frac{3}{4}$$

tj.

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pro tuto výšku bude mít nosník maximální hodnotu tuhosti. Šířka nosníku bude

$$w = \sqrt{1 - h^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Poměr výšky a šířky u nosníku maximální tuhosti tedy bude $\sqrt{3} : 1$ a šířka bude rovna polovině průměru.

Online výpočet.

Postačující podmínka pro lokální extrém

<https://youtu.be/W7Kf-waoHQE>

Pokud řešíme úlohu s praktickým zadáním, je z povahy úlohy často zřejmé, že lokální extrém požadovaného typu existuje a často to bývá jediný bod, kde je derivace nulová. V takovém případě pro identifikaci lokálního extrému stačí nutná podmínka. Pokud bodů vyhovujících nutné podmínce máme více, nebo pokud je situace méně zřetelná, můžeme existenci lokálního extrému posoudit pomocí následující věty. Ta představuje *dostatečnou (postačující) podmínku* pro lokální extrém. Stačí aby tato podmínka byla splněna a můžeme s jistotou usoudit, že v bodě je extrém a jaký.

Věta (postačující podmínka pro lokální extrémy).

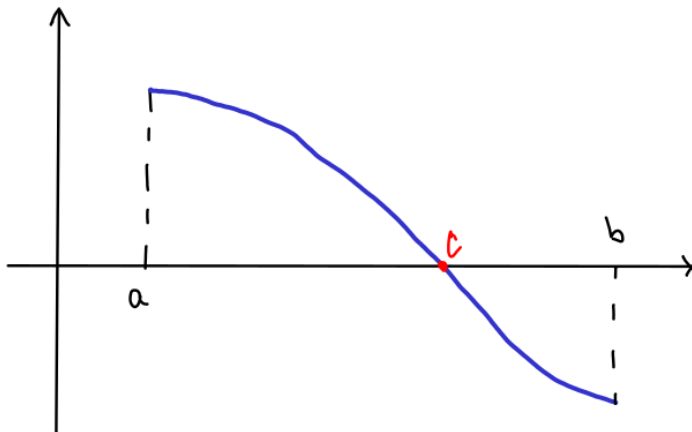
Je-li f spojitá v bodě x_0 a mění-li se v bodě x_0 funkce f z rostoucí na klesající, má funkce f v bodě x_0 lokální maximum. Analogicky, lokální minimum nastává při změně z klesající na rostoucí.

Podle této věty jsou intervaly monotonie zásadní informací pro nalezení lokálních extrémů. Vzhledem k souvislosti monotonie s derivací je tedy nutné se věnovat nalezení intervalů, kde má funkce kladnou derivaci a intervalů, kde má funkce zápornou derivaci.

Bolzanova věta

Pro nalezení intervalů, kde je výraz závislý na jedné proměnné kladný a kde záporný je vynikajícím nástrojem Bolzanova věta představená v následujících odstavcích. Hodí se například pro nalezení intervalů, kde má funkce kladnou a kde zápornou derivaci, což využijeme při nalezení intervalů, kde je funkce rostoucí a kde klesající.

Bolzanova věta je poměrně názorné tvrzení. Hlavním přínosem pražského matematika Bernarda Bolzana bylo, že si uvědomil, že toto tvrzení není snadným důsledkem definice spojitosti a že přes názornost tohoto tvrzení je nutno podat



Obrázek 3.4: Bolzanova věta je jedna z těch, které člověka nepřekvapí. Pokud se má funkce spojitě přehoupnout z jedné strany osy na druhou, musí tuto osu někde protnout.

jeho přesný důkaz, který rozhodně není jednoduchý. Jiná, zdánlivě nevinná tvrzení, však pravdivá být nemusí. Zde se nabízí souvislost se spojitostí funkce a nakreslitelností jedním tahem. Bolzano například našel funkci, která je spojitá, ale její graf je tak komplikovaný, že se nedá nakreslit.

Podmínka $f(a)f(b) < 0$ v následující větě znamená, že funkční hodnoty funkce f v bodech a a b se liší znaménkem.

Věta (Bolzanova věta). Necht f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ a $f(a)f(b) < 0$. Potom existuje c na intervalu (a, b) takové, že platí $f(c) = 0$.

Důsledek.

- Na intervalu, kde je funkce spojitá a různá od nuly, se zachovává znaménko funkce, tj. funkce je zde buď pořád kladná nebo pořád záporná. Mezi oběma variantami se můžeme rozhodnout testováním znaménka funkce v jednom libovolném bodě intervalu.
- Na intervalu, kde má funkce spojitou a od nuly různou derivaci, se zachovává monotonie funkce, tj. funkce je zde buď pořád rostoucí nebo pořád klesající. Mezi oběma variantami se můžeme rozhodnout testováním monotonie (tj. znaménka derivace) v jednom libovolném bodě intervalu.

Poznámka. Lokální extrém nastává tam, kde je funkce spojitá a kde se mění monotonie. Nenastává tam, kde se monotonie spojitě funkce nemění. Přírozeně nenastává ani tam, kde funkce není definována.

Příklad. Najděte lokální extrém funkce $y = \frac{x}{x^2 + 1}$. Derivace je $y' = \frac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$.

Příklad. Najděte lokální extrém funkce $y = \frac{x^3}{x+2}$. Derivace je $y' = \frac{2(x+3)x^2}{(x+2)^2}$.

Příklad: kritická tloušťka izolace trubky

Následující příklad je poněkud překvapivý. Představme si, že potřebujeme obalit horkou trubku izolací, abychom snížili tepelné ztráty. Izolace se zahřeje od trubky a vyzářuje teplo do okolí. Vyzářené teplo je úměrné rozdílu teploty povrchu izolace a teploty vnějšího okolí a také plošnému obsahu povrchu izolace (větší plocha více vyzáří). Roli hraje i kvalita povrchu, to je skryto v příslušné konstantě úměrnosti. S daným materiálem potřebujeme tedy u izolace dosáhnout toho, aby její teplota a povrch byly co nejmenší. Teplotu snížíme, pokud uděláme izolaci silnější, to ovšem zvýší její povrch. A z většího povrchu se vyzáří více tepla. Přidávání izolace by tedy mohlo být kontraproduktivní. Zdá se to být proti logice, ale logika nás někdy může zavést na zcestí a stojí za to jev prozkoumat.

Nejprve ukážeme, že přidávání izolace opravdu může zvýšit tepelné ztráty, ale potom se uklidníme tím, že v praktickém životě, například při izolování topenářských trubek, tento problém nemáme. Potřebujeme dva vzorce, které dodá fyzika, poté již budeme pracovat čistě matematicky.

Teplo Q , které projde za jednotku času při ustáleném vedení tepla povrchem trubky délky L o vnitřním poloměru r , vnějším poloměru R je dáno vztahem

$$\frac{Q}{2\pi Lk} \ln \frac{R}{r} = T_1 - T_2, \quad (*)$$

kde T_1 je teplota uvnitř, T_2 teplota na vnějším okraji a k je tepelná vodivost materiálu. Tento vzorec odvodíme později v přednášce o integrálu.

Teplo Q , které za jednotku času vyzáří plocha trubky o poloměru R a teplotě T_2 do okolí o teplotě T_∞ , vztahené na jednotku povrchu trubky, je přímo úměrné rozdílu teplot a povrchu, tj. platí

$$\frac{Q}{2\pi RL} = h(T_2 - T_\infty).$$

Odsud

$$\frac{Q}{h2\pi RL} = T_2 - T_\infty. \quad (**)$$

Sečtením ohvězdičkových vztahů dostaneme

$$\frac{Q}{2\pi L} \left(\frac{1}{k} \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{hR} \right) = T_1 - T_\infty.$$

Tento vzorec popisuje tepelné ztráty při izolaci trubky o vnitřním poloměru r a teplotě T_1 izolací o vnějším poloměru

R ve vnější teplotě T_∞ . Parametry izolace jsou tepelná vodivost k a s koeficient prostupu tepla h . Budeme sledovat, jak se chová veličina Q (tepelné ztráty) jako funkce proměnné R .

$$Q(R) = 2\pi L \frac{T_1 - T_\infty}{\frac{1}{k} \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{hR}}$$

Pokud chceme minimalizovat tepelné ztráty Q , musíme maximalizovat jmenovatel

$$f(R) = \frac{1}{k} \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{hR} = \frac{1}{k} \ln R - \frac{1}{k} \ln r + \frac{1}{h} R^{-1}.$$

Ostatní veličiny jsou totiž konstantní. Platí

$$\frac{df}{dR} = \frac{1}{k} \frac{1}{R} + \frac{1}{h} (-1) R^{-2} = \frac{Rh - k}{khR^2}.$$

Derivace je nulová pro

$$R = \frac{k}{h}$$

a v okolí tohoto bodu mění znaménko ze záporného na kladné. Proto má funkce $f(R)$ v tomto bodě minimum. To odpovídá maximu funkce Q . Hodnota $R = \frac{k}{h}$ tedy odpovídá maximu funkce tepelných ztrát Q . Pro menší poloměr izolace přidávání další izolace paradoxně zvyšuje tepelné ztráty. Nazývá se *kritický poloměr izolace*.

Online graf funkce

Při použití běžných materiálů pro izolaci vodovodních a topenářských trubek je kritický poloměr tak malý, že při praktické realizaci s ním nemusíme pracovat a materiál se chová dle očekávání, tj. více izolace znamená menší ztráty.

Inženýr, který má navrhnout izolaci elektrického vodiče ovšem vidí problém trochu jinak. Potřebuje naopak tepelné ztráty maximalizovat aby se vodič zbavoval tepla vytvořeného průchodem elektrického proudu. Proto by izolace neměla překročit kritický poloměr.

Odbočka: triky pro práci s funkcemi 1

1. Vhodnou volbou jednotek dokážeme eliminovat některé parametry. Přesněji, vhodnou volnou jednotek dokážeme některým parametrům dát konkrétní numerickou hodnotu. Vyšetřovaná funkce je potom často jednodušší. Viděli jsme v příkladě s vytesáním nosníku maximální tuhosti z kulatiny.
2. Je-li g rostoucí, potom z definice rostoucí funkce plynou ekvivalence

$$\begin{aligned} f(x) \leq f(x_0) &\iff g(f(x)) \leq g(f(x_0)), \\ f(x) \geq f(x_0) &\iff g(f(x)) \geq g(f(x_0)) \end{aligned}$$

a proto funkce $f(x)$ a $g(f(x))$ mají lokální extrémy ve stejných bodech. Toho je možné využít, pokud vidíme, že při vhodné volbě funkce g by byla funkce $g(f(x))$ vhodnější pro hledání lokálních extrémů. Viděli jsme v příkladě s vytesáním nosníku maximální tuhosti z kulatiny.

3. Podobně jako v předchozím bodě je možné uvažovat i klesající funkce g . Ale protože klesající funkce obrací směr nerovností, mění se lokální maximum na lokální minimum a naopak.

$$f(x) \leq f(x_0) \iff g(f(x)) \geq g(f(x_0)),$$

$$f(x) \geq f(x_0) \iff g(f(x)) \leq g(f(x_0))$$

Viděli jsme v příkladě s tepelnými ztrátami tepelně izolovaných trubek. Zde jsme využili toho, že zúžení funkce $\frac{1}{x}$ na kladná čísla je klesající.

Buckinghamův Π -teorém

https://youtu.be/C4_3IbbLpI

Naučíme se, že některé vztahy mezi veličinami se dají určit z fyzikálních jednotek těchto veličin.

Existují tělesa, která jsou závislá jenom na jednom délkovém parametru a pokud tento délkový parametr zvětšíme k -krát, povrchy a obsahy na tomto tělese se zvětšují k^2 -krát a objemy k^3 -krát. To je princip známý z elementární matematiky jako podobnost. Proto objem koule o poloměru r je objem koule o jednotkovém poloměru vynásobený faktorem r^3 a analogické tvrzení platí i pro krychli. Podobnost nacházíme i v živé přírodě. Výrazná je například u ryb, kdy velká ryba je často tvarově blížká zvětšené malé rybě (viz S. Vogel, Comparative biomechanics, kap. 3). V technických aplikacích najdeme stejný princip u skladování sypkého materiálu (písek nasypaný na hromadu zaujme tvar kužele, úhel u vrcholu je daný vlastnostmi písku) nebo vyprazdňování nádrže ve tvaru trychtýře (tekutina má tvar kužele s úhlem u vrcholu daným trychtýřem).

Rozšíření myšlenky podobnosti je rozměrová analýza. Ta je založená na poznatku, že fyzikální zákony je možno vyjadřovat v různých jednotkách. Formální postup umožňuje například následující věta.

Věta (Buckinghamův Π -teorém). *Rovnice*

$$F_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

resp.

$$x_1 = F(x_2, \dots, x_n),$$

kteřá vyjadřuje fyzikální zákon a obsahuje n veličin (včetně fyzikálních a materiálových konstant) vyjádřených pomocí m základních jednotek je možno zapsat jako rovnici vyjádřenou pomocí $(n - m)$ bezrozměrných parametrů, tj.

$$f_0(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0,$$

nebo

$$\pi_1 = f(\pi_2, \dots, \pi_{n-m}).$$

Formální tvar a metoda výběru bezrozměrných parametrů jsou v tuto chvíli pro nás poměrně komplikované a proto bude nejjednodušší si problematiku ukázat na příkladech. Jejich hlavním smyslem je to, že vztah mezi veličinami odhalíme (až na detaily typu multiplikativní konstanta) jenom z fyzikálních jednotek, bez hlubší znalosti fyzikálního pozadí. Stačí identifikovat relevantní parametry.

Příklad (vztah mezi rychlostí, dráhou a dobou u pohybu konstantní rychlostí). U pohybu konstantní rychlostí jsou relevantní parametry rychlost v v kilometrech za hodinu, doba t v hodinách a dráha s v kilometrech. To jsou tři veličiny vyjádřené pomocí dvou základních jednotek. Existuje tedy jediná bezrozměrná veličina, pomocí které je možno zapsat souvislost mezi parametry pohybu. Tu je možno sestavit jediným možným způsobem (až na případné mocniny) a to ve tvaru

$$\pi_1 = \frac{vt}{s}.$$

Podle Buckinghamova teorému tato veličina musí být konstantní, tj. musí platit $\frac{vt}{s} = k$ pro nějakou konstantu k . Prozkoumáním modelového případu, kdy rychlost, dráha i čas jsou jednotkové, vidíme, že konstanta musí být rovna jedné a proto platí

$$\frac{vt}{s} = 1.$$

Odsud již snadno nalezneme $v = \frac{s}{t}$ a další variace vzorce pro rovnoměrný pohyb tak jak je známe ze základní školy.

Příklad (vztah mezi objemem a povrchem koule). Pro nalezení přepočtu mezi objemem koule V (v metrech krychlových) a povrchem koule S (v metrech čtverečních) máme $n = 2$ (veličiny S a V) a $m = 1$ (jediná základní jednotka metr). Tedy platí $n - m = 1$ a vztah se dá zapsat pomocí jedné bezrozměrné veličiny. Pro tuto veličinu existuje jenom jediná možná varianta: $\pi_1 = V^2 S^{-3}$. Potom je funkce

f konstantní a pro nějakou hodnotu k platí

$$V^2 S^{-3} = k$$

a odsud

$$V^2 = kS^3.$$

Tedy vhodné mocniny objemu a obsahu jsou si úměrné. Tento výsledek je možné získat i kombinací vzorců $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ a $S = 4\pi r^2$, ovšem je nutná znalost těchto vzorců a provedení netriviálního množství matematických výpočtů. Jako výsledek takové detailnější analýzy bychom navíc věděli, jaká je hodnota konstanty úměrnosti k . My jsme si však chtěli ukázat dosažení výsledku s minimální námahou a s minimálními vstupními znalostmi, abychom podobný postup mohli používat i v jiných případech, kdy alternativní postup nemáme k dispozici.

Příklad (tuhost nosníků čtvercového a kruhového průřezu). Veličinou ovlivňující tuhost nosníku při daném materiálovém složení je kvadratický moment průřezu I v jednotkách metr na čtvrtou. Pokud je průřez nosníku daný jenom jedním délkovým parametrem a (například čtvercový nebo kruhový průřez), máme stejný případ jako výše, kdy počet parametrů o jedničku převyšuje počet základních jednotek: $n = 2$ a $m = 1$. Vztah mezi kvadratickým průřezem I a rozměrem a se dá vyjádřit pomocí jedné bezrozměrné veličiny a máme vlastně jenom jedinou možnost jako tuto veličinu sestavit:

$$\pi_1 = \frac{I}{a^4}.$$

Stejně jako v předchozím příkladě existuje konstanta k taková, že $\frac{I}{a^4} = k$, tj.

$$I = ka^4.$$

Po seznámení se s dvojným integrálem uvidíme, že pro čtvercový průřez o straně čtverce a je $k = \frac{1}{12}$.

Příklad (tuhost nosníků obdélníkového průřezu). Budeme pokračovat v předchozím příkladě. Pro obdélníkový průřez o rozměrech w krát h je $m = 3$ (tři veličiny w , h , I) a $n = 1$ (jediná základní jednotka metr). Pokud však víme, že dva nosníky vedle sebe se prohýbají stejně, jako by byly spojeny, víme, že mezi I a w musí být přímá úměrnost. Proto můžeme místo kvadratického momentu průřezu pracovat s kvadratickým momentem na jednotku šířky $\frac{I}{w}$ v jednotkách metr na třetí a potom stejně jako v minulém případě existuje konstanta k taková, že $\frac{I}{w} = kh^3$, tj.

$$I = kwh^3.$$

To je přesně v souladu s tvrzením, které jsme použili v příkladu s maximalizací tuhosti nosníku obdélníkového průřezu, kdy jsme tvrdili, že mírou tuhosti je součin wh^3 .

Pokud více nosníků pokládáme na sebe nebo vedle sebe, tuhost se sčítá. Pokud nosníky vedle sebe slepíme bočními hranami, nic se nezmění, protože na spoji není žádné tahové napětí. Tuhost tedy roste lineárně s šířkou. Pokud tři nosníky položíme na sebe, vzroste tuhost na trojnásobek jednoho nosníku. Tuhost nosníku však také roste se třetí mocninou výšky. Nosníky položené na sebe a slepené se chovají jako jediný nosník. Pokud tři nosníky slepíme nebo spojíme hřebíky, vzroste tuhost 3^3 -krát, tj. 27-krát v porovnání s jediným nosníkem. Tři spojené nosníky mají tedy devítinásobnou tuhost v porovnání se třemi na sobě volně položenými.

Vektorové funkce, gradient

<https://youtu.be/trdMQ6WOGlk>

Výstupem vektorové funkce je vektor. Vstupem je buď reálné číslo (funkce jedné proměnné), nebo vektor. V prvním případě se jedná o parametrickou křivku v **rovině** nebo v **prostoru**, ve druhém případě bývá zpravidla na vstupu stejný počet veličin jako na výstupu a jedná se o vektorové pole (každému bodu v rovině je přiřazen **rovinný vektor** nebo každému bodu v prostoru je přiřazen **prostorový vektor**). Vektory zapisujeme pomocí jejich komponent následovně.

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = P\vec{e}_1 + Q\vec{e}_2 + R\vec{e}_3$$

Gradient

Pokud nerovnoměrnost v prostorovém rozložení skalární veličiny iniciuje nějaký děj, je nutné znát směr, ve kterém tato veličina roste nebo klesá. To jsme viděli například u rovnice vedení tepla, kde nerovnoměrnost v prostorovém rozložení teploty dává vznik toku tepla. V jednorozměrném případě byla situace jednoduchá a stačí se řídit znaménkem derivace. Ve dvourozměrném nebo trojrozměrném případě je bohužel situace složitější ale i zde máme nástroj pro detekci směrů ve kterém veličina roste nebo klesá a také intenzity tohoto růstu nebo poklesu.

Definice (gradient). Buď $f(x, y)$ funkce dvou proměnných, která má parciální derivace. *Gradientem* funkce f rozumíme vektor

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

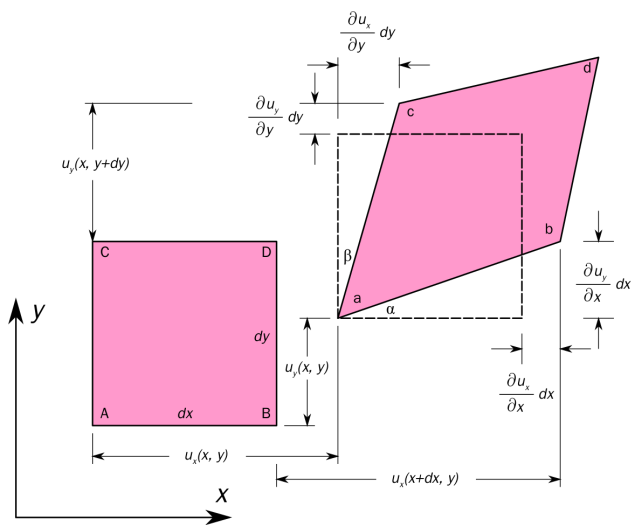
Poznámka. Formálně též často píšeme

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) f,$$

kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ je operátor, se kterým pracujeme jako s vektorem. Nazývá se *nabla* nebo *Hamiltonův operátor*.

Poznámka (fyzikální význam gradientu). Gradient skalární veličiny f je vektorová veličina, která vyjadřuje směr a intenzitu maximálního růstu veličiny f . Přesněji, výsledkem gradientu je vektor ve směru maximálního růstu veličiny f . Délka tohoto vektoru je nárůst veličiny f na intervalu jednotkové délky. Pro rovnoměrně rozloženou veličinu v prostoru (konstantní) je gradient nulový. Proto je možné gradient chápat jako míru nerovnoměrného rozložení veličiny v prostoru. Řada fyzikálních dějů probíhá tak, že tato nerovnoměrnost vyvolá proudění, které se snaží tuto nerovnoměrnost vyrovnat, například vedení tepla nebo difuze. V praxi nás proto většinou zajímá směr maximálního poklesu, tj. $-\nabla f$.

Lineární aproximace rovinné transformace



Obrázek 3.5: Působením síly se element materiálu může posunout, rotovat, deformovat. Tuto změnu potřebujeme zachytit. Zdroj: <https://physics.stackexchange.com/questions/311716/geometric-derivation-of-the-infinitesimal-strain-tensor/311744>

Následující pasáže jsou motivací pro tematický celek, kterému se začneme věnovat na další přednášce.

Rozšiřují lineární aproximaci na případ, kdy chceme popsat transformaci roviny. Protože v tomto případě pracujeme se dvěma souřadnicemi, je nutno uvažovat dvě funkce (pro každou souřadnici jednu funkci) a každá funkce závisí na dvou proměnných (na obou souřadnicích). Popis, který si představíme, využijeme při popisu matematického namáhání při odvození veličin, na nichž je založen obecný Hookův

zákon dávající do souvislosti deformaci materiálu a působení vnější síly.

Lineární aproximaci funkce jedné proměnné můžeme zapsat ve tvaru

$$f(x + \Delta x) \approx f + \frac{df}{dx} \Delta x,$$

kde na pravé straně pro stručnost nevyepisujeme závislost na x . Podobně můžeme zapsat lineární aproximaci pro funkci dvou proměnných x_1 a x_2 ve tvaru

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2) \approx f + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1, \quad f(x_1, x_2 + \Delta x_2) \approx f + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2.$$

Uvažujme nyní mechanické namáhání, kdy se těleso posunuje, rotuje a deformuje vlivem působení vnější síly a bod (x_1, x_2) se posune o $(u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))$. Pomocí lineárních aproximací

$$u_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \approx u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Delta x_2$$

$$u_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \approx u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Delta x_2$$

dostáváme aproximace této transformace. Při transformaci ve 3D je situace podobná, jenom jsou zde další členy od třetích souřadnic. Aby se situace nestala nepřehlednou, je klasický způsob zápisu neudržitelný. Nástroj pro přehlednou formulaci lineární aproximace dostaneme k dispozici později po probrání maticového počtu a maticového násobení. Poté budeme díky lineární aproximaci schopni zformulovat souvislost mezi deformací a působením vnější síly.

Za výše uvedenou lineární aproximaci však platíme jistou daň. Lineární zobrazení mimo jiné transformuje přímky na přímky, rovnoběžky na rovnoběžky, střed úsečky na střed úsečky. Deformaci, která tyto podmínky nesplňuje, tím pádem nemůžeme podchytit. Lineární aproximace je přesná jenom pro relativně malé deformace. Proto se také výsledný produkt, ke kterému se v průběhu semestru dopracujeme, nazývá tenzor malých deformací.

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Derivace dokáže detekovat růst a klesání funkce a díky tomu dokážeme také detekovat body, kde se růst zastaví a změna na klesání nebo naopak. Tyto body nás přirozeně zajímají, protože v těchto bodech je studovaná veličina maximální nebo minimální a to má dopad při minimalizaci nákladů, maximalizaci pevnosti či zisku a jiných úlohách z praktického života.
- Silným nástrojem dokáží být i jednodušší postupy, jako například rozměrová analýza reprezentovaná Buckinghamovým Π teorémem.

Kapitola 4

Integrál, integrál a integrál

<https://youtu.be/w2qTl73CsnI>

Naučili jsme se pracovat s derivacemi, tedy s rychlostí změny. Známe-li funkci a zderivujeme ji, dostaneme rychlost změny. Pokud potom původní funkci “ztratíme” a zůstane nám jenom derivace, je otázka, jestli dokážeme původní funkci z této derivace najít. Odpověď je zní, že v jistém smyslu ano. Spojení “v jistém smyslu” naznačuje, že souvislost nebude tak snadná jako je souvislost u navzájem inverzních funkcí. Derivováním totiž můžeme ztratit aditivní konstanty, které v derivaci dávají nulu a zpětně není možné rekonstruovat, derivováním jaké konstanty jsme tuto nulu dostali. A protože problém uchopíme poněkud obecněji, uvedeme si dokonce hned tři různé “protijedy” na derivování.

Jeden představíme jako opak derivace (**neurčitý integrál**), druhý jako změnu funkce vypočtenou ze zadané rychlosti změny (**Newtonův určitý integrál**) a třetí jako náhradu součtu pro případ, kdy potřebujeme sčítat nekonečně mnoho příspěvků, z nichž každý má v podstatě nulovou hodnotu (**Riemannův určitý integrál**).

Intervalem I budeme rozumět otevřený interval.

Motivace: Jak z derivace křivky získat rovnici křivky?

Na této úloze si připomeneme další roli derivace (směrnice tečny) a představíme si úžasný druh mostů – mosty zavěšené na nosných lanech, které mohou překlenout obrovské vzdálenosti.

U zavěšeného mostu lano nese prostřednictvím svislých lan hmotnost rovnoměrně rozloženou ve vodorovném směru. Je potřeba zvolit vhodnou délku svislých lan tak, aby síla působící na nosné lano byla vždy ve směru tohoto nosného lana. Potom je systém nejstabilnější a nejpevnější.

Díky symetrii stačí uvažovat jenom půlku mostu. Na část lana nad intervalem $[0, x]$ působí následující síly.

- Tahová síla lana v minimu ($x = 0$) o velikosti T doleva.

- Gravitační síla o velikosti $G = \mu xg$ směrem dolů, kde μ je lineární hustota (hmotnost jednotkové délky mostu) a μx je hmotnost části mostu, odpovídající intervalu $[0, x]$.
- Tahová síla F doprava nahoru na pravém konci. Protože je most v klidu, velikost a směr této síly jsou takové, aby součet všech sil působících na uvažovanou část mostu byl roven nule. Jako stavitelé mostu chceme, aby směr síly souhlasil se směrem lana, tj. aby síla byla tečná k nosnému lanu.

Vektorový součet sil musí být nulový a proto všechny tři síly tvoří pravoúhlý trojúhelník. Poměr odvěsen $\frac{\mu g x}{T}$ udává směrnici přepony. Křivka udávající směr nosného lana tedy musí mít tvar funkce, která splňuje

$$y' = \frac{\mu g}{T} x,$$

kde μ , g , a T jsou pro danou úlohu konstanty.

Z rozboru vidíme, že máme danou křivku danou pomocí derivace a tuto křivku musíme najít. Formálně to je stejný problém, jako když máme rychlost změny funkce a chceme najít časový průběh této funkce. Mechanickým modelem může být například pohyb zadanou rychlostí a úloha určit dráhu tohoto pohybu. Tento problém se na základní škole redukuje na případ pohybu konstantní rychlostí ($s = vt$) a na střední škole rozšiřuje na rychlost, která se mění jako lineární funkce ($s = \frac{1}{2}at^2$). Nyní stojíme před úkolem, jak si poradit v případě obecné rychlosti, měnící se libovolně. Přesně to je úkol pro neurčitý integrál.

Neurčitý integrál

https://youtu.be/lfg_ylc87NQ

Představíme nástroj, který nám umožní odpovědět na následující otázky.

- Je znám směr křivky v každém bodě (tj. směr tečny, derivace). Jaká je rovnice křivky?

- Je známa rychlost, s jakou se mění veličina f . Jaká je rovnice udávající závislost veličiny f na čase?

Definice (neurčitý integrál). Řekneme, že funkce F je *primitivní funkcí* k funkci f na intervalu I , jestliže platí

$$F'(x) = f(x)$$

na intervalu I . Množina všech primitivních funkcí k funkci f se nazývá *neurčitý integrál* funkce f a značí

$$\int f(x) dx.$$

Otázkou existence primitivní funkce se budeme zabývat na další přednášce. Otázku (ne-)jednoznačnosti řeší následující věta.

Věta (jednoznačnost primitivní funkce). *Primitivní funkce je dána jednoznačně, až na aditivní konstantu.*

- Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I , platí totéž i pro funkci $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.
- Jsou-li F a G primitivní funkce k téže funkci f na intervalu I , existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$F(x) = G(x) + c$$

na I .

Příklad. Funkce x^2 má primitivní funkce například $\frac{1}{3}x^3$, nebo $\frac{1}{3}x^3 + 7$, nebo $\frac{1}{3}x^3 + \pi$, protože derivace všech těchto tří funkcí je x^2 . Platí

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Vzorce.

- $\int c dx = cx + C$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$
- $\int \frac{1}{A^2 + x^2} dx = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A} + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{A} + C$
- $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$, kde $F(x) = \int f(x) dx$

Věta (linearita neurčitého integrálu). *Neurčitý integrál zachovává součet a násobení konstantou. Tedy pro libovolné funkce f, g a libovolnou konstantu c platí*

$$\int f + g dx = \int f dx + \int g dx,$$

$$\int cf dx = c \int f dx.$$

Příklad.

$$\int 2x^4 - e^{4x} + \frac{1}{x} dx = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}e^{4x} + \ln|x| + C$$

Funkční předpis z rychlosti změny a výchozího stavu

Uvažujme těleso, jehož teplota klesá známou rychlostí. Derivace teploty podle času je $\frac{dT}{dt} = -0.1e^{-0.01t} \text{ } ^\circ\text{C}/\text{min}$. Cílem je najít teplotu jako funkci času. Dodatečná informace je, že počáteční teplota je 28°C .

Použijeme skutečnost, že integrál konstantního násobku je konstantní násobek integrálu a vzorec

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c.$$

Teplota jako funkce času je dána integrálem

$$T = \int -0.1e^{-0.01t} dt$$

$$= \frac{-0.1}{-0.01} e^{-0.01t} + C$$

$$= 10e^{-0.01t} + C.$$

Hodnota C souvisí s počáteční teplotou. Protože počáteční teplota je 28°C , dosadíme do vztahu pro T hodnoty $T = 28^\circ\text{C}$ a $t = 0$ a ze vzniklé rovnice určíme C . Dostáváme takto podmínku

$$28 = 10e^0 + C,$$

která implikuje $C = 18^\circ\text{C}$. Funkce udávající závislost teploty místnosti na čase je

$$T = (18 + 10e^{-0.01t}) \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Poznámka (vlhkost dřeva elektrickou metodou). Podobný výpočet se využívá u měření elektrického odporu dřeva pro stanovení vlhkosti. Protože elektrický odpor dřeva je velký, není vhodné pro určení elektrického odporu použít Ohmův zákon a změřený proud a napětí. Jedna z možností je měření času nutného k nabití nebo vybití kondenzátoru přes odpor. V případě nabíjení proud exponenciálně klesá (zdůvodníme později v přednášce věnované diferenciálním rovnicím) a proto (díky elektrickým vlastnostem kondenzátoru) exponenciálně klesá i rychlost, s jakou roste napětí na kondenzátoru. Toto napětí je nutné pro výpočet odporu. Pokud známe rychlost, s jakou se napětí mění, určíme napětí integrováním a znalostí napětí na začátku nabíjení.

Poznámka (veličina vypočtená z rychlosti své změny). Pokud se veličina $f(t)$ mění v čase rychlostí $r(t)$, platí

$$f(t) = \int r(t) dt,$$

přičemž pravá strana je dána jednoznačně až na aditivní konstantu. To koresponduje s pozorováním, že rychlost změn k jednoznačné identifikaci časového průběhu měnící se veličiny nestačí. Je potřeba mít zadán ještě výchozí stav.

Příklad. V úvodu přednášky je popsáno, že křivka, která je přirozená pro nosné lano zavěšeného mostu, splňuje rovnici

$$y' = \frac{\mu g}{T} x.$$

Pouze za této podmínky bude lano namáháno ve směru své nejvyšší pevnosti, tj. v podélném směru, ve směru své osy. Integrací získáme

$$y = \int \frac{\mu g}{T} x dx = \frac{\mu g}{2T} x^2 + C.$$

Lano tedy bude v každém bodě namáháno ve směru své osy pokud má tvar paraboly. Prohnutí paraboly (koeficient u x^2) je dáno hmotností mostu a tahem napínajícím lano.

Určitý integrál (Newtonův)

<https://youtu.be/t3oJxxPZxkY>

Představíme si mírnou modifikaci neurčitýho integrálu. Rychlost změny nebudeme používat k hledání předpisu funkce, ale budeme hledat změnu funkce na zadaném intervalu.

Definice (Newtonův určitý integrál). Buď f funkce a F její primitivní funkce na intervalu I . Buď $[a, b] \subset I$ podinterval v I . *Určitým integrálem funkce f na intervalu $[a, b]$ rozumíme veličinu označenou a definovanou vztahem*

$$\int_a^b f(x) dx := F(b) - F(a).$$

Označení. Výraz $F(b) - F(a)$, tj. změnu funkce $F(x)$ na intervalu $[a, b]$, označujeme také $[F(x)]_a^b$. Tento zápis se často používá jako mezivýpočet při výpočtu určitého integrálu.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} (1)^3 - \frac{1}{3} (0)^3 = \frac{1}{3}$$

Věta (linearita určitého integrálu). *Určitý integrál zachovává součet a násobení konstantou. Tedy pro libovolné funkce f, g a libovolnou konstantu c platí*

$$\int_a^b f + g dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx,$$

$$\int_a^b c f dx = c \int_a^b f dx.$$

Snadným důsledkem definice určitého integrálu je následující věta.

Věta (záměna mezi a rovnost mezi v určitém integrálu). *Platí*

$$\int_a^a f(x) dx = 0,$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Změna funkce z rychlosti změny (časová změna teploty)

Uvažujme těleso, jehož teplota klesá známou rychlostí. Derivace teploty podle času je $\frac{dT}{dt} = -0.1e^{-0.01t} \text{ } ^\circ\text{C}/\text{min}$. Chceme určit pokles teploty za první hodinu a pokles teploty za druhou hodinu.

Neurčitý integrál

$$\int -0.1e^{-0.01t} dt = 10e^{-0.01t} + C$$

jsme vypočítali v podkapitole s neurčitým integrálem. Potřebovali jsme ještě znát počáteční hodnotu teploty a našli jsme teplotu jako funkci času.

Nyní zapojíme určitý integrál. Nepotřebujeme informaci o počáteční teplotě, ale zato jsme schopni určit jenom změnu teploty za daný časový interval. Za první hodinu bude změna teploty

$$\begin{aligned} \int_0^{60} -0.1e^{-0.01t} dt &= [10e^{-0.01t}]_0^{60} \\ &= 10e^{-0.01 \cdot 60} - 10e^{-0.01 \cdot 0} \\ &\approx -4.5^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Za druhou hodinu bude změna teploty

$$\begin{aligned} \int_{60}^{120} -0.1e^{-0.01t} dt &= [10e^{-0.01t}]_{60}^{120} \\ &= 10e^{-0.01 \cdot 120} - 10e^{-0.01 \cdot 60} \\ &\approx -2.5^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Online výpočet.

Poznámka (změna veličiny vypočtená pomocí rychlosti). Pokud se veličina $f(t)$ mění v časovém intervalu od $t = a$ do $t = b$ rychlostí $r(t)$, je změna veličiny f za tento časový okamžik rovna

$$\Delta f = f(b) - f(a) = \int_a^b r(t) dt.$$

Změna funkce z rychlosti změny (prostorová změna teploty)

Mějme ustálené proudění tepelnou izolací mezi dvěma soustřednými válcovými plochami. Délka izolace je L , vnitřní a vnější poloměr jsou r a R . Teploty uvnitř a vně jsou T_1 a T_2 . Izolací prostupuje teplo rychlostí Q , tj. každou myšlenou válcovou plochou o poloměru x projde za jednotku času teplo Q . Cílem je najít vztah dávající uvedené veličiny do souvislosti. Odvodíme vztah, který jsme použili v přednášce o lokálních extrémech a slíbili dokázat později.

Z Fourierova zákona plyne, že teplo, které projde jednotkovou plochou za jednotku času, je úměrné záporně vzatému gradientu prostorové změně teploty, tj.

$$\frac{Q}{2\pi x L} = -k \frac{dT}{dx},$$

kde k je tepelná vodivost. Tento zákon definuje rychlost, s jakou se mění teplota v prostoru a my jej použijeme ke stanovení vztahu mezi tokem tepla a teplotním rozdílem mezi vnější a vnitřní stranou izolace. Snadnou úpravou dostáváme

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{Q}{2k\pi x L}$$

a odsud

$$\Delta T = \int_r^R -\frac{Q}{2k\pi x L} dx = -\frac{Q}{2k\pi L} \int_r^R \frac{1}{x} dx.$$

Protože platí

$$\int_r^R \frac{1}{x} dx = [\ln x]_r^R = \ln R - \ln r = \ln \frac{R}{r},$$

dostáváme po dosazení a vynásobení minus jedničkou vztah

$$-\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{Q}{2k\pi L} \ln \frac{R}{r},$$

který jsme použili v přednášce o lokálních extrémech a slíbili dokázat později.

Stejný princip funguje pro libovolné ustálené proudění radiálním směrem při konstantní materiálové charakteristice. Stejný přístup je možné použít pro proudění podzemní vody popsané Darcyho zákonem (namísto Fourierova zákona) pro zvedeň namísto izolace (zvedeň je prostor kde se nachází a teče podzemní voda, tj. něco jako podzemní rybník nebo řeka zasypaná pískem nasáklým vodou) a piezometrickou výškou h namísto teploty (piezometrická výška udává, jak vysoko vystoupá voda ve zkušebním vrtu). Pokud máme zvedeň s napjatou hladinou (voda je pod tlakem sevřena mezi dvěma nepropustnými vrstvami), je vodivost konstantní. Rovnice popisující tuto situaci má tvar

$$h - h_0 = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r}{r_0}$$

a nazývá se **Thiemova rovnice**.

Pokud sledujeme prostup tepla izolací, jejíž teplotní vodivost se mění s teplotou, není veličina k konstantní a proto výše uvedený postup není možné realizovat a odvozený vzorec pro takový případ neplatí. Stejná situace nastává u podzemní vody a proudění s volnou hladinou (není horní nepropustná vrstva zvodně). Takové úlohy vedou na jinou problematiku, kterou se naučíme řešit v kapitole s diferenciálními rovnicemi.

Poznámka (změna veličiny vypočtená pomocí gradientu). Pokud se veličina f mění podél přímky v závislosti na veličině x na intervalu od $x = a$ do $x = b$ rychlostí $r(x)$ (tj. $r(x) = \frac{df(x)}{dx}$), je změna veličiny f na intervalu $[a, b]$ rovna

$$\Delta f = f(b) - f(a) = \int_a^b r(x) dx.$$

Další motivace

Ze středoškolské fyziky dobře známe vzorec pro dráhu, práci a tlakovou sílu. Ovšem jenom v extrémně pěkných případech.

- Dráha rovnoměrného pohybu je určena vzorcem

$$s = vt. \quad (1)$$

Tento vzorec není použitelný pro pohyb proměnnou rychlostí. Z kapitoly o neurčitěm integrálu víme, že obecný vzorec je

$$s = \int v dt. \quad (2)$$

Pokud je v konstantní, vzorec (1) je důsledkem vzorce (2).

- Hydrostatická tlaková síla F působící ve vodě v hloubce h na plochu o velikosti S se určí podle vztahu

$$F = Sh\rho g,$$

kde ρ je hustota vody a g tíhové zrychlení. Tento vzorec však není možné použít, pokud různé části plochy jsou v různých hloubkách. Například není možné pomocí tohoto vzorce určit celkovou sílu na svislou stěnu reprezentující hráz přehrady.

- Práce vykonaná konstantní silou F po dráze s je

$$W = Fs. \quad (3)$$

Co když se ale síla nebo dráha mění? Pokud nás zajímá práce nutná k navinutí visícího řetězu na rumpál, síla se během namotávání plynule zmenšuje, protože visící kus řetězu se při namotávání zkracuje. Pokud nás zajímá práce nutná k vyčerpání vodní nádrže, musíme každý litr vody, který je na dně, "tahat" po delší dráze než každý litr vody, který je na hladině a proto se mění dráha. Vzorec (3) selhává v obou případech. Jednou kvůli nekonstantní síle, podruhé kvůli dráze.

- Obsah obrazce mezi konstantní funkcí f a osou x nad intervalem $[a, b]$ se vypočte snadno, protože se jedná o obdélník se stranami f a $\Delta x = b - a$. Proto

$$S = f \cdot \Delta x.$$

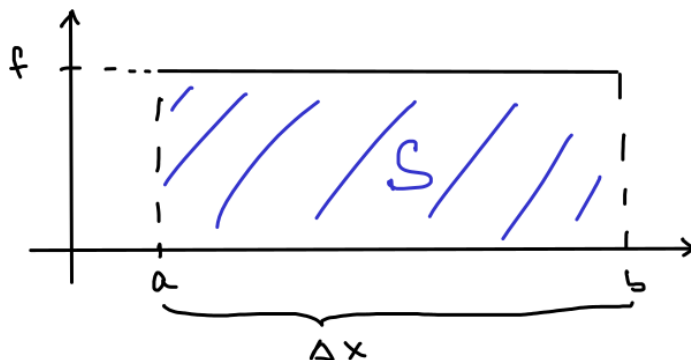
Tento přístup však není možné použít, pokud se funkce f na intervalu $[a, b]$ mění. Formálně je tato úloha stejná jako ostatní úlohy výše, má však snadnou geometrickou interpretaci. Právě tuto interpretaci využijeme v následujícím k definici druhého typu určitého integrálu (Riemannova).

Určitý integrál (Riemannův)

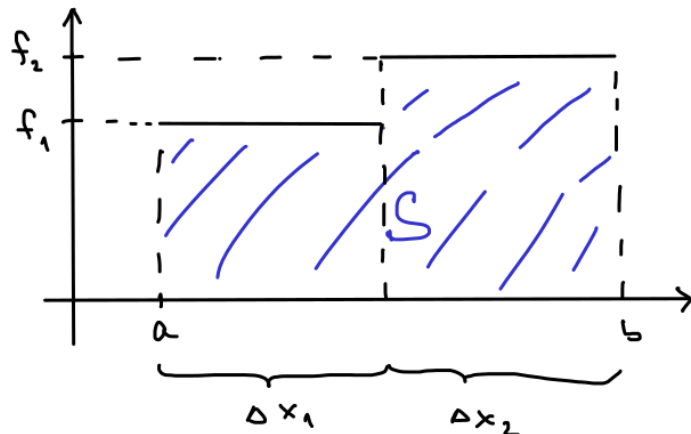
<https://youtu.be/iKG-4g864Q4>

Úloha 1. Snadným důsledkem vzorce pro obsah obdélníka je obsah obrazce mezi grafem konstantní funkce a osou x .

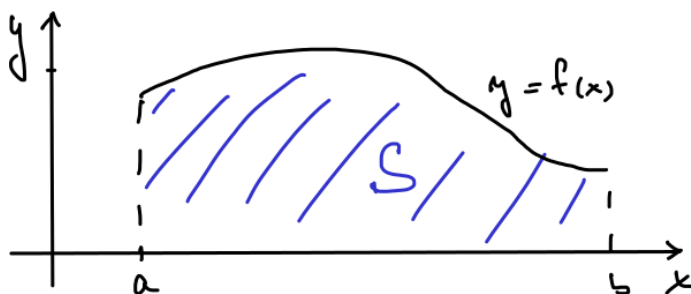
$$S = f\Delta x$$



Obrázek 4.1: Obsah pod konstantní funkcí.



Obrázek 4.2: Obsah pod funkcí po částech konstantní.



Obrázek 4.3: Obsah pod obecnou funkcí je $\int_a^b f(x) dx$.

Úloha 2. Obsah pod funkcí složené ze dvou konstantních funkcí napojených na sebe se vypočte jako součet obsahů dvou obdélníků.

$$S = f_1 \Delta x_1 + f_2 \Delta x_2$$

Toto se dá snadno zobecnit na libovolný počet intervalů a pro libovolnou po částech konstantní funkci.

Prostředky matematické analýzy je možné “zjemňovat dělení do nekonečna”, přesněji, můžeme použít limitní přechod podobný limitnímu přechodu, který v definici derivace převedl podíl (průměrnou rychlost) na derivaci (okamžitou rychlost). Díky tomu není nutné se omezovat na po částech konstantní funkce, ale postup bude fungovat i pro velmi obecné funkce. Výsledným produktem je Riemannův integrál.

Riemannův integrál je velmi názorný, ale poměrně obtížné se počítá, pokud postupujeme přímo podle definice. Pokud však je funkce v určitém smyslu pěkná (má primitivní funkci na intervalu, který uvnitř obsahuje interval $[a, b]$) jsou Riemannův a Newtonův integrál stejné. Proto mezi nimi nerozlišujeme, používáme jeden pojem **určitý integrál** a počítáme jej pomocí definice Newtonova integrálu. Obsah obrazce pod křivkou $f(x)$ je roven

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

V teorii Riemannova integrálu má vzorec

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

postavení věty nazývané **Newtonova–Leibnizova věta** a je to věta udávající, jak vypočteme určitý integrál pomocí neurčitého. Zajímavé je, že v některých případech je vhodné postupovat naopak a určit neurčitý integrál pomocí integrálu určitého, což si ukážeme v následující přednášce.

Nasčítání příspěvků k celkové dráze

1. Těleso pohybující se po dobu Δt konstantní rychlostí v po přímce urazí dráhu

$$s = v \Delta t.$$

2. Těleso pohybující se po dobu Δt_1 konstantní rychlostí v_1 po přímce a poté po dobu Δt_2 rychlostí v_2 urazí celkovou dráhu

$$s = v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2.$$

Toto je možné zobecnit na libovolný pohyb skládající se z konečného počtu úseků, kdy se těleso pohybuje konstantní rychlostí.

$$s = v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \dots + v_k \Delta t_k = \sum_{i=1}^k v_i \Delta t_i$$

Příspěvek za každou část pohybu, kdy je rychlost konstantní, je

$$\Delta s = v \Delta t,$$

kde v a Δt jsou příslušná rychlost a doba pohybu, po kterou je rychlost konstantní.

3. Pokud se rychlost mění spojitě a a a b jsou počáteční a koncový okamžik pohybu, platí

$$s = \int_a^b v(t) dt.$$

Nasčítání příspěvků k celkové síle na pře- hradu

Mojžíšův most (Holandsko, pevnost Fort de Roovere) je v celosvětovém měřítku unikátním mostem. Je postavený ze dřeva a zanořený do vodního příkopu okolo pevnosti tak, aby splýval s krajinou. Představme si zjednodušeně, že vodní masu drží svíslá dřevěná stěna a budeme se snažit najít celkovou sílu působící na tuto stěnu tlakem vodní masy. (Ve skutečnosti most leží na dně a dno se zvedá směrem ke stěnám mostu. Google umí najít stavební plán mostu.) Délku mostu označíme L , výšku stěny (přesněji vzdálenost ode dna po hladinu vody) označíme H .

1. Tlaková síla na rovinnou plochu o obsahu S vyvolaná tlakem p je rovna

$$F = pS.$$

Tlak v hloubce h je dán vzorcem

$$p = h\rho g,$$

kde ρ je hustota vody a g tíhové zrychlení.

2. Myšlenkově rozdělíme celou stěnu na části. Tlaková síla na celou stěnu je rovna součtu tlakových sil, které působí na jednotlivé části. Má smysl volit části tak, aby na nich byl tlak konstantní. Myšlenkově tedy stěnu rozřežeme na vodorovné pásy.
3. Na myšlený vodorovný pás, který má výšku Δx a je v hloubce x , působí tlak $p = x\rho g$. Obsah pásu je podle vzorce pro obsah obdélníka $\Delta S = L\Delta x$. Celková síla působící na tento pás je

$$\Delta F = p\Delta S = L\rho g x \Delta x.$$

4. Celkovou sílu na celou stěnu najdeme sečtením všech příspěvků. Formálně

$$F = \sum L\rho g x \Delta x.$$

Protože těchto příspěvků je nekonečně mnoho, sečteme je integrálem

$$F = \int_0^H L\rho g x dx.$$

5. Po výpočtu dostáváme

$$\begin{aligned} F &= \int_0^H L\rho g x \, dx \\ &= L\rho g \int_0^H x \, dx \\ &= L\rho g \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^H \\ &= L\rho g \left[\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2}0^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}LH^2\rho g. \end{aligned}$$

Tento vztah je stejný, jako kdyby na celou plochu o velikosti LH působila tlaková síla vyvolaná tlakem $\frac{1}{2}H\rho g$, tj. tlakem v poloviční hloubce.

Nasčítání příspěvků k celkovému toku potrubím

V předchozím příkladě jsme “krájeli” přehradu na vodorovné pásy, protože ve vodorovném směru byl konstantní parametr, který jsme potřebovali mít konstantní pro výpočet k celkovému příspěvku. V následujícím případě je obdobný parametr konstantní na kružnicích a proto budeme dělit a sčítat příspěvky pomocí mezikruží.

V potrubí o poloměru R teče viskozni tekutina tak, že uprostřed má maximální rychlost a u stěn nulovou. Rychlost ve vzdálenosti r od osy potrubí je dána vztahem

$$v(r) = v_{max} \frac{R^2 - r^2}{R^2}.$$

Střední rychlost dostaneme jako celkový tok potrubím dělený obsahem $S = \pi R^2$. Tok v případě konstantní rychlosti je součinem rychlosti a obsahu průřezu. V případě rychlosti nekonstantní rozdělíme průřez na části ΔS , na každé části určíme příspěvek k celkovému toku a poté vše sečteme, tj.

$$Q = \sum_{\text{průřez}} v(r) \Delta S$$

Protože rychlost závisí na r , je stejná na kružnicích a proto se jí vhodné rozdělit průřez na mezikruží a sečíst přes poloměr těchto mezikruží. Budeme tedy integrovat přes proměnnou r . Vyjádření Q přepíšeme do tvaru

$$Q = \sum_{\text{průřez}} v(r) \frac{\Delta S}{\Delta r} \Delta r$$

a limitním přechodem se změnila suma na integrál a podíl změnil na derivaci, tj.

$$Q = \int_0^R v(r) \frac{dS}{dr} dr = \int_0^R v_{max} \frac{R^2 - r^2}{R^2} \frac{dS}{dr} dr.$$

Odsud pomocí $S = \pi r^2$, $\frac{dS}{dr} = 2\pi r$ dostáváme po vytknutí konstant, roznásobení závorek a integraci

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2\pi v_{max}}{R^2} \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr \\ &= \frac{2\pi v_{max}}{R^2} \left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R \\ &= \frac{2\pi v_{max}}{R^2} \frac{R^4}{4} \\ &= \frac{v_{max}}{2} \pi R^2. \end{aligned}$$

Tok je tedy formálně stejný, jako by voda tekla v celém průřezu rychlostí poloviční ve srovnání s maximální rychlostí ve středu trubice. Proto je $\frac{v_{max}}{2}$ nazývána střední profilová rychlost průřezu.

(Volně podle Dana Říhová a Jana Marková, Poznámky k přednáškám z Hydrauliky, přednáška č. 3.)

Nasčítání příspěvků k celkovému momentu setrvačnosti tyče

- Kinetická energie tělesa o hmotnosti m pohybujícího se posuvným pohybem rychlostí v je dána vztahem $E = \frac{1}{2}mv^2$. Kinetická energie tělesa o momentu setrvačnosti J pohybujícího se otáčivým pohybem úhlovou rychlostí ω je dána vztahem $E = \frac{1}{2}J\omega^2$. Odsud vidíme, že energie potřebná k vyvolání rotačního pohybu je úměrná momentu setrvačnosti. Moment setrvačnosti je tedy jakousi mírou odolnosti tělesa vůči silám, které se jej snaží uvést do rotačního pohybu. Zjednodušeně, větší moment setrvačnosti znamená, že těleso je stabilnější.
- Moment setrvačnosti hmotného bodu o hmotnosti m vzhledem k ose otáčení vzdálené r od tohoto bodu je $J = mr^2$. Pro soustavu hmotných bodů stačí příspěvky sečíst. Pro případ tělesa se spojitě rozloženou hmotností bychom museli “sečíst nekonečně mnoho nekonečně malých příspěvků” a proto sčítáme integrálem.

Budeme studovat rotaci tyče o hmotnosti m a délce L okolo osy kolmé k tyči. Nechť je tyč položena podél osy x a rotuje okolo osy y . Kousek tyče o délce Δx má hmotnost $\frac{\Delta x}{L}m$ a pokud je jeho vzdálenost od osy y rovna x , příspěvek k celkovému momentu setrvačnosti je

$$\Delta J = \frac{\Delta x}{L} m x^2 = \frac{m}{L} x^2 \Delta x.$$

Celkový moment setrvačnosti je dán integrálem, ale závisí na poloze tyče vzhledem k ose otáčení.

1. Pro tyč umístěnou levým koncem v počátku dostáváme moment vzhledem k ose procházející koncem tyče ve tvaru

$$J = \int_0^L \frac{m}{L} x^2 dx = \frac{m}{L} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^L = \frac{m}{L} \frac{1}{3} L^3 = \frac{1}{3} mL^2.$$

2. Pro tyč umístěnou středem v počátku dostáváme moment vzhledem k ose procházející středem ve tvaru

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{m}{L} x^2 dx \\ &= \frac{m}{L} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{m}{L} \left[\frac{1}{3} \frac{L^3}{8} - \frac{1}{3} (-1)^3 \frac{L^3}{8} \right] \\ &= \frac{1}{12} mL^2. \end{aligned}$$

Závěr.

- Na roztočení tyče okolo konce je potřeba více energie, než na roztočení okolo středu. Čtyřikrát více. (Z praxe víme, že s dlouhým žebřem se manipuluje nejlépe, pokud jej držíme uprostřed.)
- Tyč o konstantní délkové hustotě τ (dané použitým průřezem a materiálem) má hmotnost $m = \tau L$ a moment setrvačnosti vzhledem ke středu

$$J = \frac{1}{12} \tau L^3.$$

Vidíme, že moment setrvačnosti roste dramaticky při zvětšování délky, s třetí mocninou. Proto provazochodci nosí na laně dlouhou tyč a proto při extrémních výkonech, jako je přechod Grand Canyon, bývá použita extrémně dlouhá tyč (pro Grand Canyon 9.1 metru a 20 kilogramů, viz [Nik Wallenda](#)).

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Někdy máme zadánu rychlost, s jakou se mění veličina a potřebujeme znát funkční předpis pro tuto veličinu, tj. hodnotu v libovolném čase. To je úloha inverzní k derivaci a řeší ji neurčitý integrál.
- Při zadané rychlosti změny není možné bez zadání výchozího stavu určit hodnotu veličiny, která se mění. Je možné vypočítat jenom změnu této veličiny za určitý časový úsek (Newtonův určitý integrál) anebo je řešení dáno až na počáteční stav vyjádřený integrační konstantou v neurčitém integrálu.
- Někdy potřebujeme veličinu, která nás zajímá, najít posčítáním nekonečně mnoha příspěvků. Toto je v situaci, kdy se “za běhu” mění parametry úlohy, například se

během pohybu mění rychlost pohybu. V tomto případě používáme Riemannův určitý integrál, který je definovaný jinak než Newtonův, ale v prakticky zajímavých úlohách se počítá stejně.

- Další aplikací procesu opačného k derivování je úloha, kdy jsou vlastnosti křivky popsány pomocí derivace a hledáme rovnici pro tuto křivku. Příkladem jsou úlohy ve stavitelství a studiu materiálu (ohybová čára nosníku).

Kapitola 5

Integrály pro pokročilé

<https://youtu.be/nvagZcCVm4k>

Naučili jsme se integrovat pomocí neurčitého a určitého integrálu. Neurčitý integrál vyjadřuje funkční hodnotu vypočítanou z akumulace okamžitých změn. Z principiálních důvodů není možné, pokud je zadána pouze rychlost změny, určit celou veličinu, ale jenom její změnu. Proto je neurčitý integrál dán jednoznačně až na aditivní konstantu. Velikost změny na zadaném intervalu je dána určitým integrálem, ke kterému je možné dospět i geometricky a fyzikálně názorným způsobem představeným v definici Riemannova integrálu. Ten otevírá možnost rozšířit platnost mnoha fyzikálních vzorců na případ, kdy parametry úlohy nejsou konstantní. Dokážeme tak počítat dráhu pohybu proměnnou rychlostí, tlak vody na plochu ponořenou napříč různými hloubkami a podobně.

V následujícím textu rozvineme některé poznatky o integrálu, odvodíme si některé pokročilejší metody pro výpočet, ukážeme si, že každá spojitá funkce má primitivní funkci a také otevřeme cestu k definování funkcí, které nejsou elementární.

Nejprve si připomeneme jednu ze základních aplikací integrálu: nasčítání příspěvků od spojitě se měnící veličiny.

Příklad: proč trubky praskají podélně?

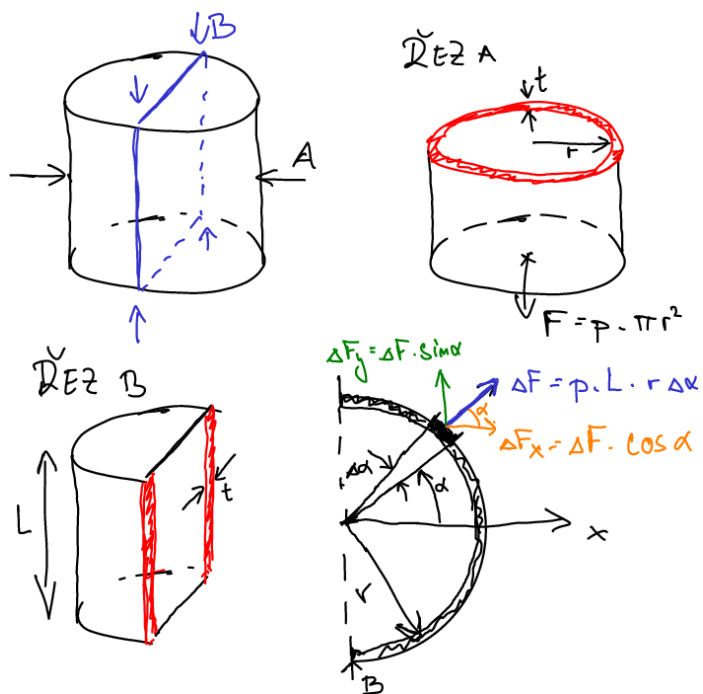
Uvažujme natlakovanou válcovou nádobu s tlakem p , výškou L , poloměrem podstavy r a stěnou o tloušťce t .

Vypočteme namáhání silou v ose, tj. namáhání řezu A. Obsah řezu (vyšrafováno červeně) je $2\pi r t$. Na dno a víko působí síla $F = p\pi r^2$ a v řezu A kolmém na osu válce je tahové napětí

$$\sigma_p = \frac{F}{S} = \frac{p\pi r^2}{2\pi r t} = \frac{pr}{2t}.$$

Směrem radiálně od osy se tlaková síla rozkládá na celou plochu pláště válce a v tomto směru je tahové napětí minimální.

Vypočteme poslední složku přispívající k namáhání pláště válce, obvodové napětí. K tomu musíme vypočítat sílu, která



Obrázek 5.1: Schema válcové nádoby pod tlakem a řezy, v nichž počítáme namáhání.

působí po obvodě válce, tj. která se snaží válec roztrhnout v řezu B. Tento řez má obsah (červeně vyznačeno) $2Lt$. Nejtěžší bude najít celkovou sílu, která od sebe oddaluje dvě poloviny pláště. To je místo, kde zapojíme integrál.

Kousek pláště válce odpovídající úhlu $\Delta\alpha$ má obsah $rL\Delta\alpha$ a tlaková síla na tento kousek je součin tlaku a obsahu, tj.

$$\Delta F = pS = pLr\Delta\alpha.$$

Směr je kolmý k plášti válce a s vodorovnou osou svírá úhel α . Průmět této síly do vodorovného směru je

$$\Delta F_x = pLr\Delta\alpha \cos \alpha$$

a tyto příspěvky musíme posčítat na intervalu $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Celková síla, která se snaží nádobu roztrhnout podélně je

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} prL \cos \alpha \, d\alpha \\ &= prL \left[\sin \alpha \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= prL \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= 2prL. \end{aligned}$$

Povrch na který tato síla působí odpovídá dvěma podélným hranám (červeně na řezu B), tj. má obsah $2Lt$ a napětí je tedy

$$\sigma_h = \frac{2pLr}{2Lt} = \frac{pr}{t} = 2\sigma_p.$$

Vidíme, že toto napětí je dvojnásobkem napětí v podélné ose.

Ještě je vhodné ověřit, že svislý průmět, tj.

$$\Delta F_y = pLr\Delta\alpha \sin \alpha$$

k namáhání nepřispívá, protože

$$\begin{aligned} F_y &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} prL \sin \alpha \, d\alpha \\ &= 0. \end{aligned}$$

To však je možné očekávat i ze symetrie.

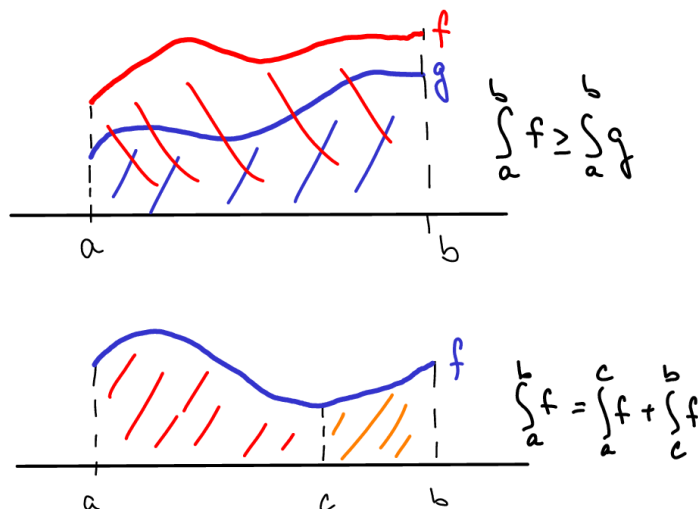
Pokud se chcete dozvědět více, zkuste Google a heslo “hoop stress”.

Vlastnosti integrálu

<https://youtu.be/uYiQAbYZVURU>

Z minulé přednášky víme, že integrál (určitý i neurčitý) je lineární, tj. zachovává součet funkcí a násobení konstantou.

Následující dvě věty nejsou překvapivé. Vyjadřují dvě intuitivně zřejmá fakta.



Obrázek 5.2: Monotonie a aditivita vzhledem k mezi pro určitý integrál.

- Pokud se veličina mění rychleji, výsledná změna je větší.
- Pokud sledujeme změnu veličiny za určitý čas, můžeme sledovat změnu do nějakého mezeití času a poté od mezeití času do konce a obě částečné změny poté sečíst.

Je však důležité vědět, že tyto myšlenky platí pro libovolné integrovatelné funkce a proto zformulujeme následující věty.

Věta (monotonie vzhledem k funkci). Je-li $f(x) \geq g(x)$ na intervalu $[a, b]$, platí

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Důsledek. Integrál nezáporné funkce je nezáporný. Přesněji, je-li $a < b$ a $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$, platí

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq 0.$$

Věta (aditivita vzhledem k integračnímu oboru). Platí

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Věta o aditivitě vzhledem k integračnímu oboru je například pro Newtonovu definici integrálu důsledkem zřejmého vztahu

$$[F(b) - F(c)] + [F(c) - F(a)] = F(b) - F(a)$$

pro libovolnou primitivní funkci F . Graficky i fyzikálně je názorný případ, kdy c leží v intervalu $[a, b]$. Vzorec však platí pro libovolné uspořádání mezí podle velikosti.

Střední hodnota

<https://youtu.be/8Qc0RI4T5LI>

Určitou souvislost s monotonií vzhledem k funkci má otázka, zda je možné funkci definovanou na intervalu $[a, b]$ nahradit funkcí konstantní tak, aby obě funkce měly stejný integrál. V praxi to znamená, že bychom například při pohybu tělesa časový průběh rychlosti nahradili jednou hodnotou takovou, že dráha za daný čas bude stejná. To je přesně to, co známe z běžného života jako definici průměrné rychlosti. Je to současně i návod pro následující rozšíření pojmu průměrná rychlost na libovolné integrovatelné funkce. Jedná se vlastně o jakousi průměrnou hodnotu, při které ale nepočítáme průměr z konečného počtu hodnot, ale z hodnot rozložených spojitě na zadaném intervalu.

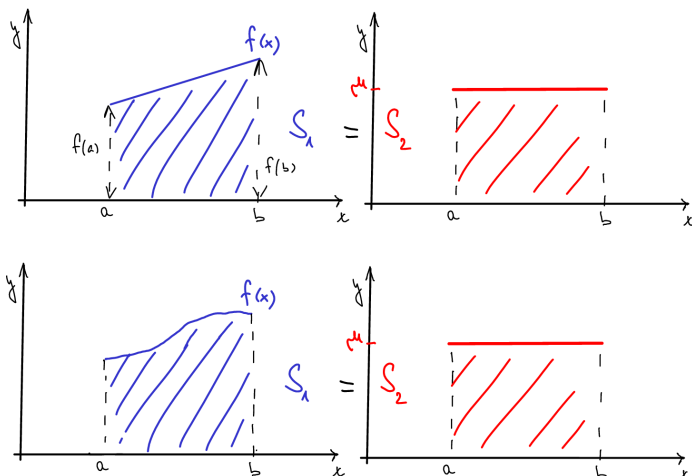
Definice střední hodnoty je snadným důsledkem toho, že hledáme hodnotu μ s vlastností

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \mu dx = \mu \int_a^b dx = \mu(b-a).$$

Definice (střední hodnota). Necht f je funkce definovaná a integrovatelná na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Číslo μ definované vztahem

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

se nazývá *střední hodnota* funkce f na intervalu $[a, b]$.



Obrázek 5.3: Střední hodnota lineární a obecné funkce.

Geometricky je střední hodnota výška obdélníka, který má jednu stranu tvořenou intervalem $[a, b]$ a obsah je roven integrálu $\int_a^b f(x) dx$. Pokud je funkce $f(x)$ kladná a lineární,

je tento integrál roven obsahu lichoběžníka o základnách $f(a)$ a $f(b)$ a výšce $b-a$. Tedy

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

a střední hodnota lineární funkce je tedy průměrem hodnoty na začátku a na konci intervalu.

Poznámka (střední hodnota materiálové konstanty). Tepelná vodivost materiálu podobeného analýze tepelně-izolačních vlastností nemusí být konstantní v celém rozsahu teplot, ale může se měnit s teplotou. Pokud je známa funkce $k(T)$, je střední hodnota tepelné vodivosti v tepelném rozsahu od T_1 do T_2 dána vztahem (viz Cengel, Ghajar: Heat and Mass Transfer)

$$k_{avg} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} k(T) dT$$

V praxi nemá analytický předpis pro funkci $k(T)$, ale funkce je dána v několika bodech tabulkou. Takové funkce můžeme integrovat numericky, což bude ukázáno v další části této přednášky.

Příklad. Střední hodnota funkce $y = 2x^2 - 1$ na intervalu $[0, 2]$ je

$$\frac{1}{2} \int_0^2 2x^2 - 1 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3}x^3 - x \right]_0^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3}8 - 2 - 0 \right] = \frac{5}{3}.$$

[Online výpočet.](#)

Výpočet práce pomocí integrálu

<https://youtu.be/Z8wDZxap794>

Příklad: práce při vytahování řetězu

Ze střechy budovy o výšce 50 metrů visí řetěz dlouhý 30 metrů. Jeden metr řetězu váží dva kilogramy. Vypočítáme práci potřebnou pro povytážení řetězu o deset metrů a poté práci potřebnou pro úplné vytažení řetězu.

Z fyziky víme, že na těleso o hmotnosti m působí síla F daný vztahem

$$F = mg,$$

kde g je tíhové zrychlení a že práce W konaná silou F po dráze s je rovna součinu

$$W = Fs.$$

Pokud z budovy visí h metrů řetězu o lineární hustotě $\tau = 2 \text{ kg/m}$, je nutné při vytahování řetězu zvedat těleso o hmotnosti $h\tau$, tj. vyvinout sílu

$$F = h\tau g.$$

Při vytahování řetězu se délka visící části zkracuje a změna délky Δh je záporná. Při povytažení řetězu o délku $|\Delta h| = -\Delta h$ je nutné vykonat práci

$$\Delta W = F|\Delta h| = -h\tau g \Delta h.$$

Při povytažení o 10 metrů řetěz vytahujeme spojitě od $h_1 = 30$ po $h_2 = 20$. Celková práce je

$$\begin{aligned} W &= \int_{h_1}^{h_2} -h\tau g \, dh = \tau g \int_{h_2}^{h_1} h \, dh = \tau g \left[\frac{1}{2}h^2 \right]_{h_2}^{h_1} \\ &= \tau g \left[\frac{1}{2}h_1^2 - \frac{1}{2}h_2^2 \right] = \frac{1}{2}\tau g (h_1^2 - h_2^2) \\ &= \frac{1}{2}\tau g (h_1 - h_2)(h_1 + h_2). \end{aligned}$$

Pro $\tau = 2 \text{ kg m}^{-1}$ a $g = 9.81 \text{ kg m s}^{-2}$ dostáváme $W = 4905 \text{ J}$. Formálně je tento výsledek stejný, jako bychom hmotnost dolních $h_1 - h_2$ metrů řetězu soustředili do středu tohoto úseku (tedy do úrovně $\frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ metrů pod střechu) a poté tento hmotný bod přemístili konstantní silou po dráze $\frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ na střechu.

Práci pro vytažení celého řetězu dostaneme volbou $h_2 = 0$. Tedy

$$W = \frac{1}{2}\tau g h_1^2$$

a numericky $W = 8829 \text{ J}$. Protože vytáhnout první třetinu nejtěžší, očekáváme, že práce potřebná pro vytažení celého řetězu bude menší než trojnásobek práce nutné pro povytažení o třetinu. Toto se přirozeně potvrzuje porovnáním numerických hodnot.

Online výpočet.

Poznámka (práce konaná silou proměnné velikosti).

Práce vykonaná silou $F(x)$ při přemístění tělesa z polohy $x = a$ do polohy $x = b$ je

$$W = \int_a^b F(x) \, dx.$$

Jako speciální případ dostáváme pro konstantní sílu F středoškolský vzorec

$$W = Fs,$$

kde $s = b - a$ je posunutí.

Příklad: práce při čerpání vody

Pokud potřebujeme vyčerpat vodu z rezervoáru, nádrže, rybníka nebo jezera, musíme ji dopravit za stěnu (za hráz, dostat na břeh, ...). Představme si, že po opadnutí vody v okolí Mojžíšova mostu, se kterým jsme se seznámili na minulé přednášce, zůstane uvnitř voda. Tu je potřeba vyčerpat. Tím se most proměnil v nádrž o hloubce H . Povrch hladiny ve chvíli, kdy je voda x jednotek délky pod okrajem mostu označme S . (Pro nádrž ve tvaru kvádrů by S bylo konstantní a rovno obsahu dna.)

1. Pro vyzvednutí tělesa o hmotnosti m o výšce h musíme vykonat práci $W = mgh$, abychom vykompenzovali nárůst potenciální energie.
2. Vodu v nádrži rozdělíme na vodorovné vrstvy o výšce Δx . Hmotnost vrstvy o výšce Δx v hloubce x pod okrajem nádrže bude $\Delta m = S\Delta x\rho$ a abychom vodu dostali přes okraj, musíme vykonat práci

$$\Delta W = \Delta mgx = S\Delta x\rho gx.$$

3. Celková práce na vyčerpání vody se vypočte jako součet jednotlivých příspěvků. Spojitě se měnící veličinu sčítáme integrálem, což vede na vztah

$$W = \int_0^H S\rho gx \, dx = \rho g \int_0^H Sx \, dx.$$

4. Pro nádrže ve tvaru kvádrů by veličina S byla konstantní a integrál by vycházel

$$\begin{aligned} W &= S\rho g \int_0^H x \, dx \\ &= S\rho g \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^H \\ &= S\rho g \frac{1}{2}H^2 \\ &= (SH\rho)g \frac{1}{2}H. \end{aligned}$$

Výraz $SH\rho$ je celková hmotnost. Práce je tedy stejná, jako kdybychom těleso o stejné hmotnosti jako je hmotnost vodní masy zvedli z poloviční hloubky pod hladinou na úroveň hladiny. Je to stejná práce, jakou bychom vykonali, kdyby všechna voda byla stlačena v těžišti a my bychom tuto vodu zvedli na úroveň okraje nádrže.

Numerická aproximace určitého integrálu

https://youtu.be/7jo_pZJjgRA

Následující myšlenka se si týká výlučně určitého integrálu, ale dále v dnešní přednášce si představíme nástroj, který umožní ji použít i pro integrál neurčitý.

Někdy se stane, že neumíme nebo nepotřebujeme určitý integrál vypočítat přesně. Nebo že ani nemáme dostatek informací pro přesný výpočet, například funkce může být známa jenom v několika bodech, které jsou výsledkem měření a mimo tyto body nejsou žádné informace o funkčních hodnotách. To je přesně situace pro numerickou aproximaci určitého integrálu. Mechanický model základních myšlenek aproximace je shrnut v několika následujících bodech.

- Představme si, že máme určit dráhu pohybu, ale v zadaném časovém intervalu máme pouze několik záznamů hodnoty rychlosti z tachometru.
- Mimo tyto záznamy se mohlo dít v podstatě cokoliv. Budeme však doufat, že rychlost se měnila spíše pozvolna.
- Základní taktika odhadu dráhy může být taková, že mezi každými zaznamenanými hodnotami rychlosti na tachometru nahradíme pohyb rovnoměrným pohybem rychlostí, která je průměrem krajních hodnot.
- Předchozí postup aplikovaný na libovolnou funkci odpovídá tomu, že mezi každými dvěma hodnotami nahradíme funkci funkcí lineární a poté integrál vypočítáme pro tuto lineární funkci. Tento postup (lichoběžníkové pravidlo) je možné modifikovat nebo vylepšit. Například je možné použít pro aproximaci části parabol místo přímk (Simpsonovo pravidlo). U funkce, která je rostoucí, je možné například použít funkční hodnotu v dolní mezi a tím dostaneme dolní odhad pro výsledný integrál.

Příklad. Zahradnická firma vytáhla pařez a malotraktorem jej odtáhla o 20 metrů bokem. Vzhledem k nepravidelnému tvaru a tažení po různých druzích povrchu po cestě se síla měnila. Pracovníkovi se podařilo odhadnout sílu během pohybu. Závislost síly na dráze zachycuje následující tabulka.

s/m	0	5	10	15	20
F/kN	2.3	1.5	2.1	3.1	2.0

Odhadneme celkovou vykonanou práci.

$$\begin{aligned} W &= 5 \frac{2.3 + 1.5}{2} + 5 \frac{1.5 + 2.1}{2} + 5 \frac{2.1 + 3.1}{2} + 5 \frac{3.1 + 2.0}{2} \\ &= 44.25 \text{ kNm} \\ &= 44.25 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Poznámka. V předchozím příkladě byla funkce dána v pravidelných intervalech. Proto se ve všech členech objevuje faktor $\frac{5}{2}$, který je možné vytknout. Po vytknutí zůstane v závorce součet, kde se hodnoty funkce v dolní a horní mezi objeví jednou a ostatní dvakrát. To v obecném případě vede k následujícímu vzorci.

Věta (lichoběžníkové pravidlo). *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$. Rozdělme interval $[a, b]$ na n intervalů stejné délky h , tj. platí $h = \frac{b-a}{n}$. Krajní body těchto intervalů označme po řadě x_0, x_1, \dots, x_n a jim odpovídající funkční hodnoty funkce f po řadě y_0, y_1, \dots, y_n . Platí*

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n).$$

Poznámka (slovní interpretace lichoběžníkového pravidla). Pokud ve vzorci pro lichoběžníkové pravidlo dosadíme za hodnotu h odpovídající délku intervalu $\frac{b-a}{n}$ a přeuspořádáme členy, dostaneme

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \frac{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n}{2n}$$

a

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n}{2n}.$$

Toto je odhad pro veličinu, kterou jsme výše nazvali střední hodnotou. Lichoběžníkové pravidlo je tedy možné chápat tak, že vezmeme funkční hodnoty v pravidelných intervalech a vypočteme vážený průměr těchto hodnot, kdy všechny funkční hodnoty ve vnitřních bodech se berou s dvojnásobnou vahou než funkční hodnoty v krajních bodech. To je odhad střední hodnoty, který stačí vynásobit délkou intervalu a dostaneme odhad integrálu.

Integrace substituční metodou

<https://youtu.be/tdK-zog1cv0>

Substituční metoda je metoda odvozená z derivace složené funkce

$$[u(v(x))]' = u'(v(x))v'(x),$$

což dává

$$u(v(x)) = \int u'(v(x))v'(x) dx. \quad (1)$$

Označme $u'(x) = f(x)$, tj. $u(x) = \int f(x) dx$. Označíme-li dále $v(x) = t$, platí

$$u(v(x)) = u(t) = \int f(t) dt.$$

Přeznačme ještě $v(x)$ na $\varphi(x)$. Potom má (1) po záměně levé a pravé strany tvar uvedený v následující větě.

Věta (substituční metoda pro neurčitý integrál). Platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(t) dt, \quad (2)$$

kde po výpočtu integrálu napravo dosazujeme $t = \varphi(x)$.

Formálně výraz napravo ve (2) přejde ve výraz nalevo a naopak dosazením rovností

$$\varphi(x) = t, \quad \varphi'(x) dx = dt.$$

Toto je současně i návod, jak substituční metodu použít prakticky.

Příklad. Substituce $x^2 = t$ vede na vztah mezi diferenciály ve tvaru $2x dx = dt$. Odsud

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$$

Příklad. Substituce $f(x) = t$ vede na vztah mezi diferenciály ve tvaru $f'(x) dx = dt$. Odsud

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| = \ln|f(x)| + c.$$

Například

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + c. \end{aligned}$$

Příklad. Substituce $ax + b = t$ vede na vztah mezi diferenciály ve tvaru $a dx = dt$. Odsud je možné odvodit vzorec, který již známe pro integrál funkce s lineární vnitřní složkou. Vskutku, platí

$$\int f(ax+b) dx = \int \frac{1}{a} f(t) dt = \frac{1}{a} F(t) = \frac{1}{a} F(ax+b) + C,$$

kde $F(x) = \int f(x) dx$.

Vztah (2) je základní vztah pro substituci v neurčitém integrálu. Používáme jej ve vhodných případech zprava doleva i zleva doprava. Variantu pro určitý integrál jsme viděli ve speciálním případě ve cvičení, kdy vnitřní funkce reprezentovala konstantní násobek. Viděli jsme přirozeným způsobem, že při substituci (vyjádření v jiných jednotkách) se s integrovanou funkcí se mění i meze. Obecný vzorec pro integrování určitého integrálu substituční metodou je v následující větě.

Věta (substituční metoda pro určitý integrál). Platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt.$$

Meze tedy podléhají stejné transformaci, jako integrovaná proměnná. Pokud používáme substituci $t = \varphi(x)$, potom v dolní mezi pro $x = a$ platí $t = \varphi(a)$. Podobná situace je i v mezi horní.

Integrál jako funkce meze

<https://youtu.be/qUwPJkVBFOQ>

Integrál může být součástí definice funkce. Tím se můžeme dostat mimo množinu elementárních funkcí a značně tak rozšířit třídu funkcí, se kterými umíme pracovat.

Věta (integrál jako funkce horní meze). Bud f spojitá funkce na intervalu I a $a \in I$. Funkce $F(x)$ definovaná vztahem

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

má na intervalu I derivaci a platí $F'(x) = f(x)$, tj. $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$.

Příklad. Pro funkci $f(x) = x^2$ platí

$$\int_0^x t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x = \frac{x^3}{3}$$

což je skutečně jedna z primitivních funkcí k funkci x^2 , jak již víme z přednášky o neurčitém integrálu.

Věta o integrálu jako funkci horní meze dokonce udává tvar primitivní funkce pro libovolnou spojitou funkci. Tím dostáváme okamžitě následující tvrzení.

Důsledek (postačující podmínka existence primitivní funkce). Ke každé spojitě existující funkci existuje neurčitý integrál.

Bohužel, ne vždy neurčitý integrál dokážeme efektivně najít. Zatímco problém nalezení derivace funkce složené z funkcí, které umíme derivovat, spočívá pouze ve správné aplikaci vzorců pro derivování, problém nalézt neurčitý integrál i k funkci tak jednoduché, jako je například e^{-x^2} je neřešitelný ve třídě elementárních funkcí. Totéž platí pro další "nevině vyhlížející" funkce jako $\int \sin(x^2) dx$ nebo $\int \frac{\sin x}{x} dx$. Věta

o integrálu jako funkci horní meze nabízí možnost zapsat primitivní funkci vztahem

$$\int e^{-x^2} dx = c + \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Funkční hodnoty takové funkce můžeme určovat například tak, že integrál aproximujeme numericky.

Následující ukázka demonstruje, že i s funkcí definovanou pomocí integrálu je možné jistým způsobem pracovat, aniž bychom měli k dispozici analytické vyjádření této funkce.

Ukázka funkce definované pomocí integrálu

Uvažujme funkci definovanou vztahem

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt. \quad (*)$$

Ukážeme si, že tento tvar umožňuje odvodit některé vlastnosti funkce f . Dokážeme například, že funkce f mění násobení na sčítání, tj. že platí

$$f(ab) = f(a) + f(b).$$

Podle definice je

$$f(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t} dt.$$

Podle aditivity vzhledem k integračnímu oboru platí

$$f(ab) = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt = f(a) + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt. \quad (**)$$

Ve druhém integrálu bychom potřebovali dostat jedničku v dolní mezi, abychom dostali integrál stejný jako v definici funkce f . Proto zavedeme substituci $\frac{t}{a} = s$, $t = sa$, $dt = ads$. S použitím této substituce se (**) transformuje na

$$f(ab) = f(a) + \int_1^b \frac{1}{sa} a ds = f(a) + \int_1^b \frac{1}{s} ds = f(a) + f(b).$$

Pokud si všimneme, že integrál (*) v definici funkce f je možné vypočítat a že funkce f je vlastně funkce $\ln x$, není vlastnost, že funkce mění násobení na sčítání nijak překvapivá. Pro nás však bylo důležité, že v důkaze jsme použili jenom definici funkce f pomocí integrálu a pravidla pro práci s integrály. Nemuseli jsme nijak používat ani vlastnosti logaritmu, ani vlastnosti funkce k logaritmu inverzní, což bývá základem středoškolského odvození tohoto vzorce. Vidíme, že integrál je možné použít k definici funkce a s touto funkcí je možné dále pracovat. Substituce $t^{\frac{1}{r}} = s$, $t = s^r$, $dt = rs^{r-1} ds$ například ukáže, že platí

$$f(a^r) = \int_1^{a^r} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{s^r} rs^{r-1} ds = r \int_1^a \frac{1}{s} ds = rf(a).$$

Příklad: řetěz jinak (pomocí změny potenciální energie)

Vypočítáme příklad z prací při vytahování řetězu tak, že určíme změnu potenciální energie řetězu. Práci W vykonanou při vyzvednutí tělesa o hmotnosti m o výšku h vypočteme jako změnu potenciální energie v tíhovém poli Země, tj.

$$W = mgh.$$

Komplikace v tomto případě je, že každou část řetězu vytahujeme z jiné hloubky. Část řetězu délky Δh váží $m = \tau \Delta h$ kilogramů a při vytažení z hloubky h na úroveň střechy je změna potenciální energie (a vykonaná práce)

$$\Delta W = mgh = \tau \Delta h gh.$$

Součet těchto příspěvků pro dolní třetinu řetězu, od $h_2 = 20$ m po $h_1 = 30$ m je

$$W = \int_{h_2}^{h_1} \tau gh dh = \tau g \int_{h_2}^{h_1} h dh.$$

Tím výpočet přechází ve stejný integrál jako v předchozím přístupu a výsledky jsou tedy stejné. Práci pro celý řetěz získáme opět volbou $h_2 = 0$.

Že práce vykonaná při vytažení celého řetězu je stejná jako změna potenciální energie celého řetězu je zřejmé. Za zmínku ještě stojí úvaha, proč je povytažení řetězu o 10 metrů ekvivalentní změně potenciální energie dolních 10 metrů při vytažení této části řetězu na střechu. Stačí uvážit, že bychom řetěz přetočili vzhůru nohama, povytáhli o 10 metrů, rozpojili a visící část znovu otočili vzhůru nohama. Otočení vzhůru nohama není spojeno s konáním práce, stejně tak rozpojení a případné opětovné napojení. Práce se tedy koná jenom tak, že řetěz vytahujeme o 10 metrů. Výsledek však je stejný, jako kdybychom řetěz nepřetáčeli, jenom odpojili dolních 10 metrů a tuto část zvedli nahoru.

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Naučili jsme se některé triky pro integrály: určitý integrál se dá numericky aproximovat a neurčitý integrál se dá převést metodou per-partés nebo substitucí na jiný integrál, v optimálním případě na integrál vhodný pro aplikaci vzorců.
- Integrál, resp. střední hodnota funkce, slouží jako náhrada aritmetického průměru v situacích, kdy počítáme průměr z nekonečně mnoha veličin a vzorec pro klasický aritmetický průměr selhává.
- Integrál je také nástrojem, který nás dokáže vymanit ze světa elementárních funkcí a můžeme pomocí tohoto

integrálu definovat funkce, které nejsou elementární. Základním prostředkem je integrál jako funkce horní meze. Toto se využívá například ve statistice. Vedlejším produktem je věta zaručující existenci primitivní funkce pro libovolnou spojitou funkci.

Kapitola 6

Diferenciální rovnice

<https://youtu.be/gU6ClJwLFs0>

V této přednášce se seznámíme s diferenciálními rovnicemi. To není nic jiného, než správný název pro to, čemu jsme dříve říkali matematické modely formulované pomocí derivace. Viděli jsme že tyto modely jsou v některých případech přirozeným matematickým aparátem pro popis reálně probíhajících dějů v přírodě. V přednášce se seznámíme se základním názvoslovím spojeným s touto problematikou, seznámíme se s metodami identifikace některých kvalitativních vlastností a u rovnic se separovanými proměnnými se naučíme hledat i analytické řešení. Protože se často setkáváme s modely nezávislými na čase, budeme se problematice těchto modelů věnovat podrobněji. Tyto modely mají tu vlastnost, že se ohraničená řešení po čase ustálí okolo stabilní hodnoty. Naučíme se hledat hodnoty odpovídající ustáleným řešením a z nich vybrat ty stabilní, k nimž systém může konvergovat, nebo nestabilní, které oddělují oblasti, ze kterých systém dospívá k jednotlivým stabilním stavům.

Motivace

Diferenciální rovnice jsou jakýmsi zlatým grálem modelování. V historii byly matematické modely založené na těchto rovnicích přímou motivací k rozvoji diferenciálního počtu (aby bylo možno tyto rovnice formulovat) a integrálního počtu (aby bylo možno tyto rovnice řešit). Od té doby dosáhla trojice derivace+integrál+diferenciální rovnice na obrovskou řadu úspěchů napříč mnoha obory.

- Odvození **Keplerových zákonů** pohybu planet matematickou cestou a tím potvrzení gravitačního zákona (Newton).
- Matematický aparát pro statické výpočty a výpočty **nosníků** (Euler, Bernoulli, Timoshenko).
- Objev planety **Neptun** předpovězením existence této planety na základě jinak nevysvětlitelných poruch v dráze planety Uran (Verrier).

- Teorie rovnováhy populací na ostrovech (MacArthur, Wilson).
- Teorie epidemií (Kermack, McKendrick).
- **Chemické oscilátory** (Prigogine), Nobelova cena za nerovnovážnou termodynamiku.
- Modely konkurence živočišných druhů, **princip konkurenčního vyloučení** (Gause).
- Modely **predace** živočišných druhů, oscilace v systému dravce a kořisti (Lotka, Volterra, Holling).
- Vysvětlení podstaty periodického přemnožování **Choris-toneura fumiferana** v kanadských lesích (Ludwig, Jones, Holling).
- Systémová biologie, výzkum složitých interakcí mezi enzymy, geny a proteiny v živých organismech (Alon).
- Výzkum meteoritů s rodokmenem (**Zdeněk Ceplecha, Pavel Spurný**), výpočet jejich místa dopadu a místa, odkud meteorit přiletěl. Nesmírně cenný zdroj studijního materiálu.
- Zaměřovače pro řízení protiletectké obrany (**Antonín Svoboda**, český kybernetik). Svoboda později konstruoval výkonnější zaměřovače, získal prestižní vyznamenání námořnictva USA, jeho práce pomohla rozhodnout válku v tichomoří.

Někdy je nutné znát řešení rovnice, někdy stačí znát rovnici řídící studovaný proces a i bez znalosti řešení je možné získat užitečné informace.

- Chování řešení při změně rozměrů systému. Využívá se například v aerodynamických tunelech, kdy se rozměrné objekty testují na zmenšeninách. Dále se využívá tam, kde rovnici nedokážeme vyřešit, například model sesuvu hory do přehrady a následná tsunami v údolí Vajont nebo akustika v Janáčkově hudební síni.
- Náhrada jednoho problému jiným, který se chová stejně, ale je možné jej modelovat. Zahrnuje sestavování mechanických počítačů (zaměřovače prof. Svobody) nebo vodních počítačů (**Moniac** sestavený v roce 1949 pro model ekonomiky Nového Zélandu, **vodní integrátor** používaný Ruskem do 80-tých let)

Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu

<https://youtu.be/GSjgp7FGvVw>

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice, kde vystupuje neznámá funkce a její derivace. Setkáváme se s ní například všude tam, kde rychlost růstu nebo poklesu veličiny souvisí s její velikostí. Například rychlost s jakou se mění teplota horkého tělesa je funkcí teploty samotné. Rychlost tepelné výměny mezi dvěma tělesy je totiž úměrná rozdílu jejich teplot (Newtonův zákon). Takto se přirozeně diferenciální rovnice objevují v modelech nejrůznějších dějů jevů. Podstatu děje, který modelujeme, musí dodat fyzika, biologie nebo jiná aplikovaná věda. To v matematice obsaženo není. Matematika poté poslouží k analýze, jaké jsou pozorovatelné důsledky a tím se ověří, jestli příslušná aplikovaná věda správně vystihuje podstatu modelovaného děje.

Definice (diferenciální rovnice). *Obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu rozřešenou vzhledem k derivaci (stručněji též diferenciální rovnici, DR) s neznámou y rozumíme rovnici tvaru*

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) \quad (1)$$

kde φ je funkce dvou proměnných.

(anglicky ordinary differential equation, ODE)

Další formy zápisu rovnice (1) jsou

$$y' = \varphi(x, y),$$

$$dy = \varphi(x, y)dx,$$

$$dy - \varphi(x, y)dx = 0.$$

Příklad. Najděte všechny funkce splňující $y' = 2xy$. (Naučíme se řešit později.)

Diferenciální rovnice bývá v aplikacích matematickým modelem kvantifikujícím scénář vývoje systému. Řešením jsou všechny možnosti, jak se tento systém může vyvíjet. K jednoznačnému předpovězení budoucího stavu je ovšem nutno znát také stav počáteční, který ze všech teoreticky možných průběhů vybere průběh odpovídající modelované situaci. Tento stav vyjadřuje počáteční podmínka, uvedená v následující definici.

Definice (počáteční podmínka, Cauchyova úloha). Necht x_0, y_0 jsou reálná čísla. Úloha najít řešení rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y), \quad (1)$$

kteřé splňuje zadanou *počáteční podmínku*

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

se nazývá *počáteční (též Cauchyova) úloha*.

Řešení Cauchyovy úlohy nazýváme též *partikulárním řešením rovnice*. Graf libovolného partikulárního řešení se nazývá *integrální křivka*.

(anglicky initial condition, IC, initial value problem, IVP)

Příklad (praktická interpretace řešení počáteční úlohy).

- Pokud diferenciální rovnice udává rychlost ochlazování horkého nápoje a počáteční podmínka teplotu na počátku, je řešením počáteční úlohy funkce, do které dosadíme čas a přímo dostáváme teplotu nápoje v daném čase.
- Pokud diferenciální rovnice udává rychlost růstu populace živočišného druhu v čase a počáteční podmínka velikost populace na počátku sledování, je řešením počáteční úlohy funkce, do které dosadíme čas a přímo dostáváme velikost populace v daném čase.
- Pokud diferenciální rovnice udává rychlost nárůstu hladiny podzemní vody ve směru od čerpané studny a počáteční podmínka udává výšku hladiny ve studni, je řešením počáteční úlohy funkce udávající výšku hladiny podzemní vody jako funkci vzdálenosti od studny.

Příklad. Najděte všechny funkce splňující $y' = 2xy$ a $y(0) = 3$. (Naučíme se řešit později.)

Věta (existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy). *Má-li funkce $\varphi(x, y)$ ohraničenou parciální derivaci $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ v okolí počáteční podmínky, potom má počáteční úloha (1)-(2) právě jedno řešení definované v nějakém okolí počáteční podmínky.*

Příklad. Rovnice

$$y' = y \quad (3)$$

má řešení $y = e^x$, což nahlédneme snadno, protože exponenciální funkce se nemění derivováním. Dosazením je možné ukázat, že má dokonce řešení

$$y = Ce^x, \quad (4)$$

kde C je libovolné číslo.

Příklad. Řešení počáteční úlohy

$$y' = y, \quad y(x_0) = y_0$$

najdeme tak, že využijeme řešení (4) a zařídíme, aby byla splněna počáteční podmínka. Tj. řešením počáteční úlohy je

$$y = (y_0 e^{-x_0}) e^x.$$

Vidíme, že toto řešení existuje pro každou počáteční podmínku a proto vzorec (4) popisuje dokonce **všechna** řešení rovnice (3).

Obecné a partikulární řešení

Řešení diferenciální rovnice je nekonečně mnoho. Zpravidla je dokážeme zapsat pomocí jediného vzorce, který obsahuje nějakou (alespoň do jisté míry libovolnou) konstantu C . Takový vzorec se nazývá **obecné řešení rovnice**. Pokud není zadána počáteční podmínka a mluvíme o **partikulárním řešení**, máme tím na mysli jednu libovolnou funkci splňující diferenciální rovnici.

Příklad: Obecným řešením diferenciální rovnice

$$y' = 2xy$$

je

$$y = C e^{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Žádná jiná řešení neexistují, všechna řešení se dají zapsat v tomto tvaru pro nějakou vhodnou konstantu C . Partikulárním řešením je například $y = 5e^{x^2}$. Řešením počáteční úlohy

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 3$$

je

$$y = 3e^{x^2}.$$

Modely využívající diferenciální rovnice

https://youtu.be/UaSCLmV_g4o

Tepelná výměna

- Z fyziky víme, že *rychlost tepelné výměny mezi dvěma tělesy je úměrná rozdílu jejich teplot* (Newtonův zákon).
- Z přednášek o derivacích víme, že rychlost je matematicky derivace. Proces tepelné výměny probíhající podle Newtonova zákona je tedy možno modelovat diferenciální rovnicí

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0).$$

- Rovnice udává, že teplota T horkého tělesa se mění (rychlost změny je derivace) tak, že klesá (znaménko minus) rychlostí úměrnou (konstanta k) teplotnímu rozdílu mezi teplotou tělesa a teplotou okolí T_0 (člen $T - T_0$).
- K rovnici v ideálním případě dodáváme materiálovou charakteristiku (konstantu úměrnosti k) a počáteční teplotu. Řešením rovnice je funkce udávající závislost teploty na čase. Chceme-li znát teplotu za určitý čas, není nutné provádět pokus a čekat na uplynutí požadované doby. Můžeme teplotu přímo vypočítat.
- Někdy může být vhodné nesledovat teplotu T , ale rozdíl oproti okolní teplotě, $\tau = T - T_0$. Rovnice se potom zjednoduší na

$$\frac{d\tau}{dt} = -k\tau,$$

tedy na rovnici, kdy rychlost změny je úměrná funkční hodnotě.

Datování pomocí uhlíku

- Při datování archeologických nálezů pozůstatků živých organismů se využívá fyzikálního poznatku, že radioaktivní prvky se rozpadají rychlostí, která je úměrná množství dosud nerozpadnutého materiálu.
- Rychlost, s jakou se mění množství (a tedy i koncentrace y v daném vzorku) nerozpadnutého radioaktivního materiálu je tedy matematicky popsána rovnicí

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y,$$

kde λ je konstanta úměrnosti. Tato rovnice je přirozeným důsledkem toho, že pro daný nestabilní izotop mají všechny atomy stejnou pravděpodobnost, že u nich dojde k rozpadu a tato pravděpodobnost se s časem nemění.

- Vhodný radioaktivní prvek vybereme podle toho, jak starý vzorek chceme datovat. Nejčastěji měříme množství radioaktivního uhlíku ^{14}C vztažené k množství stabilního ^{12}C . Počáteční podmínka je známa (předpokládáme stejný poměr zastoupení jako relativně nedávno, před průmyslovou revolucí) a díky tomu můžeme najít funkci udávající, jak s časem klesá zastoupení radioaktivního uhlíku. Obsah radioaktivního i stabilního uhlíku je možné změřit a tím získáme odhad, kolik procent radioaktivního uhlíku se rozpadlo. Řešení počáteční úlohy poté použijeme pro odhad doby, kdy organismus přestal spotřebovávat uhlík z atmosféry, tj. odhad stáří vzorku.
- Při pokusu o datování kostí dinosaurů klesne množství radioaktivního uhlíku pod měřitelnou úroveň. Proto se v tomto případě používají látky s delším poločasem rozpadu.

Rovnice samočištění jezer

- Necht veličina y udává množství látky, která znečišťuje vodu v jezeře o objemu V .
- Předpokládejme, že do jezera přitéká čistá voda a stejnou rychlostí odtéká voda s nečistotami (hladina se nemění, je v ustáleném stavu). Necht veličina r udává, jaký objem vody se v jezeře takto vymění za jeden den. Předpokládejme dále (poněkud nerealisticky), že rozdělení znečišťujících částic v jezeře je rovnoměrné.
- Úbytek hmotnosti nečistot za časovou jednotku je dán derivací $\frac{dy}{dt}$.
- Protože koncentrace nečistot v jezeře a v odtékající vodě je $\frac{y}{V}$, je úbytek znečištění možno vyjádřit též ve tvaru $\frac{r}{V}y$. Podíl $\frac{r}{V}$ je pro dané jezero kladná konstanta udávající, jak velká část z celkového množství vody se v jezeře vymění za časovou jednotku. Označíme-li tuto konstantu symbolem k , je proces úbytku nečistot v jezeře popsán diferenciální rovnicí

$$\frac{dy}{dt} = -ky.$$

- Výše uvedená rovnice se nazývá *rovnice samočištění jezer*, ale tento název je čistě formální. Jedná se vlastně o stejnou rovnici, která popisuje radioaktivní rozpad nebo změnu rozdílu mezi teplotou horkého nápoje a místností při chladnutí nápoje.
- Stejnou rovnicí je možné popsat nejenom odbourávání nečistot z životního prostředí, ale i odbourávání léků nebo drog z těla. Považujeme krevní oběh za jezero a lék nebo drogu za znečišťující látku. V případě, že rychlost odbourávání je úměrná koncentraci (platí pro farmakokinetiku prvního řádu, toto splňuje většina léčiv za běžných koncentrací), řídí se proces odbourávání stejnou diferenciální rovnicí.

RC obvod

Při nabíjení kondenzátoru o kapacitě C přes odpor o velikosti R roste napětí na kondenzátoru, tím se mění nabíjecí proud a proto se mění i rychlost nabíjení. Pomocí zákonů elektrotechniky je **možno ukázat**, že nabíjecí proud i kondenzátoru se řídí diferenciální rovnicí

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0.$$

Napětí na kondenzátoru je možno odvodit buď z proudu, napětí na rezistoru a napětí zdroje, nebo z celkového proudu, který prošel kondenzátorem.

Rovnice je tedy stejná jako rovnice radioaktivního rozpadu a rovnice samočištění jezer. Vhodnou manipulací s parametry

součástek je možno měnit koeficient u této rovnice a vhodným spojováním těchto obvodů dokážeme podobně simulovat i složitější rovnice. To je bylo základem analogových počítačů, které nepracovaly s čísly, ale s napětími. Tyto počítače sehrály svou roli v době, kdy číslicové počítače byly nedostupné, pomalé a nespolehlivé. Tím byla historická úloha analogových počítačů splněna a již se nepoužívají.

RC obvod jako takový má však důležité místo i dnes. Dokáže například filtrovat signály podle frekvence. Výpočet jeho charakteristiky (tj. vyřešení rovnice) a sledování napětí na kondenzátoru umožní měření elektrického odporu tam, kde není vhodné odpor určovat z proudu a napětí pomocí Ohmova zákona. Typickým příkladem je odpor dřeva a jeho vodivost, tj. převrácená hodnota odporu. Tato veličina se používá k rychlému stanovení vlhkosti dřeva, nebo je možno ji dlouhodobě sledovat pomocí senzorů zabudovaných do dřevostavby.

Ve skutečnosti žádná elektronická součástka nemá ideální vlastnosti a proto se v obvodu projevují i nežádoucí parazitní charakteristiky. Pokud by toto bylo limitující, je možné obvod nahradit podobně se chovajícím zapojením s **operačním zesilovačem** (odkazovaná stránka pracuje s rovnicí v integrálním tvaru).

Vývoj populace a její ekologický lov

- Zkoumejme velikost y určité populace, v prostředí s nosnou kapacitou K .
- Budeme pracovat s pojmem specifická míra růstu populace, což je rychlost růstu populace vztážená na jednotkové množství populace. Realistickým předpokladem dodaným biologickými vědami je, že v prostředí s omezenými úživnými vlastnostmi specifická míra růstu populace klesá s tím, jak se velikost populace přibližuje k nosné kapacitě, a specifická rychlost růstu populace je modelována funkcí $r \left(1 - \frac{y}{K}\right)$. Podle velikosti koeficientů v této rovnici dělíme živočichy na **r-stratégy** a **K-stratégy** a toto dělení odráží, jak se snaží druh vyrovnávat se změnami prostředí.
- Za uvedených předpokladů je možno vývoj populace popsat rovnicí

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K}\right),$$

tj.

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Tato rovnice se nazývá *logistická rovnice*.

- Pokud lovem snížíme přírůstky populace, můžeme tento proces modelovat rovnicí

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) - h(y),$$

kde $h(y)$ je intenzita lovu populace o velikosti y . Modelování tohoto procesu umožní nalezení ekonomicky výhodné ale přitom trvale udržitelné strategie lovu.

Geometrická interpretace a transformace jednotek

<https://youtu.be/OgzYhnGj34I>

Geometrická interpretace ODE

Protože derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke grafu funkce v tomto bodě, lze rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) \quad (1)$$

chápat jako předpis, který každému bodu v rovině přiřadí směrnici tečny k integrální křivce, která tímto bodem prochází. Sestrojíme-li v dostatečném počtu (například i náhodně zvolených) bodů $[x, y]$ v rovině vektory $(1, \varphi(x, y))$, obdržíme **směrové pole diferenciální rovnice** — systém lineárních elementů, které jsou tečné k integrálním křivkám.

Počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$ geometricky vyjadřuje skutečnost, že graf příslušného řešení prochází v rovině bodem $[x_0, y_0]$. Má-li tato počáteční úloha jediné řešení, neprochází bodem $[x_0, y_0]$ žádná další křivka. Má-li každá počáteční úloha jediné řešení (což bude pro nás velice častý případ), znamená to, že integrální křivky se *nikde neprotínají*.

Transformace diferenciální rovnice

Naučíme se vyjadřovat diferenciální rovnici v jiných proměnných tak, aby bylo možné snížit počet parametrů v této rovnici. Pro jednoduchost budeme uvažovat jenom případ, kdy nová proměnná je lineární funkcí původní proměnné.

Uvažujme funkci y proměnné x . Připomeneme si vzorce pro derivaci součtu, derivaci konstantního násobku a derivaci složené funkce, ale uvedeme si je v kontextu vhodném pro studium diferenciálních rovnic.

- Z derivace součtu a z derivace konstanty plyne pro funkci y a konstantu y_0 vztah

$$\frac{d(y \pm y_0)}{dx} = \frac{dy}{dx} \pm \frac{dy_0}{dx} = \frac{dy}{dx} \pm 0 = \frac{dy}{dx}.$$

- Z derivace konstantního násobku funkce plyne pro funkci y a konstantu k vztah

$$\frac{d(ky)}{dx} = k \frac{dy}{dx}.$$

- Z derivace složené funkce plyne pro konstantu k a veličinu $X = kx$ vztah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dX} \frac{dX}{dx} = \frac{dy}{dX} k$$

tj.

$$\frac{dy}{d(kx)} = \frac{dy}{dX} = \frac{1}{k} \frac{dy}{dx}.$$

Výše uvedené výpočty je možno shrnout do pravidla v následující poznámce.

Poznámka (transformace diferenciální rovnice do jiných jednotek). Pro $Y = k_1(y - y_0)$ a $X = k_2x$ platí

$$\frac{dY}{dX} = \frac{d(k_1(y - y_0))}{d(k_2x)} = \frac{k_1}{k_2} \frac{dy}{dx}$$

a podobně (všimněte si druhé mocniny u k_2 díky druhé derivaci)

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{k_1}{k_2^2} \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Výraz nalevo neobsahuje konstanty, které jsou ve výrazu napravo. Tyto konstanty jsou v definici nových veličin X a Y .

Navíc vzorec z poznámky silně připomíná klasické počítání se zlomky. Proto máme Leibnizův tvar zápisu derivací $\frac{dy}{dx}$ při studiu diferenciálních rovnic více v oblibě, než zápis Lagrangeův, y' .

Příklad. Diferenciální rovnice tepelné výměny

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_\infty), \quad T(0) = T_0 \quad (*)$$

obsahuje tři parametry: teplotu okolního prostředí T_∞ , počáteční teplotu T_0 a konstantu k související s fyzikálními vlastnostmi prostředí. Postupně můžeme posunout teplotní stupnici tak, aby teplota okolí byla nula a počáteční teplota jedna, tj. hodnotu T snížíme o T_∞ a upravíme dílek stupnice $(T_0 - T_\infty)$ -krát

$$\frac{d\left(\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right)}{dt} = -k \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

vydělit konstantou k

$$\frac{d\left(\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right)}{k dt} = -\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

a přeškálovat pomocí konstanty k čas

$$\frac{d\left(\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right)}{d(kt)} = -\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}.$$

Po substituci $y = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$, $x = kt$ má úloha tvar

$$\frac{dy}{dx} = -y, \quad y(0) = 1. \quad (**)$$

Nová rovnice (**) *neobsahuje žádné parametry* a proto je pro studium jednodušší. Přesto je v ní obsažena veškerá informace obsažená v rovnici (*). Tuto informaci je však nutno interpretovat v kontextu definice nových proměnných. Například to, že všechna řešení rovnice (**) konvergují k nule znamená, že všechna řešení rovnice (*) konvergují k T_0 . To, že řešení rovnice (**) klesne na poloviční hodnotu za čas $\ln 2$ znamená, že vzdálenost řešení rovnice (*) od rovnovážného stavu se na polovinu zmenší za čas $\frac{1}{k} \ln 2$.

Poznámka (nondimenzionalizace, rozměrová analýza). Proces eliminace parametrů z modelu popsaného diferenciální rovnicí se nazývá nondimenzionalizace nebo rozměrová analýza modelu, protože eliminaci parametrů je vhodné provádět tak, aby výsledné nové veličiny vycházely bez fyzikálních jednotek. K tomu se provádí rozbor jednotek jednotlivých veličin. V jednoduchých případech však stačí primitivní postup popsaný v odstavcích výše a ukázaný na příkladu. V tomto příkladě veličina x nemá fyzikální jednotku, protože je součinem konstanty k (s jednotkou s^{-1}) a času t (s jednotkou s). Je možné ji považovat za *bezrozměrný čas*. Veličina y také nemá fyzikální jednotku, protože je podílem dvou teplot a je možné ji považovat za *bezrozměrnou teplotu*.

V úloze s ochlazováním tělesa bylo zavedení nových veličin přirozené. I u méně zřejmých úloh zkušenosti ukazují, že je vhodné volit transformaci tak, aby vznikly veličiny bezrozměrné, které nemají fyzikální jednotku. Například v *Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I* je zavedena **bezrozměrná vlhkost, bezrozměrný čas a bezrozměrná vzdálenost** na straně 61 pro rovnici popisující difuzi a **charakteristická délka, Biotovo číslo (bezrozměrná tepelná vodivost) a bezrozměrná teplota, bezrozměrný čas a bezrozměrná vzdálenost** pro rovnici popisující vedení tepla na stranách 88 a 89.

Obecné výhody transformace diferenciálních rovnic jsou následující.

- Po transformaci obsahuje rovnice v nových veličinách menší množství parametrů.
- Nové veličiny jsou bez fyzikální jednotky a tudíž vhodné pro numerické simulace, kdy se zpravidla o jednotky nestaráme.
- Nové veličiny zpravidla nabývají hodnot řádově srovnatelných s jedničkou. Nejedná se ani o tisíce ani o tisíciný.

Všechny tři uvedené skutečnosti vedou k tomu, že s transformovanými rovnicemi se lépe pracuje v numerických modelech.

Příklad. Diferenciální rovnici logistického růstu s lovem konstantní intenzity

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - h$$

je možno přepsat do tvaru

$$\frac{d\frac{x}{K}}{d(rt)} = \frac{x}{K} \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{h}{rK}$$

a po zavedení bezrozměrné velikosti populace $X = \frac{x}{K}$, bezrozměrného času $T = rt$ a bezrozměrné intenzity lovu $H = \frac{h}{rK}$ má model tvar

$$\frac{dX}{dT} = X(1 - X) - H.$$

Jinými slovy, chování modelu například z hlediska konvergence řešení k nenulové hodnotě závisí na parametru $\frac{h}{rK}$. Pokud se sníží nosná kapacita prostředí o dvacet procent, je nutné pro udržení stejného chování rovnice snížit lov nebo zvýšit koeficient r tak, aby poměr $\frac{h}{rK}$ zůstal zachován.

ODE tvaru $\frac{dy}{dx} = f(y)$, autonomní ODE

<https://youtu.be/SVDLZMifW8Y>

Rovnice

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \quad (\clubsuit)$$

se nazývá *autonomní*, nebo též *nezávislá na čase*. Je speciálním případem rovnice se separovanými proměnnými, která je uvedena na dalším slidu a naučíme se ji řešit analytickou cestou. Proto se nyní nebudeme zaměřovat na hledání obecného řešení, ale pokusíme se popsat chování řešení, aniž bychom tato řešení znali. Pokusíme se s co nejmenší námahou říct, jak se budou řešení chovat.

- Je-li $f(y_0) = 0$, je konstantní funkce $y(x) = y_0$ řešením rovnice (♣). Protože derivace konstantní funkce je nula, vidíme, že řešením rovnice

$$f(y) = 0$$

obdržíme všechna konstantní řešení rovnice (♣). Tato konstantní řešení se nazývají *stacionární body*.

- Stacionární body a jim odpovídající konstantní řešení představují rovnovážný stav. Často nás zajímá, jestli při vychýlení z tohoto rovnovážného stavu má systém tendenci se vrátit do původního stavu, nebo se od původního stavu dále odchylovat.

- Pokud se při malém vychýlení z rovnovážného stavu systém do tohoto stavu vrací, mluvíme o *stabilním stacionárním bodu*.
- Pokud se systém po malé výchylce do tohoto rovnovážného stavu nevrací, ale vyvíjí se k dalšímu stacionárnímu bodu nebo neohraničeně, mluvíme o *nestabilním stacionárním bodu*.

Následující věta umožní odlišit stabilní a nestabilní stacionární body. Protože v přírodě dochází k drobným perturbacím neustále, udává vlastně, které stacionární stavy jsou realizovatelné a můžeme je v přírodě pozorovat a které jsou prakticky nerealizovatelné.

Věta (stabilita konstantních řešení). Jestliže platí $f(y_0) = 0$, je konstantní funkce $y(x) = y_0$ konstantním řešením rovnice

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

Toto řešení je stabilní pokud $\frac{df}{dy}(y_0) < 0$ a nestabilní pokud $\frac{df}{dy}(y_0) > 0$.

Pro grafickou interpretaci je vhodné připomenout, že funkce s kladnou derivací jsou rostoucí a funkce se zápornou derivací klesající. Pokud má tedy pravá strana derivací různou od nuly, poznáme stabilitu z monotonie pravé strany.

Příklad. Logistická diferenciální rovnice s konstantním lovem h , tj. rovnice

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) - h,$$

má pro malé h dva stacionární body. Funkce $ry \left(1 - \frac{y}{K}\right)$ je parabola otočená vrcholem nahoru a s nulovými body $y = 0$ a $y = K$. V prvním stacionárním bodě je funkce rostoucí a tento stacionární bod je nestabilní. Ve druhém stacionárním bodě je funkce klesající a tento stacionární bod je stabilní. Jak se zvyšuje faktor h , graf paraboly se posouvá směrem dolů a oba stacionární body se posouvají směrem k sobě a k vrcholu. Jejich stabilita zůstává neporušena. To znamená, že sice pořád existuje stabilní stav, ale se zvyšující se intenzitou lovu se tento stacionární stav dostává stále blíže ke stavu nestacionárnímu a rovnováha je tedy poněkud křehká.

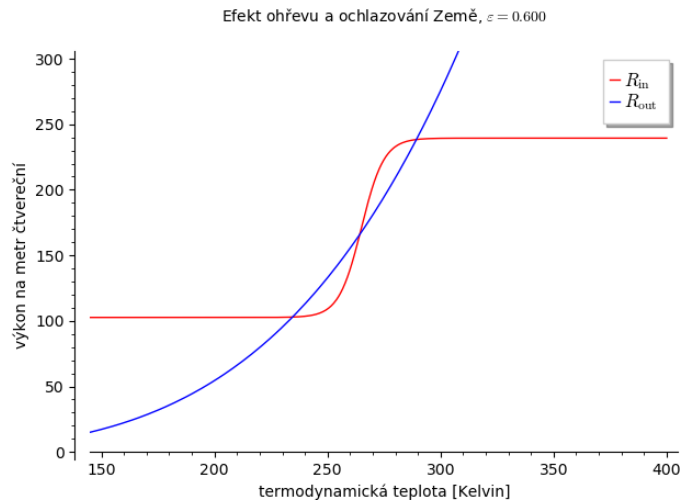
Poznámka (autonomní rovnice s rozdílem na pravé straně). Rovnice

$$\frac{dy}{dx} = g(y) - h(y)$$

má stacionární bod y_0 , jestliže

$$g(y_0) = h(y_0).$$

Často jsou funkce g a h zadány graficky a stacionární bod je v průsečíku grafů funkcí g a h . Ze vzájemné polohy těchto grafů také vidíme, zda je stacionární bod stabilní (funkce g je napravo od bodu y_0 pod funkcí h a nalevo nad ní) nebo nestabilní (naopak).



Obrázek 6.1: Funkce z pravé strany rovnice pro teplotní bilanci Země

Příklad. Teplotní bilanci Země je možno vyjádřit **rovníci**

$$\frac{dT}{dt} = R_{in}(T) - R_{out}(T),$$

kde R_{in} a R_{out} jsou funkce dané na obrázku. Vidíme tři průsečíky, tj. tři stacionární body. Uvažujme stacionární bod nejvíce napravo. Malá výchylka nahoru k větší teplotě nás posune do oblasti, kde převažuje vyzařování energie, R_{out} je větší než R_{in} , pravá strana je záporná a teplota klesá zpět do stacionárního stavu. Podobně, malá výchylka směrem dolů způsobí nárůst a opět návrat do stacionárního stavu. Stacionární stav zcela vpravo je tedy stabilní. Podobně ukážeme, že stacionární stav odpovídající průsečíku zcela vlevo je také stabilní. Naopak, stacionární stav uprostřed je nestabilní, libovolná výchylka z tohoto stavu způsobí přechod systému do některého ze stabilních stavů.

ODE tvaru $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ (rovnice se separovanými proměnnými)

<https://youtu.be/NNQADiRyTEA>

Definice (ODE se separovanými proměnnými). Diferenciální rovnice tvaru

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (\text{S})$$

kde f a g jsou funkce spojité na (nějakých) otevřených intervalech se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými*.

Příklad: Rovnice

$$y' + xy + xy^2 = 0$$

je rovnicí se separovanými proměnnými, protože je možno ji zapsat ve tvaru

$$y' = -xy(y + 1).$$

Rovnice

$$y' = x^2 - y^2$$

není rovnice se separovatelnými proměnnými.

Řešení ODE se separovanými proměnnými

- Má-li algebraická rovnice $g(y) = 0$ řešení k_1, k_2, \dots, k_n , jsou konstantní funkce $y \equiv k_1, y \equiv k_2, \dots, y \equiv k_n$ řešeními rovnice.
- Pracujeme na intervalech, kde $g(y) \neq 0$ a odseparujeme proměnné.

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

- Získanou rovnost integrujeme. Tím získáme obecné řešení v implicitním tvaru.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

- Pokud je zadána počáteční podmínka, je možné ji na tomto místě dosadit do obecného řešení a určit hodnotu konstanty C . Tuto hodnotu poté dosadíme zpět do obecného řešení a obdržíme řešení *partikulární*.
- Pokud je to možné, převedeme řešení (obecné nebo partikulární) do explicitního tvaru (vyjádříme odsud y).

Poslední krok (převod do explicitního tvaru) je volitelný, zpravidla záleží na tom, co dalšího hodláme s řešením dělat. Pro většinu výpočtů je však explicitní tvar vhodnější než tvar implicitní a proto se o něj vždy snažíme.

Poznámka (zápis partikulárního řešení pomocí určitého integrálu). V případě počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$ je možné spojit třetí a čtvrtý krok a použít určitý integrál

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Počáteční úloha má jediné řešení, pokud má pravá strana ohraničenou parciální derivace podle y , jak je zmíněno v úvodu přednášky. Nicméně pro diferenciální rovnici se separovanými proměnnými je možné vyslovit následující mnohem jednodušší postačující podmínku pro jednoznačnost řešení.

Věta (existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici se separovanými proměnnými). Je-li $g(y_0) \neq 0$, má počáteční úloha

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0$$

právě jedno řešení definované v nějakém okolí počáteční podmínky.

Diferenciální rovnice růstu vodní kapky

Modelujme růst kulové kapky. Ta roste tak, že na povrchu kondenzují vodní páry. Kapka proto roste tak, že její objem se zvětšuje rychlostí úměrnou povrchu. Povrch je zase úměrný druhé mocnině poloměru a poloměr je úměrný třetí odmocnině objemu. Platí tedy (po sloučení všech konstant úměrnosti do jedné)

$$\frac{dV}{dt} = kV^{2/3}.$$

Tato rovnice má konstantní řešení $V = 0$. Nekonstantní řešení dostaneme po úpravě

$$V^{-2/3}dV = kdt$$

a po integraci

$$\int V^{-2/3}dV = k \int dt,$$

což dává

$$3V^{1/3} = kt + C$$

a

$$V = \left(\frac{1}{3}kt + \frac{1}{3}C \right)^3,$$

tj.

$$V = (k_0t + c)^3,$$

kde $k_0 = \frac{1}{3}k$ a $c = \frac{1}{3}C$ jsou konstanta spojená rychlostí kondenzace a integrační konstanta.

Všimněte si, že počáteční úloha s počáteční podmínkou $V(0) = 0$ má konstantní nulové řešení

$$V(t) = 0$$

a nenulové řešení

$$V(t) = (k_0 t)^3.$$

Máme zde tedy nejednoznačnost v řešení počáteční úlohy. Tato nejednoznačnost není v rozporu s větou o existenci a jednoznačnosti řešení, protože pravá strana je nulová (podmínka pro separovatelnou rovnici není splněna) a nemá ohraničenou derivaci podle V (podmínka pro obecnou rovnici také není splněna). A nejednoznačnost má v tomto případě dokonce fyzikální význam. Plynné skupenství může existovat i pod bodem kondenzace. Takovému jevu se říká přechlazená pára. Aby došlo ke kondenzaci, musí být k dispozici kondenzační jádra, například nečistoty ve vzduchu. Proto ve znečištěném ovzduší dochází častěji ke kondenzaci a tvorbě mlhy. Svě by o tom mohli vyprávět obyvatelé Londýna, kteří se proslulých mlh zbavili poté, co se omezilo topení uhlím. My dnes spíše známe přechlazenou tekutinu ve formě hřejících polštářků, kde se po lupnutí plíškem spustí přeměna skupenství na pevné spojená s intenzivním uvolněním tepla.

Diferenciální rovnice vyšších řádů

<https://youtu.be/ahkeA6fopaQ>

Je-li x poloha tělesa, je derivace $\frac{dx}{dt}$ rychlost a druhá derivace $\frac{d^2x}{dt^2}$ zrychlení. Podle Newtonova pohybového zákona je součin hmotnosti a zrychlení roven výsledné působící síle. Tato síla může mít složku závislou na poloze (například síla, která vrací těleso do rovnovážné polohy), složku závislou na rychlosti (odporová síla prostředí) a složku nezávislou na poloze i rychlosti (například vnější síla). Proto je přirozené v podstatě jakýkoliv pohyb v mechanice modelovat pomocí diferenciální rovnice druhého řádu

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F.$$

Přirozeně přitom formulujeme počáteční podmínky pro počáteční polohu a počáteční rychlost, tj. $x(t_0) = x_0$, $\frac{dx}{dt}(t_0) = x_1$. Každá počáteční úloha má právě jedno řešení. Taková úloha se zpravidla řeší podobně jako u diferenciálních rovnic prvního řádu: najde se obecné řešení a poté se ze všech funkcí, které splňují danou diferenciální rovnici, vybere ta jediná, která splňuje i počáteční podmínky. Numerický výpočet se děje podobně jako u rovnice prvního řádu: řešení se prodlužuje po malých krocích a v rámci každého kroku aproximujeme pohyb rovnoměrným pohybem. (**Film Hidden figures a hlavní hrdinka propočítávající dráhu pro návrat prvního amerického astronauta.**)

Při studiu deformací nosníků nebo kmitů strun, ploch či

těles se setkáme s diferenciálními rovnicemi typů

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = q$$

a

$$\frac{d^4x}{dt^4} = q.$$

U takových úloh definujeme podmínky ve dvou různých bodech. Například u struny nebo u oboustranně vetknutého namáhaného nosníku je v bodech uchycení nulová výchylka a proto je přirozené formulovat okrajové podmínky $x(0) = 0$ a $x(l) = 0$. Řešení takové úlohy existuje jenom pro některé kombinace parametrů. Fyzikální rozbor ukazuje, že okrajová podmínka je to místo, kde se objeví efekt, že struna kmitá jenom na některých frekvencích (na základní frekvenci na kterou je naladěna a na vyšších harmonických frekvencích). Úlohy s okrajovými podmínkami se v praxi vyskytují v poměrně komplikovaných situacích (posuzování ne jednoho nosníku, ale celé konstrukce) a proto se zpravidla řeší přibližně a převádí se na řešení soustav lineárních rovnic.

Poznámka Při odvození rovnice udávající deformaci zatíženého nosníku se vychází z rovnice

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI},$$

kde R je poloměr oskulační kružnice (jeho převrácená hodnota je křivost), M je ohybový moment a E a I jsou konstanty související s materiálem a tvarem nosníku. Je-li osa podél nosníku x a osa y kolmo, je křivost dána pomocí druhé a první derivace vztahem

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3}}.$$

Toto vede na velmi komplikovanou rovnici. Pro malé deformace je první derivace blízká k nule a pokud využijeme lineární aproximaci

$$\frac{\alpha}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \alpha(1+x^2)^{-3/2} \approx \alpha,$$

dostáváme

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^2y}{dx^2},$$

což veškeré výpočty značně zjednodušuje.

Diferenciální rovnice metodou konečných diferencí

Z přednášek o derivaci máme aproximace derivací

$$\frac{df}{dx} = f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

a

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}.$$

Využijeme tuto informaci k ukázce použití na příkladu nosníku s kombinovaným namáháním.

Příklad (podle Autar Kaw et al.: **Finite Difference Method for Ordinary Differential Equations.**) Deformace y nosníku délky L podepřeného na koncích, vystaveného vertikálnímu zatížení q a axiálnímu namáhání T je dána rovnicí

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{T}{EI} y = \frac{qx(L-x)}{2EI},$$

kde E je materiálová charakteristika a I je veličina související s průřezem nosníku (kvadratický moment průřezu, souvisí s velikostí i s tvarem). Okrajové podmínky jsou $y(0) = 0$ a $y(L) = 0$. Po dosazení za druhou derivaci dostáváme

$$\frac{y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)}{h^2} - \frac{T}{EI} y(x) = \frac{qx(L-x)}{2EI}.$$

Pokud délku nosníku L rozdělíme na n částí délky h a pokud označíme $x_i = hi$, $y_i = y(x_i)$, rovnice se redukuje na rovnici

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - \frac{T}{EI} y_i = \frac{qx_i(L-x_i)}{2EI}.$$

To je pro i od $i = 1$ po $i = n - 1$ celkem $n - 1$ lineárních rovnic. K tomu přidáváme rovnice na koncích podepřeného nosníku, kdy platí $y_0 = 0$ a $y_n = 0$. Celkem tedy máme soustavu $n + 1$ lineárních rovnic o $n + 1$ neznámých. Soustava je řešitelná. Protože pro jemné dělení je rovnic obrovské množství, není vhodné se problém snažit zdolat metodami řešení rovnic známými ze střední školy. Problematika spadá do oboru nazývaného lineární algebra, kterému se začneme věnovat na příští přednášce.

Pro analogickou úlohu se vzpěrnou tlakovou pevností dřeva viz též A. Požgaj, *Struktúra a vlastnosti dřeva* str. 359.

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Aplikované vědy (fyzika, biologie, nauka o materiálu, hydrologie) přirozeně formulují své zákony a poznatky mimo jiné i kvantitativně a pomocí pojmů vyjadřujících rychlosti změn. Při přepisu těchto zákonitostí do matematických modelů používáme derivaci jako rychlost růstu (případně záporně vzatou derivaci, jako rychlost poklesu).
- Pokud známým způsobem souvisí změna veličiny popisující stav systému s velikostí této veličiny, je příslušným matematickým modelem diferenciální rovnice. S tímto jsme se setkali již mnohokrát ve cvičení během semestru.

- Naučili jsme se základní diferenciální rovnice řešit analyticky, řekli jsme si, že se dají řešit numericky (v praxi využijeme předpřipravené procedury a proto se touto problematikou nemusíme zabývat do hloubky) a naučili jsme se i rovnice transformovat do jiných proměnných, které mohou být pro studium problému přínosnější, než původní veličiny.

Kapitola 7

Lineární algebra (operace s vektory a maticemi)

- Naučíme se efektivně pracovat s libovolně velkými soustavami rovnic. <https://youtu.be/cPrmTKdk3yk>
- Naučíme se zobrazovat vektory na vektory, které nemusí mířit stejným směrem. To vede k novému typu fyzikálních veličin, k tenzorům.

Motivace (podrobněji).

- V předchozích přednáškách jsme se seznámili s derivacemi, s nástroji umožňující převést fyzikální představu o procesech v materiálu do kvantitativní podoby, kdy dokážeme studované jevy kvantifikovat. V praxi však je analytické řešení těchto fyzikálních modelů realizovatelné pouze v nejjednodušších případech. Pro netriviální příklady používáme numerický přístup, který je v mnoha případech nakonec redukován na řešení soustavy rovnic. Tyto soustavy mají typicky obrovské množství rovnic a neznámých (řádově i v jednoduchých aplikacích řádově desetitisíce nebo statisíce rovnic) a proto je nutné mít k dispozici nástroje, umožňující práci s takto obrovskými soustavami rovnic. V této přednášce si představíme nové objekty, matice, se kterými je libovolně velkou soustavu rovnic možno zapsat jako jeden součin tvaru

$$AX = B.$$

- V úvodní přednášce jsme naformulovali **rovnici vedení tepla** jako rovnici, popisující fyzikální podstatu přenosu tepla v materiálu. Tento popis je ve víorozměrných úlohách nutno zobecnit na dvourozměrný nebo trojrozměrný případ. Potom však u materiálu, který má v různých směrech různé vlastnosti, dochází k tomu, že odezva nemá stejný směr jako podnět. Například u vedení tepla je tok tepla dán směrem poklesu teploty jenom částečně. Vlivem vysoké vodivosti v podélném směru ve srovnání s příčným směrem však je tok tepla odkloněný částečně do podélného směru. Pro popis takového procesu tedy potřebujeme zobrazení, které dokáže změnit nejenom délku, ale i směr vektoru. Toto zobrazení je možné realizovat pomocí matic.

Vektory

<https://youtu.be/iK6KMeYeTcM>

Operace s vektory

Vektorem rozumíme uspořádanou n -tici objektů, pro které má smysl operace sčítání a násobení číslem. Počet komponent v této n -tici se nazývá dimenze vektoru. Tyto komponenty jsou zpravidla čísla nebo skalární funkce. Aby se s vektory dalo rozumně pracovat, musí tvořit vhodnou strukturu. Například operace musí mít neutrální prvek a každý vektor musí mít opačný prvek.

Definice (vektory, vektorový prostor). Množinu V uspořádaných n -tic (a_1, a_2, \dots, a_n) s operacemi sčítání a násobení reálným číslem definovanými

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$
$$c \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (c \cdot a_1, c \cdot a_2, \dots, c \cdot a_n)$$

pro všechna $c \in \mathbb{R}$ a $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in V$ nazýváme *vektorovým prostorem*. Prvky tohoto prostoru nazýváme *vektory*. Prvky a_1, \dots, a_n nazýváme *složky vektoru* (a_1, a_2, \dots, a_n) . Číslo n nazýváme *dimenze prostoru* V .

Vektorový prostor, jehož komponenty jsou uspořádané n -tice reálných čísel označujeme \mathbb{R}^n .

Často pracujeme se sloupcovými vektory. Zápis je potom

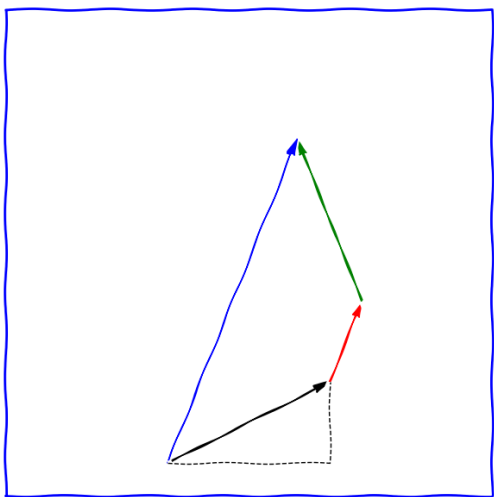
přehlednější.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ -2 + 15 \\ 1 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Neutrálním prvkem vzhledem ke sčítání vektorů je *nulový vektor* \vec{o} , jehož všechny komponenty jsou nulové. Vektor, ke kterému přičteme nulový vektor, se nezmění.

$$\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$$

2D a 3D a vektory v geometrii



Obrázek 7.1: Modrý vektor je součtem ostatních tří vektorů. U černého vektoru je pravoúhlý trojúhelník pro výpočet délky pomocí Pythagorovy věty. Zdroj: Wikipedie.

Dvourozměrné vektory s komponentami danými reálnými čísly můžeme reprezentovat graficky pomocí orientovaných úseček. Ve zvolené soustavě souřadnic a při zvoleném výchozím bodu vektor znázorníme takovou orientovanou úsečkou, že komponenty vektoru označují změnu polohy v jednotlivých směrech. Sčítání vektorů odpovídá posunutí počátečního bodu druhého vektoru do koncového bodu prvního vektoru a nahrazení dvou částečných posunutí jedním celkovým.

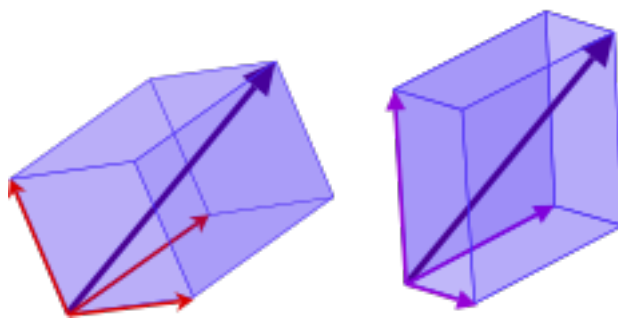
Je přirozené zavést délku vektoru $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ pomocí Pythagorovy věty vzorcem $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Násobení vektoru kladným číslem odpovídá změně délky vektoru. Násobení záporným číslem odpovídá změně délky a otočení směru.

Lineární kombinace

Definice (lineární kombinace). Necht $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ je konečná posloupnost vektorů z vektorového prostoru V . Vektor \vec{u} , pro který platí

$$\vec{u} = t_1 \vec{u}_1 + t_2 \vec{u}_2 + \dots + t_k \vec{u}_k,$$

kde t_1, t_2, \dots, t_k jsou nějaká reálná čísla, se nazývá *lineární kombinace* vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$. Čísla t_1, t_2, \dots, t_k nazýváme *koefficienty lineární kombinace*.



Obrázek 7.2: Stejný modrý vektor vyjádřený ve dvou různých bázích ve 3D, v červené a fialové bázi. Bázové vektory volíme zpravidla jednotkové délky, na obrázku už jsou vynásobeny vhodnými konstantami tak, abychom jako lineární kombinaci obdrželi požadovaný vektor. Zdroj: Wikipedie.

Příklad. Lichoběžníkové pravidlo

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n).$$

ukazuje, že určitý integrál je možno aproximovat lineární kombinací funkčních hodnot na pravidelné mřížce rozdělující obor integrace. Koefficienty lineární kombinace jsou dvojky s výjimkou prvního a posledního koeficientu, které jsou jednotkové. Existují i další aproximační vzorce, které používají jiné koeficienty a jsou založeny například na aproximaci funkce parabolami namísto přímek.

Příklad. V metodě konečných diferencí (viz druhá přednáška o derivacích) se derivace aproximují výrazy, které jsou lineární kombinací po sobě jdoucích funkčních hodnot hledané funkce na pravidelné mřížce délky h . Pro konkrétnost, pro první derivaci máme

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{1}{2h} f(x+h) - \frac{1}{2h} f(x-h),$$

a pro druhou derivaci

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{dx^2} &\approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} \\ &= \frac{1}{h^2} f(x-h) - \frac{2}{h^2} f(x) + \frac{1}{h^2} f(x+h). \end{aligned}$$

Model migrace jako přepínání stavů

Na příkladě si ukážeme, kdy je přirozené pracovat s lineárními kombinacemi vektorů. Pokusíme se na jednoduchém modelu migrace mezi městem a venkovem demonstrovat přístup, který se používá v případech, kdy je možné rozdělit jednotlivé části systému do konečného počtu navzájem disjunktních stavů a jednotlivé části mohou měnit svůj stav, přičemž pravděpodobnost změny je dána pouze současným stavem a ne například historií předchozích stavů. Aplikace zahrnují například modelování vegetace na stanovištích (zájmová oblast je rozdělena na stanoviště a ke každému stanovišti je přiřazen převažující typ vegetace), pro modelování změn druhového složení v lese nebo v krajině, ale i v hydrologických modelech, předpovědi počasí a jinde. Základní model má řadu rozšíření a ukážeme si jej jen v nejjednodušší formě a na případě dvou stavů.

Slovní formulace: Každý rok měříme velikosti populací ve městě a na venkově. Na počátku 60% populace žije ve městě a 40% na venkově. Každý rok zůstane 95% městské populace ve městě a 5% se stěhuje na venkov. Podobně 97% obyvatelstva venkova zůstává a 3% se stěhuje do města.

Matematický model: Procentuální složení zaznamenáváme ve formě vektoru. Na počátku bude

$$\vec{q}_0 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

Po jednom roce je rozložení populace dáno vektorem

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 0.95 \\ 0.05 \end{pmatrix} 0.6 + \begin{pmatrix} 0.03 \\ 0.97 \end{pmatrix} 0.4.$$

Intenzita migrace jednotlivými směry je ve sloupcových vektorech na pravých stranách. Koeficienty v této lineární kombinaci jsou koeficienty vektoru \vec{q}_0 .

Podobně, rozložení po dvou letech bude dáno lineární kombinací s koeficienty, danými vektorem \vec{q}_1 . Pokud bychom potřebovali znát rozložení populace po k letech, situace se komplikuje. Dostali bychom rekurentní vzorec, který je nutno stále opakovat. Pro odstranění tohoto nepohodlí se zavádí pojem matice, viz níže.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

V n -rozměrném prostoru existuje n -tice vektorů, pomocí nichž můžeme dostat libovolný vektor jako lineární kombinaci. Taková n -tice se nazývá *báze*. Dá se ukázat, že bází je nekonečně mnoho a pro zadanou bázi a vektor je vyjádření vektoru pomocí báze vektorů jednoznačné až na pořadí. Nejjednodušší báze je tvořena jednotkovými vektory, které mají všechny komponenty kromě jedné nulové. Například

pro báze vektory $\vec{e}_1 = (1, 0)$ a $\vec{e}_2 = (0, 1)$ dvourozměrného vektorového prostoru a pro vektor $\vec{v} = (4, 3)$ platí

$$\vec{v} = (4, 3) = (4, 0) + (0, 3) = 4(1, 0) + 3(0, 1) = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

Koeficienty lineární kombinace se nazývají souřadnice. Například souřadnice vektoru $\vec{v} = (4, 3)$ v uvažované bázi jsou $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2}$. Pro báze vektory $\vec{e}_1 = (2, 1)$ a $\vec{e}_2 = (0, 1)$ platí

$$\vec{v} = (4, 3) = 2(2, 1) + 1(0, 1) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

a souřadnice vektoru $\vec{v} = (4, 3)$ v nové bázi jsou $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2}$.

Tady vidíme výhodu “pěkné volby” báze vektorů v prvním případě. Tam jsou souřadnicemi přímo komponenty vektoru.

Aby použití souřadnic mělo smysl, musí existovat jediná možnost jak daný vektor vyjádřit pomocí lineární kombinace zadaných báze vektorů. Tato úloha se dá redukovat na úlohu, zda taková jednoznačnost existuje u nulového vektoru. Tím je motivována následující úvaha a z ní vyplývající definice.

Výsledkem triviální lineární kombinace, tj. lineární kombinace s nulovými koeficienty, je nulový vektor. Pro některé vektory můžeme nulový vektor dostat i jako jinou lineární kombinaci, než je ta triviální. Ukazuje se, že je důležité identifikovat tyto případy a pro rozlišení toho, zda se nulový vektor dá nebo nedá vyjádřit jako netriviální lineární kombinace zavedeme nové pojmy, lineární závislost a nezávislost.

Definice (lineární závislost a nezávislost). Řekneme, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ jsou *lineárně závislé*, jestliže existuje alespoň jedna netriviální lineární kombinace těchto vektorů, jejímž výsledkem je nulový vektor $\vec{0}$, tj. existují-li reálná čísla t_1, t_2, \dots, t_k , z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že platí

$$\vec{0} = t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \dots + t_k\vec{u}_k.$$

V opačném případě říkáme, že vektory jsou *lineárně nezávislé*.

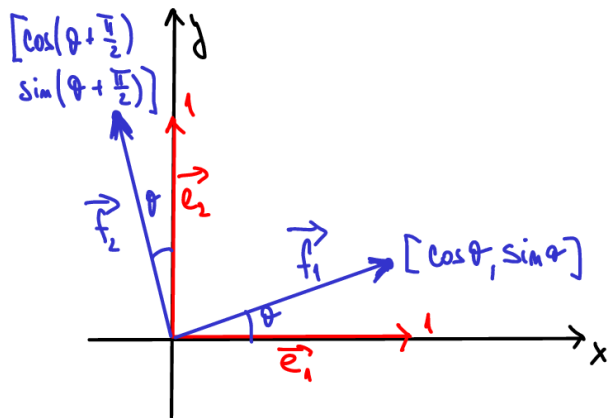
Platí následující.

- Vektory, které tvoří bázi, jsou lineárně nezávislé.
- Je-li vektorů větší počet, než je dimenze prostoru, jsou tyto vektory lineárně závislé.
- Je-li v posloupnosti vektorů některý vektor násobkem jiného vektoru nebo lineární kombinací ostatních vektorů, jedná se o lineárně závislou posloupnost vektorů.

Ve výše uvedených případech poznáme lineární závislost snadno. Mimo tyto případy je to snadné pouze pro dvojici vektorů, které jsou lineárně závislé právě tehdy když je jeden vektor násobkem druhého. V tom případě říkáme, že vektory mají stejný směr. V ostatních případech se lineární závislost a nezávislost naučíme posuzovat později při výpočtu hodnoti.

Pootočení vektoru

<https://youtu.be/7vyBwmZZ3Pg>



Obrázek 7.3: Jednotkové vektory ve směru os pootočíme o úhel θ a výsledek vyjádříme jako lineární kombinaci původních vektorů.

Ve dvourozměrném vektorovém prostoru uvažujme jednotkové vektory ve směru souřadných os $\vec{e}_1 = (1, 0)$ a $\vec{e}_2 = (0, 1)$. Pokud pootočíme vektory o úhel θ v kladném směru, mají pootočené vektory \vec{f}_1, \vec{f}_2 souřadnice

$$\vec{f}_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$$

(plyne přímo z definice funkcí sinus a kosinus na jednotkové kružnici) a

$$\vec{f}_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

(plyne z předchozího přičtením úhlu $\frac{\pi}{2}$ a využitím identit

$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$ a $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$). Pomocí lineární kombinace můžeme psát

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= \cos(\theta)\vec{e}_1 + \sin(\theta)\vec{e}_2, \\ \vec{f}_2 &= -\sin(\theta)\vec{e}_1 + \cos(\theta)\vec{e}_2.\end{aligned}$$

Je-li úhel θ malý, platí (viz cvičení z derivací) $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ a dostáváme

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= (1, \theta) = \vec{e}_1 + \theta\vec{e}_2, \\ \vec{f}_2 &= (-\theta, 1) = -\theta\vec{e}_1 + \vec{e}_2.\end{aligned}$$

Matice

https://youtu.be/DY044M_RbVs

Matice a jejich lineární kombinace

Definice (matice). Maticí řádu $m \times n$ rozumíme schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde a_{ij} pro $i = 1..m$ a $j = 1..n$ jsou reálná čísla nebo funkce. Množinu všech matic řádu $m \times n$, jejichž prvky jsou reálná čísla, označujeme symbolem $\mathbb{R}^{m \times n}$. Zkráceně zapisujeme též $A = (a_{ij})$.

Je-li $m = n$ nazývá se matice A *čtvercová matice*, jinak *obdélníková matice*. Je-li A čtvercová matice, nazýváme prvky tvaru a_{ii} , tj. prvky, jejichž řádkový a sloupcový index jsou stejné, *prvky hlavní diagonály*.

Pro matice definujeme *sčítání* a *násobení číslem* stejně jako u vektorů, tj. po složkách. Má potom smysl mluvit o lineární kombinaci matic a o jejich lineární závislosti či nezávislosti. Tyto operace přirozeně přebírají všechny důležité vlastnosti operace sčítání, jako jsou asociativita, komutativita, existence neutrálního prvku nebo existence opačného prvku.

V této fázi je vlastně jedno, jestli prvky jsou uspořádány jako řádkový nebo sloupcový vektor nebo jako matice. Odlišení matic a vektorů provedeme zavedením maticového součinu.

Maticový součin

Definice (součin matic). Buďte $A = (a_{ij})$ matice řádu $m \times n$ a $B = (b_{ij})$ matice řádu $n \times p$. *Součinem matic* A a B (v tomto pořadí) rozumíme matici $G = (g_{ij})$ řádu $m \times p$, kde

$$g_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

pro všechna $i = 1..m$, $j = 1..p$. Zapisujeme

$$G = AB$$

(v tomto pořadí).

Slovy: v j -tém sloupci matice AB je lineární kombinace sloupců matice A , přičemž koeficienty této lineární kombinace jsou prvky z j -tého sloupce matice B .

Na maticový součin můžeme pohlížet i pomocí pojmů známých z analytické geometrie. Prvky v součinu matic jsou skalárními součiny řádků první matice se sloupci druhé matice.

Maticový součin

- je asociativní

$$(AB)C = A(BC) = ABC,$$

- je distributivní vzhledem ke sčítání

$$A(B+C) = AB+AC \quad \text{a} \quad (B+C)A = BA+CA,$$

- není však komutativní (AB je obecně různé od BA , proto v předchozím máme roznásobování závorek zleva i zprava),
- ale při násobení skalárem komutativní je:

$$A(\lambda B) = \lambda(AB),$$

kde λ je reálné číslo a A a B jsou matice.

Můžeme tedy měnit uzávorkování, můžeme roznásobovat závorek, nesmíme však měnit pořadí matic při násobení.

Neutrální prvek maticového součinu

U každé operace nás zajímá neutrální prvek, což je prvek, který se v dané operaci nijak neprojeví. Třeba u sčítání čísel je neutrálním prvkem nula, při násobení čísel je neutrálním prvkem jednička. Pokud nějaký prvek potřebujeme zapsat ve tvaru součinu, zapíšeme ho jako součin sebe sama s jedničkou. To využijeme například při vytýkání ve kterém u vytýkaného prvku nefiguruje v některém členu druhý součinitel, jako třeba ve výpočtu

$$3x^2 + x = 3x \cdot x + 1 \cdot x = (3x + 1) \cdot x.$$

Ukážeme si, že podobný neutrální prvek existuje i u násobení matic a trik podobný výše uvedenému využijeme později, až budeme mluvit o vlastních vektorech matice.

Neutrálním prvkem při násobení matic čtvercových je čtvercová matice, která má jedničky v hlavní diagonále a nuly mimo tuto diagonálu. Tato matice se nazývá *jednotková matice* a označuje I . Mají-li čtvercové matice A a I stejný počet řádků a sloupců, platí

$$AI = IA = A.$$

Například pro matice 3×3 je jednotková matice

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je-li A matice 3×3 , kterou násobíme zprava maticí I , výsledná matice AI bude mít tři sloupce (matice I má tři sloupce), v prvním sloupci bude první sloupec matice A (lineární kombinace sloupců matice A s koeficientem 1 pro první sloupec a koeficienty 0 pro všechny další sloupce) atd. Jako výsledek součinu dostaneme přirozeně maticí A . Že stejný výsledek dostaneme i pro opačné pořadí v součinu je možné pro nějaký konkrétní případ ověřit přímo a že toto funguje obecně se nejnázne ukáže, až si představíme operaci transponování matice a její vztah k maticovému součinu.

Aplikace maticového součinu 1/3

Nejdůležitější aplikací maticového součinu je to, že pomocí maticového součinu je možné vyjádřit zobrazení, kde na vstupu i na výstupu jsou vektorové veličiny. To umožní rozšířit fyzikální zákony na anizotropní látky (různé vlastnosti v různých směrech, například dřevo nebo obecně látky vykazující uspořádanou strukturu). Kromě fyzikálních veličin, které mají číselnou hodnotu (skaláry) nebo číselnou hodnotu a směr (vektory) tak získáváme další fyzikální veličiny, tenzory. Více viz níže a též podkapitola “Matice jako zobrazení v materiálovém inženýrství”.

Je-li druhá matice v součinu sloupcový vektor \vec{u} , je výsledkem maticového součinu matice A a tohoto vektoru opět sloupcový vektor $A\vec{u}$. Matici je tedy možné chápat jako zobrazení, kdy vektoru \vec{u} je přiřazen vektor \vec{v} vztahem

$$\vec{v} = A\vec{u}.$$

Tento vztah je možné chápat jako přímé rozšíření vztahu pro přímou úměrnost mezi veličinami. Zobecnění je v tom, že obě veličiny mezi nimiž je vztah úměrnosti jsou vektorovými veličinami a konstanta úměrnosti je matice. Ve fyzice tato matice mívá ještě některé speciální vlastnosti související například s tím, že fyzikální zákony nezávisí na volbě souřadné soustavy a proto se takové matice nazývají **tenzory** (přesněji tenzory druhého řádu). Používáme je pro popis zobrazení mezi vektory, které nezachovává směr vektoru. Například studium transportních dějů v anizotropních materiálech (tj. například vedení tepla ve dřevě nebo difuze ve dřevě).

Aplikace maticového součinu 2/3

<https://youtu.be/4jqBoskZ9Ak>

Derivace diskrétní funkce

V metodě konečných diferencí jsme si ukázali a v předcházejícím textu připomněli, že derivace umíme aproximovat výrazy, které jsou lineární kombinací po sobě jdoucích funkčních hodnot hledané funkce na pravidelné mřížce délky h . Toto je možné vyjádřit pomocí maticového součinu. Pro konkrétnost, pro druhou derivaci aproximujeme pomocí tří po sobě jdoucích hodnot v ekvidistantních krocích vzorcem

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}f(x-h) - \frac{2}{h^2}f(x) + \frac{1}{h^2}f(x+h).$$

Tento vztah můžeme chápat jako lineární kombinaci hodnot

$$\frac{1}{h^2}, \quad -\frac{2}{h^2}, \quad \frac{1}{h^2}$$

s koeficienty

$$f(x-h), \quad f(x), \quad f(x+h).$$

Pokud je například funkce $f(x)$ na intervalu I dána funkčními hodnotami $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(x_5)$ v bodech rovnoměrně rozmístěných ve vzdálenosti h od sebe, můžeme vypočítat druhé derivace $f''(x_2), f''(x_3)$ a $f''(x_4)$ pomocí vztahů

$$f''(x_2) \approx \frac{1}{h^2}(f(x_1) - 2f(x_2) + f(x_3))$$

$$f''(x_3) \approx \frac{1}{h^2}(f(x_2) - 2f(x_3) + f(x_4))$$

a

$$f''(x_4) \approx \frac{1}{h^2}(f(x_3) - 2f(x_4) + f(x_5)).$$

Tyto tři rovnice je možnou zapsat jediným vztahem pomocí maticového násobení

$$\begin{pmatrix} f''(x_2) \\ f''(x_3) \\ f''(x_4) \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \end{pmatrix}.$$

Proto matice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

hraje důležitou roli v numerické matematice při numerickém modelování fyzikálních dějů. Až na první a poslední řádek se jedná o matici, která umí zprostředkovat numerické derivování funkce. První a poslední řádek se přidávají, aby matice získala čtvercový tvar a jistou míru symetrie. (Symetrickým maticím se budeme věnovat za chvíli.) Tyto dva přidané řádky se uplatní při formulaci okrajových podmínek definujících chování funkce na koncích intervalu.

Pomocí maticového součinu dokážeme reprezentovat libovolné zobrazení, které zachovává součet a násobení konstantou, mezi něž derivování patří. Jiný přístup k maticové formulaci derivace, k derivování na množině polynomů, si ukážeme ve cvičení.

Markovovy řetězce

Budeme pokračovat v příkladě s migrací. Viděli jsme, že po jednom roce je tedy rozložení populace dáno vektorem

$$\vec{q}_1 = 0.6 \begin{pmatrix} 0.95 \\ 0.05 \end{pmatrix} + 0.4 \begin{pmatrix} 0.03 \\ 0.97 \end{pmatrix}.$$

Koeficienty vektoru $\vec{q}_0 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$ jsou koeficienty v této lineární kombinaci. To lze zapsat jako maticový součin

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

Pro další rok tento postup opakujeme. Pro matici $A = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}$ platí

$$\vec{q}_1 = A\vec{q}_0.$$

Je-li \vec{q}_k vektor charakterizující rozložení po k letech, rozložení v následujícím roce získáme ze vztahu

$$\vec{q}_{k+1} = A\vec{q}_k.$$

Pro stav po dvou letech platí

$$\vec{q}_2 = A\vec{q}_1 = A(A\vec{q}_0) = (AA)\vec{q}_0 = A^2\vec{q}_0.$$

Po k letech je rozložení populace dáno vektorem

$$\vec{q}_k = A^k \vec{q}_0.$$

Pokud pro některý vektor \vec{q} platí

$$\vec{q} = A\vec{q}$$

znamená to, že systém je ve stacionárním stavu a procentuální zastoupení stavů se nemění. Například v našem modelu to znamená, že stejný počet lidí přestěhovaných z města do vesnice je stejný, jako počet lidí přestěhovaných opačným směrem. Tento stacionární stav se dá najít opakovanými iteracemi z náhodného výchozího stavu. [Online výpočet.](#)

Takový rekurentní vzorec je možno chápat jako jakýsi stavový automat, který řídí přepínání mezi dvěma stavy (obyvatel města, obyvatel vesnice). V matematice se nazývá *Markovův řetězec*. Protože uvnitř matice jsou pravděpodobnosti a v každém sloupci vždy nastane právě jeden z jevů, který tyto pravděpodobnosti reprezentují, je součet čísel v každém sloupci matice roven jedné. V obecných stavových modelech, kde se nepracuje s pravděpodobnostmi, jako je například Leslieho model růstu populace níže, tato podmínka platit nemusí.

(Podle D. Lay, Linear algebra. Markovovy řetězce viz též Wikipedie, ale pozor: někdy se místo zde představeného zápisu používá zápis s řádkovým vektorem nalevo od matice popisující změnu stavů.)

Růst populace pomocí Leslieho matice

Leslieho model používá matice pro modelování vývoje populace, který zohledňuje věkovou strukturu populace. Model předpokládá, že populace je rozdělena do několika věkových

kategorií a v každé kategorii je dána pravděpodobnost dožití se do další kategorie a průměrný počet potomků. Situace je podobná jako u Markovova řetězce s tím, že nenulový prvek matice bude jenom tam, kde dochází k přesunu do další věkové kategorie nebo tam, kde kumulujeme počet nově narozených jedinců v nejnižší věkové kategorii pro jednotlivé věkové skupiny rodičů.

Příslušný model například pro populaci rozdělenou do tří věkových kategorií by byl dán rovnicí

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}$$

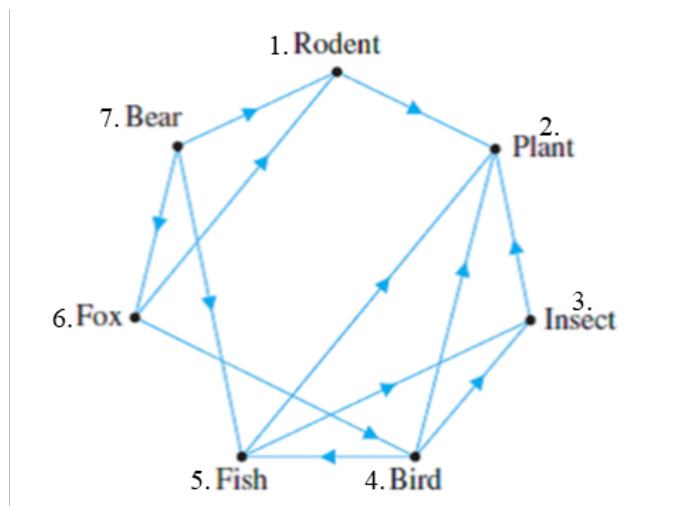
Opakovaným násobením získáme věkovou strukturu populace v další generaci a toto se opakuje podobně jako u Markovova řetězce.

Původně byl Leslieho model odvozen pro modelování populace samic, dá se však adaptovat na populaci obecně.

Další informace:

- [Z. Pospíšil, Maticové populační modely](#)

Analýza sítí a toků v sítích



Obrázek 7.4: Jednoduchý potravní řetězec. Zdroj: <https://linearalgebraapplications19.wordpress.com/2019/04/29/food-webs/>

Matice je možné použít k analýze sítí a toků v sítích, kdy sítí rozumíme například potravní řetězec, kaskádu chemických a biochemických reakcí představujících metabolismus živého organismu a podobně. Matice umožňují hledat v sítích zákonitosti a vazby, umožňují modelovat toky mezi uzly v sítích, umožňují provádění experimentů v počítači namísto

laboratoře. To zrychluje, zlevňuje a zefektivňuje práci a umožňuje automatizaci a hlubší studium.

Jednoduchá ukázka potravní sítě je na obrázku a tato síť by se dala charakterizovat maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Je-li například vektor v sloupcový vektor ze samých jedniček, potom vektor Av udává počet přímých potravních zdrojů pro každý druh v řetězci. Podobně, vektor A^2v udává počet nepřímých potravních zdrojů přes jednoho zprostředkovatele. Více viz [blogový zápisek Food Webs](#).

Analogicky bývají studovány metabolické sítě, kde místo vztahů jsou chemické reakce a prvky matice označují, které produkty v jakém množství vstupují do těchto reakcí (stoichiometrické koeficienty). Je-li X sloupcový vektor označující množství jednotlivých metabolitů, v sloupcový vektor označující rychlosti jednotlivých reakcí a A matice stoichiometrických koeficientů, platí

$$\frac{dX}{dt} = Av,$$

kde derivaci vektoru chápeme po složkách jako vektor sestavený z derivací jednotlivých komponent. Viz například [Basic concepts and principles of stoichiometric modeling of metabolic networks](#)

Reálné sítě mají tisíce uzlů a tisíce vztahů mezi nimi a není možné je studovat jinak, než matematickými metodami. Například [model Escherichia Coli](#), hojně studované bakterie, obsahuje 1805 metabolitů, 2583 reakcí a 1367 genů. Matice umožňují studovat nejenom vztahy ale i intenzitu toku mezi jednotlivými metabolity a umožní studovat vliv vnějších zásahů, například knockautování některých genů nebo umístění bakterie do anaerobního prostředí. V příkladě s potravním řetězcem například můžeme (po dodání dalších informací do modelu) určit, jakým procentem se jednotlivé složky potravy podílí na celkovém jídelníčku a jak se toto složení změní při odstranění nějaké složky potravy.

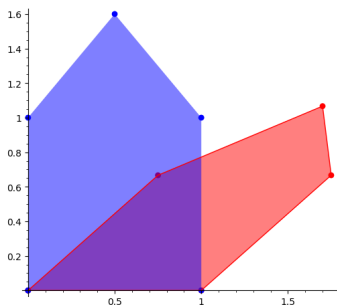
Aplikace maticového součinu 3/3: matice jako zobrazení, tenzory

<https://youtu.be/7NH8p323zxo>

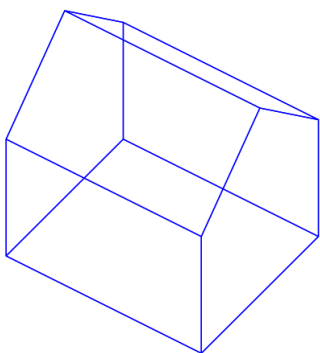
Nyní se na zobrazení pomocí matice podíváme očima geometra a poté očima materiálového inženýra. Matici budeme

chápat jako objekt, který je možné vynásobit s vektorem a získat jiný vektor. V určitém smyslu jde tedy o zobrazení, kdy vzory i obrazy jsou vektory.

Matice jako zobrazení v geometrii



Obrázek 7.5: Příklad transformace dané matice. Zachovává se například rovnoběžnost a středy úseček. Přímky se zobrazují na přímky.



Obrázek 7.6: Transformace 3D objektu do roviny pomocí matice. Koeficienty matice můžou realizovat libovolné natočení.

Je-li A čtvercová matice, můžeme každému vektoru \vec{q} přiřadit vektor $Y = A\vec{q}$ a tím definovat zobrazení n -rozměrného prostoru do sebe. Dá se ukázat, že takto dostaneme všechna zobrazení, která zobrazují úsečky na úsečky, počátek nechávají v počátku a jsou pěkná v tom smyslu, že zachovávají středy úseček, rovnoběžnost a lineární kombinaci vektorů. **Ukázka zobrazení ve 2D.**

Podobně je možné definovat i zobrazení mezi prostory jiných dimenzí. Například **projekce 3D objektu do 2D**. Protože zobrazení zachovává rovnoběžnost, není možné takto jednoduše obdržet například perspektivu. Protože se zachovává počátek, není možné zahrnout ani posunutí. V obou případech si pomáháme trikem, že **přidáme další souřadnici**, více viz Wikipedie a heslo **Grafické transformace** nebo **Camera matrix**.

Například matice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

zobrazí vektory $e_1 = (1, 0)$ a $e_2 = (0, 1)$ na

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Proto matice R_θ definuje zobrazení, které pootočí rovinu o úhel θ a nazývá se matice rotace. Matice malých rotací je (použitím lineární aproximace $\sin \theta \approx \theta$ a $\cos \theta \approx 1$ v okolí nuly)

$$R_{\theta,0} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}.$$

Tuto matici budeme potřebovat při studiu deformace při odvození matematického popisu malých deformací.

Matice jako zobrazení v materiálovém inženýrství

Matice chápeme jako zobrazení, které má na vstupu vektor a na výstupu opět vektor. Vstupem bývá většinou podnět, kde rozhodující je nejenom síla podnětu, ale i jeho směr. Například nerovnováha tlaku. Výstupem bývá odezva, například proudění vyvolané nerovnováhou tlaku. Tato odezva v izotropním prostředí má směr podnětu, v prostředí s určitou strukturou by se však směr odezvy mohl odchýlit.

Užitečnost maticového součinu v materiálovém inženýrství si můžeme znázornit na proudění vody po povrchu země. Voda teče z kopce dolů, tento směr však můžeme ovlivnit vyoráním brázd. Hnací síla je gravitace, která směřuje z kopce dolů. Odezvou na gravitaci je tok vody, který směřuje velkou rychlostí dolů, pokud je poaráno po spádnici, malou rychlostí dolů, pokud je poaráno po vrstevnici a pokud je poaráno našikmo, tak něco mezi směrem dolů a směrem brázd. V materiálu se může odehrávat totéž.

Výše popsané chování pozorujeme i u proudění podzemní vody, kde hnací silou kromě hladiny podzemní vody může být tlak, nebo u proudění vody ve dřevě, kde hnací silou definující pojem “z kopce dolů” je nerovnoměrnost v rozložení koncentrace vody ve dřevě (jedna část dřeva má větší vlhkost než jiná část) nebo nerovnoměrnost v teplotě (termodifuze, Soretův efekt, transport vlhkosti vyvolaný rozdílem teplot). Výsledné proudění však nemusí přesně sledovat pokles koncentrace vlhkosti. Například dřevo vede podélně vlhkost zpravidla více než desetkrát lépe než v jiných směrech a chová se tedy, jako by v něm byly brázdý odklánějící vodu do podélného směru.

Matematický prostředek, který umožňuje snadno vektoru změnit velikost nebo i směr je právě tenzor (matice) a maticový součin.

Poznámka (tenzor). Pod pojmem *tenzor* si můžeme představit veličinu, která figuruje v nějakém fyzikálním zákoně spojujícím dvě vektorové veličiny (podnět a odezvu na podnět) a násobení tenzorem definuje vztah mezi nimi. Pokud jsou podnětem a odezvou vektory, které mají stejný směr, stačí toto násobení provést pomocí skalární veličiny. Pokud však směr vektoru udávajícího odezvu není stejný jako směr vektoru udávajícího podnět, je nutné použít postup, který si s jiným směrem vektoru na vstupu a na výstupu poradí. A tímto postupem je právě maticový součin. Žatímco tedy například tok tepla v izotropních materiálech můžeme studovat pomocí skalárních materiálových charakteristik, tok tepla v anizotropních materiálech už musíme popisovat pomocí tenzorových materiálových charakteristik. Proto například u vedení tepla ve dřevě udáváme součinitele vedení tepla λ_L , λ_R a λ_T pro každý anatomický směr samostatně a z těchto veličin poté sestavujeme tenzor tepelné vodivosti

$$\begin{pmatrix} \lambda_L & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_R & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_T \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

https://youtu.be/-vYq_TzC6jo

U zobrazování vektorů pomocí maticového násobení nás velice zajímá, které směry se zachovávají, tj. kdy bude obrazem vektoru jeho násobek.

Definice (vlastní vektor a vlastní hodnota matice). Řekneme, že nenulový vektor \vec{u} je *vlastním vektorem* matice A příslušným *vlastní hodnotě* λ , jestliže platí

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}.$$

Vlastní čísla se nazývají též vlastní hodnoty matice. Každý nenulový vlastní násobek vlastního vektoru je vlastní vektor příslušný téže vlastní hodnotě.

Poznámka (vlastní vektory a materiálové inženýrství). Vlastní vektory jsou nesmírně důležité, protože definují směry, podél nichž se zobrazení chová “pěkně”. Tímto zobrazením může být třeba to, jak se působení vnější síly na těleso projeví na deformaci tohoto tělesa nebo jak se gradient teploty nebo vlhkosti projeví na proudění tepla či vody ve dřevě, půdě nebo jiném materiálu. Často se

v aplikacích maticové zobrazení objevuje v *konstitučních vztazích*, vztazích mezi podnětem a materiálovou odezvou. Vlastní směry jsou tedy směry, ve kterých má odezva stejný směr jako podnět.

Pro pravidelně rostlé dřevo je snadné tyto směry určit, jsou to anatomické směry dřeva. Pro zkroucené dřevo nebo při studiu proudění vody, vzduchu či ropy v půdě to již tak snadné není a je nutné tyto směry vypočítat. To se naučíme později.

Příklad. Matice rotace nemá žádnou vlastní hodnotu (pokud tedy uvažujeme vlastní hodnoty v množině reálných čísel), protože pootočením se změní směr všech vektorů. Vlastní hodnoty existují pouze pro otočení o násobky 180° .

Příklad. Matice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (trojnásobek jednotkové matice) zobrazuje každý vektor na trojnásobek a všechny vektory jsou vlastními vektory této matice. Příslušná vlastní hodnota je 3.

Příklad. Matice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má vlastní vektor $(1, 0)$ příslušný vlastní hodnotě 3 a vlastní vektor $(0, 1)$ příslušný vlastní hodnotě 0. Protože vlastními vektory jsou i nenulové násobky, je vlastním vektorem každý nenulový vektor, který má nulovou druhou komponentu (vlastní hodnota je 3) nebo první komponentu (vlastní hodnota je 0).

Příklad. Platí $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ a matice $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ má vlastní vektor $(2, 1)$ příslušný vlastní hodnotě 2, protože vektor $(4, 2)$ je dvojnásobkem vektoru $(2, 1)$. Vlastním vektorem je i každý nenulový násobek vektoru $(2, 1)$.

Příklad. Stacionární stav Markovova řetězce je vlastním vektorem matice, která tento řetězec reprezentuje. Příslušná vlastní hodnota je 1. To plyne hned z rovnosti

$$M\vec{q} = \vec{q}.$$

Kromě toho mohou existovat i další vlastní hodnoty, z praktického hlediska méně zajímavé.

Příklad. Vlastní hodnoty a vektory jsou jedním z hlavních stavebních kamenů **algoritmu**, kterým Google provádí hodnocení důležitosti webových stránek. Vlastní vektory se počítají iteračně, odpovídá to vlastně modelu, kdy Markovův řetězec začneme v libovolném výchozím stavu a postupným iterováním se dostaneme do stacionárního stavu reprezentovaného vlastním vektorem.

Příklad. Leslieho matice má jednu kladnou vlastní hodnotu. Příslušný vlastní vektor definuje rozložení četnosti zastoupení jednotlivých věkových kategorií u populace ve stacionárním

stavu. (Toto není tvrzení patrné na první pohled, ale dá se dokázat.)

V aplikacích často bývá matice “symetrická podle diagonály” a u takové matice vlastní vektory vždy existují. Co se přesně myslí pod pojmem “symetrická matice” si uvedeme na následujícím slidu.

Transponovaná matice

<https://youtu.be/ToqWz-Oxg-4>

Definice (transponovaná matice). Buď $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matice. Matice, která vznikne záměnou řádků matice A za sloupce se nazývá *matice transponovaná k matici A* . Matici transponovanou označujeme symbolem A^T . Platí tedy $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a

$$A^T = (a_{ji}),$$

kde a_{ij} jsou prvky matice A .

Příklad. Matice transponovaná k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

$$\text{je } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Příklad. Skalární součin sloupcových vektorů (chápaných jako matice) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}$ a $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ je možno zapsat jako maticový součin

$$u^T v = (1 \quad -2 \quad a) \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = (a + 10).$$

Příklad. Matice, která se nemění transponováním, tj. $a_{ij} = a_{ji}$ se nazývá **symetrická**. Matice, která splňuje $a_{ij} = -a_{ji}$ se nazývá **antisymetrická**. Pro libovolnou čtvercovou matici A platí

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

První matice v tomto součtu je symetrická a druhá antisymetrická. Takto je možné rozložit matici na součet symetrické a antisymetrické matice. Například matice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

má tento rozklad ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tento trik použijeme pro odvození tvaru tenzoru malých deformací, ze zobrazení takto totiž dokážeme odfiltrovat část související s pootočením a část, která s pootočením nesouvisí. Ta druhá nás zajímá, protože popisuje deformaci.

Věta (souvinnost transponování matice a maticového součinu). Pro čtvercové matice platí

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Příklad. Pro Markovův řetězec s maticí a sloupcovými vektory \vec{q} dostaneme transponováním vztahu

$$\vec{q}_{k+1} = A\vec{q}_k$$

vztah

$$\vec{q}_{k+1}^T = \vec{q}_k^T A^T$$

s řádkovými vektory a maticí, která má součet čísel v každém řádku roven 1. Takto jsou Markovovy řetězce také často zaváděny, například na [Wikipedii](#).

Tenzor malých deformací

<https://youtu.be/5AMXMQyx3jw>

Zobrazení roviny do sebe, které může odpovídat deformaci tělesa působením síly, je možné popsat dvojicí funkcí $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$. Lineární aproximace těchto funkcí v okolí bodu (x_1, x_2) dávají (viz závěr prezentace z přednášky věnované derivací, kdy ještě vpravo pro stručnost vynecháváme argument (x_1, x_2))

$$u_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \approx u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Delta x_2,$$

$$u_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \approx u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Delta x_2,$$

což je možné zapsat maticově jako

$$\begin{pmatrix} u_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \\ u_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}.$$

Člen $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ je posunutí, proto nás zajímá až druhý člen, obsahující deformaci. Pokud matici

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

rozdělíme stejným obratem jako na předešlém slidu na součet symetrické a antisymetrické matice, dostaneme

$$D = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}}_{D_{\text{sym}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & 0 \end{pmatrix}}_{D_{\text{asym}}}.$$

Druhá část reprezentuje pootočení, což snadno nahlédneme, pokud tuto informaci sečteme s identitou reprezentovanou jednotkovou maticí na

$$D_{\text{asym}} + I = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & 1 \end{pmatrix}$$

abychom měli celou část zobrazení (ne jenom deformaci). Porovnáním s maticí malých rotací

$$R_{\theta,0} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$$

odvozenou na jednom z předchozích slidů získáme přímo pootočení. V teorii deformace nás zajímá spíše symetrická část, tj. matice

$$D_{\text{sym}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

popisující změnu tvaru a nazývaná *tenzor malých deformací*. Ten se ještě někdy rozděluje na součet vhodného konstantního násobku jednotkové matice (souvisí se zvětšením nebo zmenšením, tj. se změnou objemu) a deviátor (souvisí se změnou tvaru bez započtení zvětšení či zmenšení).

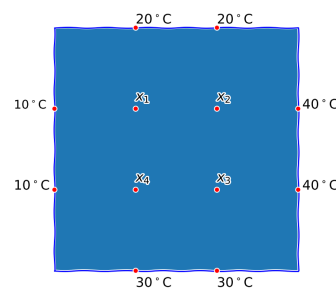
Pro využití v dřevařských úlohách viz též A. Požgaj, Štruktúra a vlastnosti dřeva str 318 nebo P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I, str. 40. Analogicky, ale pro rychlosti, je definován tenzor rychlosti přetvoření (deformační rychlost) používaný v hydrodynamice. Můžeme ji dostat jako derivaci tenzoru malých deformací (při studiu deformací), nebo jako *symetrickou část* matice vytvořené gradienty jednotlivých komponent rychlosti proudění. Pro proudění vody viz J. Říha, Matematické modelování hydrodynamických a disperzních jevů, kap. 3.3.

Obrázky a online výpočty, Sage.

Rozložení teploty na tepelně vodivé desce

<https://youtu.be/xV46lYgdHSQ>

Na závěr si ukážeme, že pomocí lineární algebry a maticového počtu je možno popsat funkci dvou proměnných popisující rozložení teploty na tepelně vodivé desce. Postup je takový, že budeme sledovat teplotu v referenčních bodech. Požadavek, že teploty v okolních bodech mají odpovídat našim představám o vedení tepla vyjádříme kvantitativně pomocí vhodné matice.



Obrázek 7.7: Rozložení teploty na tepelně vodivé desce je možné přibližně zkoumat metodami lineární algebry. A až na některé triviální případy jinou možnost vlastně nemáme, protože přesné řešení rovnice vedení tepla je v prakticky zajímavých případech nereálné. Podobně to je s mechanickým namáháním nebo transportem látek porézním prostředím.

Uvažujme čtvercovou desku, kterou si rozdělíme sítí na 12 uzlových bodů (rohy zanedbáme) jak je uvedeno na obrázku. V uzlových bodech na okraji desky je teplota zadána (okrajová podmínka), zajímá nás rozložení teploty v ostatních uzlových bodech.

Učiníme (poměrně realistický) předpoklad, že teplota v každém uzlovém bodě je díky tepelné vodivosti desky ovlivněna sousedními uzlovými body. Každý sousední bod má stejný vliv, proto teplota v uzlovém bodě bude přibližně rovna aritmetickému průměru teplot v sousedních bodech. Kvantitativně zformulováno, platí

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}(10 + 20 + x_2 + x_4) \\ x_2 &= \frac{1}{4}(20 + 40 + x_1 + x_3) \\ x_3 &= \frac{1}{4}(30 + 40 + x_2 + x_4) \\ x_4 &= \frac{1}{4}(10 + 30 + x_1 + x_3) \end{aligned} \quad (1)$$

anebo po úpravě

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_4 &= 30 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 60 \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 &= 70 \\ -x_1 - x_3 + 4x_4 &= 40 \end{aligned}$$

Dostali jsme soustavu lineárních rovnic o čtyřech neznámých. Tuto úlohu je možno zformulovat pomocí lineární kombinace

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} x_4 = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 70 \\ 40 \end{pmatrix}$$

nebo pomocí maticového násobení (s vynechanými nulami uvnitř matice)

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & 4 & -1 \\ -1 & & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 70 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Úloha je tedy převoditelná na úlohu řešení soustavy lineárních rovnic. Pro podrobnější popis použijeme stejnou myšlenku, ale mnohem více uzlových bodů. Postup je stejný, pouze vznikne soustava s více neznámými a více rovnicemi.

Poznámka. Rovnice popisující vedení tepla na základě fyzikálních principů je poměrně komplikovaně řešitelná a proto se zpravidla převádí na problém lineární algebry. Může to znít překvapivě, ale skončíme u něčeho podobného jako v našem jednoduchoučkém modelu. Výše uvedený postup se nazývá metoda konečných diferencí, ale jsou i další metody, například metoda konečných prvků. Společným znakem je rozdělení oblasti našeho zájmu na velké množství bodů a aproximace fyzikálních zákonů pro sledovaný jev v každém bodě pomocí lineární rovnice. Tím vznikne úloha na řešení soustavy rovnic. Používá se k modelování proudění tepla nebo vody, k modelování mechanického namáhání od jednoduchých nosníků po komplikované konstrukce nebo stromy. Soustava vytvořená pomocí takových modelů je velmi řídká, má hodně nul. Je proto možné ji rychle vyřešit i v případě tisíců rovnic. My se později například naučíme chytře využít toho, že každý řádek má v hlavní diagonále větší číslo, než je součet zbylých čísel v tomto řádku.

Poznámka (iterační metoda). Soustavu (1) je možno vyřešit iterační metodou. Je možno postupovat intuitivně. Vyjdeme z libovolného odhadu řešení a teplotu v každém bodě budeme opakovaně nahrazovat průměrem teplot v okolních bodech, dokud se hodnoty neustálí. Kdy tento postup funguje a jak se dá zformalizovat si ukážeme později (Jacobiho metoda).

[Online výpočet maticově.](#)

[Online výpočet rovnicemi.](#)

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Seznámili jsme se s vektory. S objekty, které umožňují pracovat s veličinami mající kromě numerické hodnoty i směr.
- Seznámili jsme se s maticemi, s objekty, které umožní pracovat se zobrazením vektorů na vektory, kdy směr vzoru a obrazu nemusí být (na rozdíl od násobení reálným číslem) stejný. Díky tomu dokážeme popsat reakci materiálu na podněty v případě, kdy má materiál v různých směrech různé vlastnosti.
- Matice umožňují kompaktní zápis soustavy libovolného počtu lineárních rovnic jedinou rovnicí

$$AX = B.$$

- V materiálovém inženýrství pomocí matic (přesněji pomocí tenzorů) umíme popsat materiály, mající v různých směrech různé vlastnosti. V takových materiálech je různý směr vnějšího podnětu a odezvy na vnější podnět a bez matic jenom s použitím skalárních veličin není možné se závislostmi takového typu pracovat. Pokud chceme zobrazení, které mění směr vektorů (a má některé další rozumné vlastnosti), používáme matice. Přesněji, používáme tenzory, které mají v souřadnicích podobu matic.

Kapitola 8

Lineární algebra (inverzní matice a determinanty)

Motivace.

- Chování libovolného systému nezávisí na souřadné soustavě, ve které tento systém popisujeme. Opravdu, dřevo neví, jak jsme si zvolili osy soustavy souřadnic. Ani, zda používáme pravoúhlo soustavu či jinou. Už vůbec dřevo nepozná, zda úlohu řešíme v pravotočivé či levotočivé soustavě souřadnic. Vhodná volba souřadné soustavy přirozeně neovlivní chování systému. Může ale značně usnadnit výpočty. Proto například při studiu obdélníkového objektu volíme osy ve směru hran. Proto například při studiu dřeva volíme souřadné osy v anatomických směrech dřeva. Tyto dva požadavky jsou částečně proti sobě v případě, že studujeme obdélníkový materiál s hranami jdoucími jiným směrem, než jsou anatomické směry dřeva. Naučíme se s tímto problémem vypořádat. Naučíme se používat matice k přechodu mezi souřadnými soustavami. Naučíme se transformovat fyzikální vlastnosti popsané maticemi z jedné soustavy do druhé.
- Ukázali jsme si, že soustavu lineárních rovnic je možné zapsat pomocí maticového násobení ve tvaru $AX = B$. Pokud by veličiny v této rovnici byla reálná čísla, řešitelnost je značně ovlivněna nulovostí či nenulovostí veličiny A . Ukážeme si zobecnění této vlastnosti i pro matice a soustavy rovnic. K tomu si představíme nový pojem - determinant matice.

Inverzní matice

<https://youtu.be/udDtFU4pxkY>

U reálných čísel máme doplňkové operace ke sčítání a násobení. Jsou to odečítání a dělení. Odečítání matic můžeme implementovat jako sčítání matice s maticí vynásobenou minus jedničkou: $A - B = A + (-B)$. Oproti tomu operace dělení matic vůbec není implementována. U reálných čísel lze

dělení nahradit násobením převrácenou hodnotou: $\frac{a}{b} = ab^{-1}$. Tuto proceduru částečně rozšíříme pro matice. Připomeňme ještě, že roli neutrálního prvku při násobení matic hraje jednotková matice. Například pro matice 3×3 je jednotková matice

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definice (inverzní matice). Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ čtvercová matice řádu n . Jestliže existuje čtvercová matice A^{-1} řádu n , splňující vztahy

$$A^{-1}A = I = AA^{-1},$$

nazýváme matici A^{-1} *inverzní maticí k matici A* .

Poznámka. Předchozí definice nezaručuje existenci inverzní matice. K některým čtvercovým maticím inverzní matice existuje, k některým ne. Později uvidíme, že existuje jednoduchá charakterizace matic, ke kterým inverzní matice existuje, pomocí determinantu matice.

Věta (inverze maticového součinu). *Inverzní matice k součinu dvou matic je součinem jednotlivých inverzních matic, ale v opačném pořadí, tj.*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Inverzní matice k matici popisující rotaci v rovině

Pro matici rotace

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

z minulé přednášky platí

$$\begin{aligned}(R_\theta)^{-1} &= R_{-\theta} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

což je přirozené pokud si uvědomíme, že inverzní operaci k pootočení roviny o úhel θ je pootočení roviny o úhel opačný.

Odsud mimo jiné vidíme, že platí

$$\begin{aligned}(R_\theta)^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^T \\ &= (R_\theta)^T,\end{aligned}$$

tj. že inverzní a transponovaná matice jsou v případě matice rotace stejné. To je velká náhoda, ale přesto matice s touto vlastností hrají tak důležitou roli, že si vysloužily vlastní název představený v následujícím odstavci.

Ortogonální matice

Definice (ortogonální matice). *Ortogonální matice* je matice, jejíž transponovaná matice je současně maticí inverzní.

Řádky ortogonální matice jsou tvořeny navzájem kolmými vektory jednotkové délky. Má-li například symetrická čtvercová matice A řádu n celkem n lineárně nezávislých jednotkových vlastních vektorů, potom matice vytvořená tak, že sloupce nebo řádky matice jsou tyto vektory, je ortogonální.

Matice přechodu

<https://youtu.be/uOmV6DGMPbw>

Ukážeme si, že pomocí matic je možné přepočítávat souřadnice mezi jednotlivými souřadnými soustavami. Praktické využití je studium ortotropních materiálů v situace, kdy pro matematický popis jsou výhodné směry os, ale roviny symetrie neodpovídají souřadným rovinám. Například dřevěný kvádr je vhodné studovat tak, že hrany kvádrů jsou

rovnoběžné se souřadnými osami. Materiálové vlastnosti jsou známy v anatomických směrech dřeva. Pokud tyto směry nejsou rovnoběžné s osami (kvádr je nařezaný našikmo), je potřeba mezi souřadnými soustavami přecházet. To se dá elegantně udělat pomocí maticového násobení a inverzní matice.

Předpokládejme, že v rovině jsou dány dvě kartézské soustavy souřadnic \mathcal{B} a \mathcal{B}' , které jsou vzájemně pootočené o úhel θ . V těchto soustavách budou souřadnice $(x, y)^T$ a $(x', y')^T$. Je-li soustava \mathcal{B}' otočená oproti soustavě \mathcal{B} o úhel θ proti směru hodinových ručiček, má (viz obrázek) jednotkový vektor ve směru osy x' v bázi \mathcal{B} souřadnice $(\cos(\theta), \sin(\theta))^T$ a jednotkový vektor ve směru osy y' má v bázi \mathcal{B} souřadnice $(-\sin(\theta), \cos(\theta))^T$. Proto je vztah mezi souřadnicemi dán maticovým součinem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Matice

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

je matice, kterou jsme poznali jako matici rotace. Je to matice, která svým působením pootočí vektor který ji násobí zprava o úhel θ proti směru hodinových ručiček. Ve výše uvedeném kontextu se tato matice nazývá maticí přechodu mezi oběma uvažovanými souřadnými systémy. Matice přechodu umožňuje najít souřadnice vektoru v jedné souřadné soustavě pomocí souřadnic vektoru v souřadné soustavě vzniklé pootočením díky vztahu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Tato matice má inverzní matici a proto evidentně můžeme mezi souřadnicemi přecházet i v opačném směru vztahem

$$R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

V inženýrských problémech je častou aplikací lineární algebry transformace úlohy do vhodných souřadnic, ve kterých je popis jednodušší. Zpravidla se jedná o prosté otočení. Toto se používá při studiu dřeva, které má anatomicky význačné směry, při studiu vrstvených materiálů, při studiu chování vodorovně uložených geologických vrstev. Nemusí však vždy jít jenom o materiál s charakteristickými směry. Transformace mezi souřadnicemi se používá například v letectví, kdy je jedna souřadná soustava spojena s trupem a další dvě jsou pootočené ve směru křídel šípovitě připojených k trupu.

Matici transformace popisující otočení souřadnic budeme zkráceně označovat R , pokud budeme potřebovat zdůraznit velikost úhlu, použijeme $R(\theta)$ a pokud budeme potřebovat

matici rozepsat ve složkách, budeme zkracovat výrazy $\cos \theta$ a $\sin \theta$ na C a S a psát

$$R = \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix}.$$

Potom například platí

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix}.$$

Zobrazení v různých soustavách souřadnic

Ukážeme si důležité využití matice přechodu. Předpokládejme, že máme zobrazení $f: X \rightarrow Y$, které je možno charakterizovat maticemi. Na vstupu i výstupu je tedy vektor. Může se jednat třeba o zobrazení, které působícím silám přiřadí deformaci tělesa, což uvidíme v Hookově zákoně později. Může se jednat také o zobrazení, které vektoru charakterizujícímu změnu tlaku v podzemní vodě nebo změnu koncentrace vody ve dřevě přiřadí směr proudění. (Směr podnětu a výsledného proudění si nemusí odpovídat, protože voda je poháněna rozdílem tlaků ve směru největšího poklesu tlaku nebo rozdílem koncentrací ve směru největšího poklesu koncentrace, ale současně si v anizotropním prostředí hledá cestu nejmenšího odporu).

Nechť je naše zobrazení vyjádřeno v nějaké souřadné soustavě \mathcal{B} maticí A , tj.

$$Y = AX,$$

kde X a Y jsou souřadnice vzoru a obrazu v souřadné soustavě \mathcal{B} . Budeme chtít toto zobrazení vyjádřit v jiné soustavě. Například v soustavě \mathcal{B}' takové, že platí $X = PX'$ a $Y = PY'$, kde čárkovaná písmena jsou souřadnice v čárkované souřadné soustavě \mathcal{B}' . Dosazením získáme

$$PY' = APX'$$

a po vynásobení inverzní maticí

$$P^{-1}(PY') = P^{-1}(APX'),$$

tj

$$Y' = (P^{-1}AP)X'.$$

V pootočených souřadnicích \mathcal{B}' je tedy zobrazení charakterizováno maticí $P^{-1}AP$. Pro vhodně zvolenou matici P může být matice v nové bázi podstatně jednodušší než matice v bázi původní.

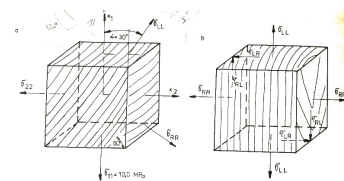
Častým úkolem je zapsat vztahy mezi veličinami tak, aby byly co nejjednodušší a proto jeden z častých úkolů v lineární algebře bývá takovou šikmovou bází nalézt. Nastíníme neoptimističtější variantu postupu, případné detaily a řešení

zádrhelů je možné najít v odborné literatuře. Zpravidla vyjadřujeme zobrazení v bázi tvořené ortonormálními vlastními vektory matice A . Sloupce matice P jsou vlastní vektory matice A . Pokud je matice A symetrická, je matice P navíc ortogonální, její inverze je tedy matice transponovaná. Tomuto procesu se říká diagonalizace matice, protože $P^{-1}AP$ vychází diagonální a v diagonále vychází právě vlastní čísla matice.

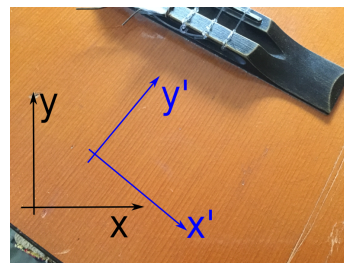
Stejným způsobem se transformují i fyzikální veličiny veličiny popisované maticemi, nazývané tenzory.

Praktická aplikace: transformace tenzoru

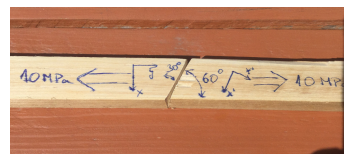
<https://youtu.be/7Oi3ruVNUzI>



Obrázek 8.1: Úloha na transformaci tenzoru napětí do anatomických směrů dřeva. Znárodněná krychlička je jenom reprezentující element většího tělesa. Zdroj: A. Požgaj a kol., *Struktúra a vlastnosti dřev*.



Obrázek 8.2: Stejná úloha jako výše (leta ve dřevě jdou pod úhlem 30 stupňů a transformujeme do tohoto směru) méně inženýrským přístupem.



Obrázek 8.3: U šikmého lepeného spoje se používá transformace do roviny spoje k posouzení únosnosti tohoto spoje. Lepidlo má definovanou pevnost spoje při normálovém a smykovém namáhání a transformace nám prozradí, jak se předpokládané namáhání projeví v těchto směrech a zda lepidlo spoj udrží.

V knize A. Požgaj a kol., *Struktúra a vlastnosti dřev*, je následující úloha (str. 322, vydání 1997, ISBN 80-07-00960-4). Dřevo v konfiguraci podle obrázku je namáháno

pouze tahovou silou svíse, tedy tenzor napětí má jenom jednu nenulovou složku. Naším cílem je pootočit souřadnou soustavu tak, aby byl tenzor napětí vyjádřen v anatomických směrech dřeva. Úloha je v knize vyřešena pomocí směrových kosinů. Ukážeme si alternativní způsob, který je výhodný v tom, že využívá pouze základní aparát lineární algebry. Původní souřadnice (x_1, x_2) označíme (x, y) , osa x směřuje vodorovně vpravo (v obrázku x_2) a osa y nahoru (v obrázku x_1). Tenzor napětí je $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ (tah pouze ve směru osy y). Souřadnice je nutno pootočit o 30 stupňů po směru hodinových ručiček, tj. v záporném směru. Nový tenzor napětí (viz Sage nebo Python) je

$$R(30^\circ)AR(-30^\circ) = \begin{pmatrix} 2.5 & -4.3 \\ -4.3 & 7.5 \end{pmatrix}.$$

V nových souřadnicích je směr y' podélný a proto $\sigma_{RR} = 2.5$ a $\sigma_{LL} = 7.5$. Mimodiagonální složka udává komponentu $\sigma_{RL} = -4.3$, smykové napětí. Tento výsledek je stejný, jako výsledek získaný jiným postupem v knize, pomocí směrových kosinů. Použili jsme však jenom základní nástroje lineární algebry.

Výše uvedený výpočet se používá, když chceme najít deformaci vyvolanou působícím napětím. Protože konstanty udávající materiálovou odezvu máme změřeny v anatomických směrech dřeva, je nutno nejprve zjistit, jaké namáhání je v těchto směrech, pomocí materiálových konstant zjistíme, jaká je deformace v těchto směrech a poté zpětnou transformací přepočítáme tuto deformaci do původních souřadnic.

Stejný výpočet používáme, pokud se snažíme transformovat působící napětí při posouzení, jaké smykové a jaké normálové napětí působí na šikmý lepený spoj. Pokud je spoj pod úhlem 30 stupňů a v ose y působí tahové napětí 10 MPa, potom normálové napětí namáhající tento spoj je 7.5 MPa a smykové napětí 4.3 MPa.

Obecné vzorce pro transformaci tenzoru

Úloha na transformaci tenzoru, kterou jsme řešili v minulém odstavci je v aplikacích velmi důležitá. Proto existuje řada grafických nebo inženýrských metod na řešení tohoto úkolu. Tyto metody jsou důvtipné a názorné, například metoda Mohrovy kružnice, oproti lineární algebře však mají zásadní nevýhodu: uživatel se musí stále učit něco nového a dostává návod “jak”, nikoliv “proč”. Použitím aparátu lineární algebry, stejně jako dokážeme v pootočených souřadnicích vyjádřit libovolné zobrazení, dokážeme vyjádřit v pootočených souřadnicích i libovolný tenzor. Vzorce jsou stejné a

navíc při otočení v rovině je matice rotace ortogonální, tj. inverzní matice je maticí transponovanou. Pro symetrický tenzor $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ dostáváme v souřadnicích otočených o úhel θ proti směru hodinových ručiček

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix},$$

kde **po výpočtu**

$$\begin{aligned} a'_{11} &= C^2 a_{11} + S^2 a_{22} + 2CS a_{12}, \\ a'_{22} &= S^2 a_{11} + C^2 a_{22} - 2CS a_{12}, \\ a'_{12} &= -CS a_{11} + CS a_{22} + (C^2 - S^2) a_{12}. \end{aligned} \quad (*)$$

Tento vztah je lineární vzhledem ke všem komponentám a je možné jej zapsat pomocí maticového násobení

$$\begin{pmatrix} a'_{11} \\ a'_{22} \\ a'_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & S^2 & 2CS \\ S^2 & C^2 & -2CS \\ -CS & CS & C^2 - S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{12} \end{pmatrix}.$$

Tento vztah je uveden i v literatuře A. Požgaj a kol., Štruktúra a vlastnosti dřeva, a v e-opeře **Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva**. Zde je také uvedena jedna z aplikací, transformace tenzoru deformací naměřených při bobtnání dřeva. V této úloze je nutno tenzor deformací transformovat do anatomických směrů dřeva. To je možné udělat po změření sklonu vláken a pootočení tenzoru o příslušný úhel.

Inverzní operací je pootočení o úhel $-\theta$ a proto je snadné najít inverzní transformaci: vzhledem k sudosti funkce \cos a lichosti funkce \sin stačí změnit znaménko u členů S , tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & S^2 & -2CS \\ S^2 & C^2 & 2CS \\ CS & -CS & C^2 - S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} \\ a'_{22} \\ a'_{12} \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Pokud vypočteme derivaci členů a'_{11} a a'_{22} podle θ , dostaneme použitím

$$\frac{d}{d\theta} C^2 = \frac{d}{d\theta} \cos^2 \theta = 2 \cos \theta (-\sin \theta) = -2CS,$$

a analogicky $\frac{d}{d\theta} S^2 = 2SC$, $\frac{d}{d\theta} CS = -S^2 + C^2$ derivace

$$\begin{aligned} \frac{da'_{11}}{d\theta} &= -2CS a_{11} + 2SC a_{22} + 2(C^2 - S^2) a_{12} = 2a'_{12}, \\ \frac{da'_{22}}{d\theta} &= 2SC a_{11} - 2CS a_{22} + 2(S^2 - C^2) a_{12} = -2a'_{12}. \end{aligned}$$

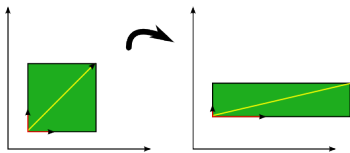
To znamená, že lokální extrémů diagonálních prvků nastávají v okamžiku, kdy jsou prvky mimo diagonálu nulové. Toto pozorování perfektně ladí s výsledky, které známe v lineární algebře i bez hledání lokálních extrémů a bez derivací.

Náznak tohoto konceptu si představíme na dalších stránkách. Budeme potřebovat vlastní vektory matice.

Pozor. V případě tenzoru deformace se někdy se namísto mimodiagonální komponenty bere její dvojnásobek, protože ten má názorný význam jako úhel smyku. Proto se někdy v literatuře uvádí transformační vzorec pro deformace v upraveném tvaru, kdy u složek se součinem CS ve třetím sloupci není koeficient 2 a u odpovídajících složek ve třetím řádku tento koeficient naopak figuruje. Je proto potřeba dávat pozor na to, s jakými komponentami je tenzor malých deformací uvažován.

Role vlastních vektorů při transformaci matic

<https://youtu.be/yqjaeqQu0bE>



Obrázek 8.4: *Eigenvectors (red) do not change direction when a linear transformation (e.g. scaling) is applied to them. Other vectors (yellow) do. Zdroj: <http://www.visiondummy.com>.*

Budeme zkoumat, kdy platí

$$P^{-1}AP = D$$

pro čtvercové matice P , A a diagonální čtvercovou matici D . Vynásobením maticí P zleva dostaneme

$$AP = PD.$$

Ve cvičení jsme násobili čtvercovou matici s maticí diagonální a není těžké vidět obecný princip, že matice PD má za sloupce násobky sloupců matice P s odpovídajícím číslem z hlavní diagonály matice D . Například pro první sloupec matice P a první číslo v hlavní diagonále matice D , které označíme \vec{p}_1 a λ_1 , dostáváme

$$A\vec{p}_1 = \lambda_1\vec{p}_1,$$

tj. (viz předchozí přednášky) p_1 je vlastní vektor matice A příslušný vlastní hodnotě λ_1 . Podobný princip platí pro všechny sloupce. Je otázkou, jestli vlastních hodnot a vlastních vektorů je tolik, kolik pro diagonalizaci “potřebujeme”. Částečně pozitivní odpověď na tuto otázku udávají věty na následujícím slidu.

Transformace symetrické matice na diagonální tvar

Věta (vlastní čísla symetrické matice). *Symetrická čtvercová matice A řádu n má n reálných vlastních čísel (počítáno i s případnou násobností).*

Věta (diagonalizace symetrické matice). *Nechť má symetrická čtvercová matice A řádu n celkem n reálných různých vlastních čísel λ_i . Označme odpovídající vlastní vektory jednotkové délky \vec{v}_i .*

- Matice P sestavená tak, že sloupce této matice jsou tvořeny vektory \vec{v}_i je ortogonální.
- Matice D definovaná vztahem

$$D = P^T AP$$

je diagonální.

- *Diagonální prvky matice D jsou právě vlastní čísla λ_i a jsou ve stejném pořadí jako odpovídající vlastní vektory v matici P .*

Poznámka (diagonální tvar materiálových vlastností dřeva). Typickým ortotropním materiálem je dřevo. Pokud transformujeme tenzor difuzní matice pro dřevo na diagonální tvar, jsou diagonální prvky v poměru přibližně $D_L : D_R : D_T = 35 : 3 : 2$ (P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva, 2008, str. 65). Ortotropní charakter má však nejenom transport tekutin, ale i sesychání a bobtnání. V tomto případě však naopak v podélném směru dřevo bobtná nejméně a tenzor popisující bobtnání má po transformaci na diagonální tvar v diagonále prvky v poměru přibližně $\alpha_T : \alpha_R : \alpha_L = 20 : 10 : 1$ (P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva, 2008, str. 38).

Matice transformace P z předchozí věty je ortogonální (její transponovaná matice je současně její inverzní matice) a její determinant (veličina, se kterou se seznámíme vzápětí) je roven 1 nebo -1 . Pokud je determinant kladný, reprezentuje matice pootočení soustavy souřadnic. Pokud je determinant záporný, jedná se o pootočení spojené se zrcadlením jedné osy. Protože tento případ většinou z fyzikálních důvodů nepreferujeme, sestavujeme matici transformace tak, aby měla determinant kladný. V případě záporného determinantu stačí prohodit dva vektory (sloupce matice transformace) mezi sebou, nebo jeden vynásobit faktorem -1 .

Pro kontrolu je zajímavé vědět, že determinant matice se pootočením nemění a je tedy stejný pro původní i transformovanou matici. Totéž platí pro součet prvků v hlavní

diagonále (v lineární algebře se nazývá stopa matice), pro charakteristický polynom a pro vlastní hodnoty. Tenzor, jak jej uvažujeme v tomto textu, je matice, která má navíc fyzikální význam a vzhledem ke své povaze pro ni platí speciální transformační pravidla. Nicméně je to mimo jiné i matice a proto vše výše uvedené platí i pro tenzory.

Transformace tenzorů je užitečná a důležitá činnost. Bohužel však vzorce s touto transformací spojené nejsou natolik zapamatovatelné, aby bylo obvyklé s nimi pracovat. Možnosti jsou v zásadě tři.

- Mít vzorce v psané podobě po ruce a pouze do nich dosazovat.
- Mít k dispozici jednoduše zapamatovatelný postup, jak s transformacemi pracovat. Takový postup existuje, nazývá se **Mohrova kružnice** a po zapracování se jedná o efektivní grafickou metodu pro transformaci tenzorů. Zpravidla je v literatuře popsána pro tenzor napětí, funguje však obecně.
- Pracovat pouze s elementárními prostředky lineární algebry. Narozdíl od předchozích bodů máme přehled o tom, co a proč děláme (oproti vzorcům) a nemusíme se učit další metodu (oproti Mohrově kružnici).

Determinant matice

<https://youtu.be/XMyzmN3cq-Q>

Definice (determinant). Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ čtvercová matice řádu n . *Determinant matice* A je reálné číslo $\det A$ přiřazené matici A následujícím způsobem:

- Je-li A matice řádu 1, tj. $A = (a_{11})$, je $\det A = a_{11}$.
- Máme-li definován determinant z matice řádu $(n-1)$ označme symbolem M_{ij} determinant matice řádu $(n-1)$, která vznikne z matice A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce. Definujme *algebraický doplněk* A_{ij} prvku a_{ij} jako součin $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
- Konečně, definujme determinant řádu n následovně: zvolíme libovolný index $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a definujeme

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Uff. Zacházejme vyjíměčně s touto definicí stejně jako s definicí limity: vezmeme na vědomí, že nějaká korektní definice existuje, ale učit se ji nebudeme. Není to totiž tak úplně potřeba. bude nám stačit naučit se několik málo speciálních případů.

Determinant matice A označujeme též $|A|$. Je-li $A = (a_{ij})$ píšeme zkráceně $|a_{ij}|$ místo $|(a_{ij})|$. K záměně s absolutní hodnotou může dojít jedině v případě, že matice A je řádu

jedna. V praxi se však obvykle s maticemi řádu jedna nepracuje.

Definice (regulární a singulární matice). Buď A čtvercová matice. Je-li $\det A = 0$, říkáme, že matice A je *singulární*, v opačném případě říkáme, že je *regulární*.

Determinant matice 2×2 (křížové pravidlo)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Tento determinant je roven nule právě tehdy, když je jeden řádek matice násobkem druhého a to bude právě tehdy když je jeden sloupec matice násobkem druhého.

Determinant matice 3×3 (Sarusovo pravidlo)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ x & y & z \end{vmatrix} = ajz + bky + cix - (cix + biz + akj)$$

Mnemotechnická pomůcka: opsat první dva řádky pod determinant, vynásobit hlavní diagonálu a dvě diagonály pod tím, potom vynásobit vedlejší diagonálu a dvě diagonály pod tím. Příspěvky od hlavní diagonály a dvou šikmých řad pod ní se sčítají, příspěvky od vedlejší diagonály a dvou šikmých řad pod ní se odečítají.

Determinant matice ve schodovitém tvaru

Definice (schodovitý tvar). Řekneme, že matice A je ve *schodovitém tvaru*, jestliže případné nulové řádky jsou uspořádány na konci matice a nenulové jsou uspořádány tak, že každý následující řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí.

Příklad. Matice

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

je ve schodovitém tvaru.

Věta (determinant matice ve schodovitém tvaru).

Determinant matice, která je ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků v hlavní diagonále.

Totéž platí zejména pro matice diagonální, které mají nenulové prvky jenom v hlavní diagonále a tedy jsou ve schodovitém tvaru.

Příklad. Platí

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) \cdot 5 = -40.$$

Souvislost některých pojmů

Pojmy lineární algebry spolu krásně souvisí.

Věta. Buď A čtvercová matice řádu n . Následující výroky jsou ekvivalentní:

1. K matici A existuje matice inverzní A^{-1} .
2. Matice A je regulární, tj. $\det A \neq 0$.
3. Soustava lineárních rovnic

$$AX = B$$

má pro libovolnou pravou stranu B jediné řešení.

4. Homogenní soustava lineárních rovnic

$$AX = 0$$

má pouze nulové řešení.

5. Každý vektor z \mathbb{R}^n lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (sloupci) matice A , a to jednoznačně, až na pořadí.

Například je-li \vec{q} vlastním vektorem matice A příslušným vlastní hodnotě λ , platí

$$A\vec{q} = \lambda\vec{q}.$$

Odsud

$$A\vec{q} - \lambda\vec{q} = 0$$

$$A\vec{q} - (\lambda I)\vec{q} = 0.$$

$$(A - \lambda I)\vec{q} = 0$$

Pokud chápeme poslední rovnost jako soustavu rovnic s koeficienty $(A - \lambda I)$, nulovou pravou stranou a nenulovým řešením \vec{q} (tj. bod 4 předchozí věty neplatí), musí být determinant matice $A - \lambda I$ nulový (tj. bod 2 předchozí věty neplatí). Tím je motivována následující definice a dokázána následující věta.

Definice (charakteristická rovnice, charakteristický polynom). Rovnice

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

s neznámou λ se nazývá *charakteristická rovnice* matice A . Výraz na levé straně této rovnice je polynom proměnné λ a nazývá se *charakteristický polynom* matice A .

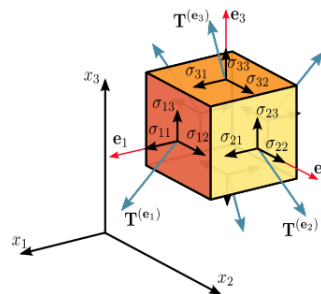
Důsledek (vlastní čísla). Vlastní čísla matice A jsou právě řešení charakteristické rovnice. Vlastní vektor \vec{u} příslušný vlastnímu číslu λ je nenulové řešení homogenní soustavy rovnic

$$(A - \lambda I)\vec{u} = 0.$$

Hookův zákon, matice tuhosti a poddajnosti

V minulé přednášce jsme odvodili tvar tenzoru malých deformací pro popis deformace tělesa ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$



Obrázek 8.5: Složky tenzoru napětí charakterizují sílu způsobující deformaci. Zdroj: Wikipedie.

Toto můžeme zapsat symbolicky

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (*)$$

Pro deformaci v prostoru máme nikoliv dvě, ale tři souřadnice a tenzor deformací je tedy 3×3 symetrická matice, tj. matice, která má šest nezávislých komponent. (Zbylé tři komponenty dostaneme ze symetrie.) Tyto komponenty dostaneme postupnou volbou indexů ve vzorci (*) a můžeme je sestavit do sloupcového vektoru

$$(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12})^T$$

Podobně, působící sílu můžeme rozdělit podle působení v jednotlivých směrech a tím dostaneme tenzor napětí, šest veličin charakterizujících napětí. (Zbýlé tři jsou dány podmínkou, že se deformované těleso nepohybuje.) Pro další úvahy složky tenzoru napětí uspořádáme do sloupcového vektoru

$$(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T.$$

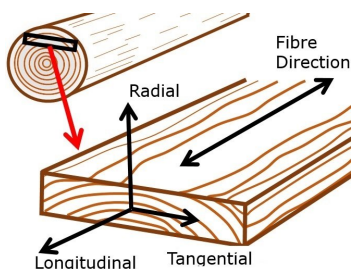
Následující poučka je fyzikálně ověřený fakt, že vztah mezi složkami tenzoru napětí a tenzoru deformace je lineární. To nás nepřekvapí, protože z přednášek o derivacích na začátku semestru víme, že **jakákoliv** funkční závislost se dá linearizovat. Podstatné zde však je, že interval, na kterém má linearizace smysl, není příliš malý, tj. že tato linearizace platí pro prakticky významné případy.

Hookův zákon deformace (volná slovní formulace). Do určité hranice zatížení je libovolná složka tenzoru deformace úměrná libovolné složce tenzoru napětí.

K tomu si přidejme, že příspěvky k deformaci, způsobené různými složkami tenzoru napětí, se přirozeně sčítají. Matematicky vyjádřeno proto platí

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix},$$

kde S je čtvercová 6×6 matice.



Obrázek 8.6: Ortotropie dřeva. Zdroj: researchgate.net, Mathew Legg.

Fyzikální úvahy ukazují, že matice S je určitě symetrická a obsahuje celkem ne 36, ale jenom 21 nezávislých veličin. Nazývá se *matice poddajnosti*. V obecném případě tedy musíme pro popis deformace mít celkem 21 materiálových konstant. Tento počet se však výrazně redukuje, pokud je materiál například izotropní nebo ortotropní. Například ortotropní materiál jakým je dřevo, můžeme umístit do soustavy souřadnic tak, aby byl invariantní vůči symetrii podle jednotlivých průmětů. Poté je **možné odvodit**, že

nejobecnější možný tvar matice S je

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix},$$

tj. tvar, obsahující jenom devět materiálových konstant. Odsud vidíme, že v takovém materiálu se smykové napětí projeví jenom na jedné komponentě tenzoru deformace, protože poslední tři sloupce, které udávají složky jednotlivých deformací způsobených napětími σ_{23} , σ_{13} a σ_{12} mají jenom jednu nenulovou složku.

Pokud bychom použili k popisu obecnou soustavu souřadnic, nebylo by možné se na symetrii odvolávat. Matice S by obsahovala všechny prvky a bylo by nutné hledat bázi, v níž je její vyjádření nejjednodušší. U dřeva je však snadné rozpoznat význačné směry. Když soustavu souřadnic zvolíme tak, aby byla v souladu s těmito význačnými směry, docílíme toho, že obdržíme matici S již přímo ve tvaru s co nejvíce nulami.

Někdy je vhodné umět určit napětí pomocí deformací. K tomu stačí Hookův zákon vynásobit maticí S^{-1} a obdržíme

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}.$$

Matice S^{-1} se nazývá *matice tuhosti* a označuje C .

Souvislostí vlastních vektorů matice tuhosti a matice poddajnosti (nebo obecněji souvislostí vlastních vektorů matice a matice inverzní) se budeme zabývat na následujícím slidu.

Vlastní vektory matice a matice inverzní

Fyzikální úvaha snadno vede k závěru, že matice a matice inverzní mají stejné vlastní vektory. To proto, že pokud v některém směru je materiálová odezva násobkem podnětu, je i opačně podnět násobkem materiálové odezvy. To, že matice A a A^{-1} mají stejné vlastní vektory plyne i z toho, že pokud definiční vztah pro vlastní vektor matice A , tj. vztah

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u},$$

vynásobíme zleva maticí $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$, dostaneme vzhledem k identitě $\frac{1}{\lambda}A^{-1}A\vec{u} = \frac{1}{\lambda}I\vec{u} = \frac{1}{\lambda}\vec{u}$ rovnici

$$\frac{1}{\lambda}\vec{u} = A^{-1}\vec{u},$$

která vyjadřuje, že \vec{u} je vlastním vektorem matice A^{-1} s vlastním číslem $\frac{1}{\lambda}$.

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Přestože maticový součin nemá všechny vlastnosti na které jsme zvyklí u součinu čísel, jedna vlastnost zůstává: existence “převrácené hodnoty”. V případě matic je zobecnění převrácené hodnoty reprezentováno inverzní maticí.
- Pomocí matic je možné transformovat souřadnice bodů, vektorů a tenzorů z jedné soustavy souřadnic do jiné. Inverzní matice poté představuje zpětnou transformaci.
- Při transformaci tenzorů se snažíme o to, aby po transformaci byl tenzor co nejjednodušší. Pokud použijeme souřadnou soustavu s osami ve vlastních směrech (jsou kolmé a tedy je tato volba smysluplná), je tento tenzor je diagonální s vlastními čísly v diagonále.
- Pro identifikaci vlastních vektorů matice A je nutné řešit soustavu rovnic

$$(A - \lambda I)v = 0,$$

ve které figuruje jistým i vlastní číslo λ . Toto umožňuje definovat podmínku na vlastní čísla: uvažovaná soustava musí mít nenulové řešení.

- Existence nenulového řešení rovnice z předchozího bodu úzce souvisí s pojmem determinantu matice. Přesněji, aby soustava z předchozího bodu měla nenulové řešení, musí mít matice $A - \lambda I$ nulový determinant.

Kapitola 9

Lineární algebra (soustavy lineárních rovnic, transformace tenzorů)

Motivace.

- Pro popis přírodních dějů je ideální jazyk derivací, protože umožňuje pracovat s okamžitými rychlostmi změn fyzikálních veličin. Pokud mechanismus děje známe, je snadné naformulovat pomocí derivací příslušný matematický model, poté ovšem přijde fáze řešení. Tady málokdy vystačíme s analytickými metodami, které jsme si ukázali v přednášce věnované diferenciálním rovnicím. Často se uchylujeme k numerickému řešení. V naprosté většině případů se toto řešení redukuje na řešení soustav lineárních rovnic. Tyto soustavy ovšem bývají obrovské, řádově obsahující tisíce rovnic a neznámých a proto středoškolské metody nejsou použitelné (například nejsou dostatečně rychlé, nebo mohou být numericky nestabilní). Z tohoto důvodu je nutné se problematice soustav rovnic věnovat podrobněji.
- Nalezení vlastních směrů matice je zásadní pro zjednodušení popisu anizotropního materiálu, protože díky tomu, že matice má v soustavě respektující vlastní směry diagonální tvar, se redukuje počet materiálových konstant. Hledání těchto směrů je vlastně řešení soustavy lineárních rovnic. Situace je relativně jednoduchá, protože soustava má dimenzi dva nebo tři a k tomu nekonečně mnoho řešení, což výpočty urychluje. (Například ve dvourozměrném případě to znamená, že jedna rovnice je násobkem druhé a nemusíme ji uvažovat.)
- Podrobněji viz [zde](#). Numerický výpočet vlastních čísel [zde](#)

Uvažujme následující tři problémy:

1. Najděte všechna reálná čísla x_1, x_2 , splňující dvojici rovnic

$$\begin{aligned}4x_1 + 5x_2 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 &= 4\end{aligned}$$

2. Najděte všechna reálná čísla x_1, x_2 , splňující vektorovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. Najděte všechna reálná čísla x_1, x_2 , splňující maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Všechny problémy jsou ekvivalentní a jedná se o jiný zápis téhož. Jednou však používáme soustavu rovnic, vektory a jejich lineární kombinaci a jednou matice a maticový součin!

<https://youtu.be/yAozKR9QBls>

Variety zápisu soustavy lineárních rovnic

https://youtu.be/E1Ey_xz6_ig

Soustava lineárních rovnic

Definice (soustava lineárních rovnic). *Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých nazýváme soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

Proměnné x_1, x_2, \dots, x_n nazýváme *neznámé*. Reálná čísla a_{ij} nazýváme *koefficienty levých stran*, reálná čísla b_j *koefficienty pravých stran* soustavy rovnic. Řešením soustavy rovnic rozumíme uspořádanou n -tici reálných čísel $[t_1, t_2, \dots, t_n]$ po jejichž dosazení za neznámé (v tomto pořadí) do soustavy dostaneme ve všech rovnicích identity.

Definice (matice soustavy). Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme *maticí soustavy* (1). Matici

$$A_r = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

nazýváme *rozšířenou maticí soustavy* (1).

Vektorový zápis soustavy lineárních rovnic

Soustavu (1) lze ekvivalentně přepsat do vektorového tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} x_3 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Vidíme tedy, že se vlastně jedná o problém, vyjádřit vektor složený z čísel na pravé straně soustavy rovnic jako lineární kombinaci vektorů, které tvoří sloupce matice soustavy.

Maticový zápis soustavy lineárních rovnic

Soustavu (1) lze ekvivalentně přepsat do maticového tvaru pomocí maticového součinu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Tento tvar se používá často v inženýrských výpočtech pro úspornost. Symbolicky zpravidla píšeme soustavu lineárních rovnic ve tvaru

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

nebo

$$AX = B$$

kde A je matice soustavy a \vec{b} resp. B je vektor pravých stran.

Využití inverzní matice pro řešení soustavy lineárních rovnic

https://youtu.be/YpbOWJ_6ZS4

Z úvodní přednášky o lineární algebře víme, že pomocí maticového násobení je možné soustavu lineárních rovnic zapsat ve tvaru

$$AX = B,$$

kde A je matice soustavy, X je sloupcový vektor neznámých a B je vektor pravých stran. Pokud má matice A inverzní matici, můžeme pomocí této matice soustavu vyřešit. Po vynásobení rovnice inverzní maticí zleva dostáváme

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

a po uplatnění asociativního zákona

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B.$$

Protože výraz v závorce je součinem matice s maticí inverzní, je tento součin roven jednotkové matici, která je neutrálním prvkem při násobení a proto okamžitě dostáváme řešení soustavy ve tvaru

$$X = A^{-1}B.$$

Jako přirozený důsledek vidíme, že řešení je určeno jednoznačně. Známe-li inverzní matici, můžeme řešení dokonce vypočítat pro libovolnou pravou stranu velmi pohodlně a rychle pomocí maticového násobení. Bohužel, výpočet inverzní matice je zpravidla velmi drahý (vyžaduje velké množství operací) a numericky málo stabilní. Proto je tento postup užitečným teoretickým nástrojem, ale v praxi postupujeme poněkud odlišně.

Inverzní matice k diagonální matici

Diagonální matice (tj. matice, které mají nenulové prvky jenom na hlavní diagonále) se vzhledem k násobení chovají velice hezky: součinem je taková matice, která je diagonální a na hlavní diagonále má prvky vytvořené jako součin odpovídajících prvků násobených matic.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Proto je snadné zařídit, aby v hlavní diagonále vyšly jedničky. Stačí uvažovat podobně jako v následujícím příkladě.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Iterační metoda řešení soustav lineárních rovnic

Na předchozím slidu jsme viděli, že je jednoduché najít inverzní matici k matici diagonální. Toho využijeme pro řešení soustavy lineárních rovnic iterační metodou. Představíme si nejjednodušší, přesto však velmi mocnou metodu, **Jacobiho metodu**.

V úvodní přednášce z lineární algebry jsme modelovali rozložení teploty ve dvourozměrné desce pomocí soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 70 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Pro

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 70 \\ 40 \end{pmatrix}$$

tedy

$$AX = B. \quad (1)$$

Rozdělíme matici A na součet diagonální matice a matice s nulami v hlavní diagonále, tj. na součet matic

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Potom můžeme psát rovnici ve tvaru

$$(D + T)X = B$$

a odsud

$$\begin{aligned} DX + TX &= B \\ DX &= B - TX \end{aligned}$$

a využitím inverzní matice

$$X = D^{-1}(B - TX). \quad (2)$$

Definujme nyní iterační vzorec

$$X_{k+1} = D^{-1}(B - TX_k). \quad (3)$$

Podobně jako u Markovových řetězců můžeme najít postupnými iteracemi z vhodného (nebo libovolného) počátečního stavu stacionární stav, kdy se X_k dalšími iteracemi nemění a tím dostaneme řešení rovnice (2), která je ekvivalentní rovnici (1). Protože inverzní matici počítáme pro matici diagonální, je tento výpočet velice rychlý a levný. Vlastně není vůbec nutné mít k dispozici maticový počet. Iterace dostaneme tak, že z první rovnice osamostatníme x_1 , z druhé rovnice x_2 atd. Výchozí odhad dosadíme do pravých stran a obdržíme zpřesněný odhad. Postup opakujeme, dokud nejsou dvě následující iterace dostatečně blízké.

Poznámka. Předchozí postup je možné použít jenom v případě, že iterační proces (3) konverguje. Pokud by nekonvergoval, není možné o řešení rovnice nic říct, pouze to, že Jacobiho metoda nefunguje. Postačující podmínka, kdy Jacobiho metoda konverguje, je aby každý řádek měl v hlavní diagonále číslo, které je v absolutní hodnotě větší než je součet absolutních hodnot zbylých čísel v tomto řádku. Matice, která splňuje tuto podmínku se nazývá *řádkově ostře diagonálně dominantní matice* a pro takovou matici Jacobiho metoda konverguje. Podobně je možné uvažovat *sloupcově ostře diagonálně dominantní matice* porovnáním absolutních hodnot diagonálních prvků se součty absolutních hodnot ostatních prvků v daných sloupcích a i pro sloupcově ostře diagonální matice metoda konverguje. I přes jednoduchost tohoto kriteriia se s diagonálně dominantními maticemi setkáváme v aplikacích poměrně často. Podíváme-li se, jak byla odvozena soustava popisující rozložení teploty na tepelně vodivé desce (poslední slajd minulé přednášky), není to až takové překvapení.

(1) [Online výpočet.](#)

Podobnými iteračními metodami je možné efektivně řešit soustavy o tisících rovnic a neznámých. Výpočty probíhají rychle a nejsou náročné na paměť jako u přímých metod, známých například ze střední školy. Tímto způsobem se řeší soustavy rovnic při modelování namáhání konstrukcí, vedení tepla, proudění vody apod.

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ není ve schodovitém tvaru a její hodnost na první pohled nepoznáme.

Hodnost matice

<https://youtu.be/HF-RDBZUenY>

Iterační metoda funguje pro soustavy s jediným řešením. Pokud však hledáme vlastní vektory, musíme být schopni umět řešit i soustavy s nekonečně mnoha řešeními.

Matice řádu $m \times n$ obsahuje celkem $m \cdot n$ čísel. Jedná se tedy o relativně komplikovaný objekt. V matematice se často snažíme složitější objekty nějakým způsobem charakterizovat pomocí objektů jednodušších, např. pomocí čísel. Jedno už známe, determinant. Dalším z těchto čísel je hodnost matice, kterou si nadefinujeme nyní.

Definice (hodnost matice). Buď A matice. *Hodnost matice* rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků matice. Hodnost matice A označujeme $h(A)$.

Poznámka: Hodnost je v anglické literatuře označována jako *rank*.

Schodovitý tvar jsme si představili u determinantu. U matice ve schodovitém tvaru je určení determinantu velmi jednoduché. Podobný efekt vidíme i u hodnosti.

Definice (schodovitý tvar). Řekneme, že matice A je ve *schodovitém tvaru*, jestliže případné nulové řádky jsou uspořádány na konci matice a nenulové jsou uspořádány tak, že každý následující řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí.

Věta (hodnost matice ve schodovitém tvaru). *Hodnost matice, která je ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.*

Příklad. Matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je ve schodovitém tvaru a $h(A) = 3$. Matice $B =$

Výpočet hodnosti

Výpočet hodnosti se provádí postupným nahrazením zadané matice maticí, která má stejnou hodnost, ale postupně se přibližuje schodovitému tvaru. Uvedeme si jenom základní postup. Tento se sice dá vylepšit, pro nás je však důležité, že i bez jakýchkoliv vylepšení vždy vede k cíli. (Alespoň teoreticky.)

Věta (řádkové operace zachovávající hodnost matice). *Následující operace nemění hodnost matice:*

1. *vynechání řádku složeného ze samých nul, nebo vynechání řádku, který je totožný s jiným řádkem, nebo vynechání řádku, který je násobkem jiného řádku,*
2. *vynásobení nebo vydělení libovolného řádku nenulovým číslem,*
3. *záměna pořadí řádků,*
4. *ponechání jednoho řádku beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku k nenulovým násobkům ostatních řádků matice.*

Libovolnou matici lze konečným počtem těchto úprav převést do schodovitého tvaru.

Následující věta udává, že veškerá tvrzení, uvedená v souvislosti s hodností pro řádky matice, se dají přeformulovat i pro sloupce matice.

Věta. *Transponování nemění hodnost matice.*

Existence a jednoznačnost řešení soustavy lineárních rovnic

V případě, že matice soustavy je čtvercová již víme, že řešení je určeno jednoznačně právě tehdy, když má matice soustavy matici inverzní. O počtu řešení v obecném případě obdélníkové matice, kdy matici inverzní nemá smysl uvažovat, nám dávají informaci dvě následující věty. První se týká existence řešení a druhá identifikuje případ, kdy řešení je určeno jednoznačně.

Věta (Frobeniova věta, Kronecker-Capelliho věta). *Soustava lineárních rovnic je řešitelná právě tehdy, když její matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnotu.*

Věta (jednoznačnost řešení). *Nechť soustava lineárních rovnic má řešení. Toto řešení je právě jedno, pokud je společná hodnota matice soustavy a rozšířené matice soustavy rovna počtu neznámých. V opačném případě je společná hodnota matice a rozšířené matice soustavy menší než počet neznámých.*

Gaussova eliminace

Spočívá v reprezentaci soustavy pomocí rozšířené matice soustavy a převodu této matice na schodovitý tvar pomocí řádkových operací zachovávajících hodnotu. Tyto operace zachovávají i množinu řešení soustavy. Jakmile je matice ve schodovitém tvaru, zpětnou substitucí postupně dopočítáváme jednotlivé proměnné. (Formálně to u čtvercových regulárních matic odpovídá použití inverzní matice k matici, která má pod hlavní diagonálou nuly. Ale postup funguje i pro obecnější matice a dá se realizovat jednoduchými prostředky a postupným dosazováním.)

Gaussova eliminace je velice flexibilní a univerzální, umožní nám řešit i soustavy mající nekonečně mnoho řešení. V tomto případě dokážeme zapsat řešení pomocí parametrů.

Příklad.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2\end{aligned}$$

Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

V prvním kroku převedeme na tvar, kdy jednomu řádku začíná nenulovým prvkem. První řádek už nijak neupravujeme a opíšeme jej. Místo druhého řádku napíšeme jeho součet s (-1) -násobkem prvního řádku.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

V dalším kroku převedeme na tvar, kdy z řádků začínajících jednou nulou ponecháme jenom jeden a ostatní upravíme

tak, aby začínaly alespoň dvěma nulami. K tomu je vhodné nejprve přehodit poslední dva řádky, abychom mohli použít k vytváření nul jedničku.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

Nyní provedeme potřebnou úpravu. První dva řádky opíšeme. Místo třetího řádku napíšeme jeho součet s trojnásobkem druhého řádku.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 7 \end{array} \right)$$

Nyní přepíšeme do tvaru soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\-7x_3 &= 7\end{aligned}$$

Z poslední rovnice máme snadno $x_3 = -1$. Tuto hodnotu použijeme ve druhé rovnici.

$$\begin{aligned}x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\x_2 + 2 + x_4 &= 2 \\x_2 + x_4 &= 0\end{aligned}$$

Protože však máme pořád dvě neznámé, jednu z nich zvolíme za parametr. Nechť je například x_4 a nechť je parametr označen jako t .

$$x_4 = t$$

Rovnice má poté tvar

$$x_2 + t = 0.$$

Odsud již snadno dostáváme

$$x_2 = -t.$$

Vypočtené hodnoty dosadíme do první rovnice a určíme zbývající neznámou x_1 .

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\x_1 - 2t - 2 + t &= 0 \\x_1 &= 2 + t\end{aligned}$$

Řešení je $x_1 = 2 + t$, $x_2 = -t$, $x_3 = -1$, $x_4 = t$, kde t je libovolné reálné číslo. Vektorově (maticově) máme řešení ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t \\ -t \\ -1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gaussova-Seidelova iterační metoda Shrnutí, hlavní myšlenky

<https://youtu.be/KBg1tllDhxM>

Gaussova-Seidelova iterační metoda je jakýsi mezikrok mezi Jacobiho iterační metodou a Gausovou eliminací. Postupujeme jako v Jacobiho metodě, ale všechny zpřesněné hodnoty použijeme okamžitě, když jsou k dispozici. Nikoliv až v další iteraci jako u Jacobiho metody. Metoda konverguje za stejných podmínek jako Jacobiho metoda, ale rychleji a přesto nevznikají vyšší nároky na výpočetní výkon.

Použijeme příklad z [Wikipedie](#). Soustavu

$$\begin{array}{rccccr} 10x_1 & -x_2 & +2x_3 & & = & 6, \\ -x_1 & +11x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 25, \\ 2x_1 & -x_2 & +10x_3 & -x_4 & = & -11, \\ & 3x_2 & -x_3 & +8x_4 & = & 15. \end{array}$$

s diagonálně dominantní maticí převedeme na iterační tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2/10 - x_3/5 + 3/5, \\ x_2 &= x_1/11 + x_3/11 - 3x_4/11 + 25/11, \\ x_3 &= -x_1/5 + x_2/10 + x_4/10 - 11/10, \\ x_4 &= -3x_2/8 + x_3/8 + 15/8. \end{aligned}$$

Poté vyjdeme z počátečního odhadu řešení a dosazujeme do pravých stran.

U Jacobiho metody pro počáteční odhad vypočteme nejprve všechny pravé strany a dosadíme do proměnných na levé straně jako zpřesnění počáteční aproximace. Tento postup opakujeme.

U Gaussovy-Seidelovy metody nejprve pomocí počátečního odhadu vypočteme z první rovnice x_1 a tuto hodnotu ihned použijeme při výpočtu x_2 z další rovnice. Obojí, x_1 i x_2 už využijeme při výpočtu x_3 a tak dále. Po výpočtu x_4 je první iterace dokončena a postup opět opakujeme, dokud dvě po sobě jdoucí iterace nejsou dostatečně blízké.

S nulovou počáteční aproximací dostáváme v prvním průchodu

$$\begin{aligned} x_1 &= 3/5 = 0.6, \\ x_2 &= 0.6/11 + 25/11 = 2.3272, \\ x_3 &= -0.6/5 + (2.3272)/10 - 11/10 = -0.9873, \\ x_4 &= -3(2.3272)/8 + (-0.9873)/8 + 15/8 = 0.8789. \end{aligned}$$

Jak vidno, vypočtenou hodnotu x_1 ihned použijeme pro výpočet x_2 . Obě tyto hodnoty ihned použijeme pro výpočet x_3 a tak dále. V dalších iteracích postup **opakujeme**. Mimo jiné hodnoty v paměti přímo přepisujeme a nemusíme držet v paměti starou a novou hodnotu.

<https://youtu.be/aeUs2y2QrRw>

- Řada numerických metod pro řešení modelů založených na matematickém modelování fyzikálních zákonů se v nějaké fázi redukuje na řešení soustav lineárních rovnic. Kromě toho se se soustavami lineárních rovnic setkáváme při hledání vlastních směrů matic, což je důležité pro matice reprezentující materiálové charakteristiky.
- Ukázali jsme si tři různé formulace soustav lineárních rovnic, klasickou pomocí rovnic, vektorovou pomocí jedné vektorové rovnice a maticovou pomocí jediné maticové rovnice a jediné maticové operace, maticového součinu.
- Ukázali jsme si, že v případě známé inverze k matici soustavy se řešení redukuje na součin inverzní matice s maticí pravých stran.
- Kromě možnosti využít inverzní matici jsme si ukázali další tři metody řešení. Dvě čistě numerické metody (Jacobiho a Gaussova-Seidelova metoda) a jednou univerzální (Gaussova eliminační metoda).

Kapitola 10

Vektorová pole, tok, zákony zachování

<https://youtu.be/DonzhFhcyQ4>

Připomenutí derivací

Derivace umožňují studovat a popisovat změny veličin, vyjadřovat kvantitativně jejich vzájemné souvislosti.

(Obyčejná) derivace $\frac{df}{dt}$.

- S touto derivací se pracuje u funkce jedné proměnné $f(t)$. Např. $f(t) = kt^2$, kde k je parametr (reálné číslo).
- Derivace je okamžitá rychlost změny veličiny f vzhledem k t , tj. nárůst veličiny f vyvolaný jednotkovým nárůstem veličiny t . (Prakticky však veličinu t změním o malou hodnotu a nárůst přepočítáme na jednotkovou změnu.)
- Jednotka derivace je stejná, jako bychom veličiny f a t dělili.
- V modelech a při praktickém využití pracujeme s definicí derivace jako s rychlostí změny. Při výpočtu ale využijeme dostupné vzorce pro výpočet derivace. Například pro funkci z prvního bodu platí $\frac{df}{dt} = 2kt$.

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \dots$

- S touto derivací se pracuje u funkce více proměnných, typicky $f(x, y, z, t)$. Např. $f(x, y, z, t) = xt^2$
- Jedná se o obyčejnou derivaci podle jedné proměnné, přičemž ostatní proměnné považujeme za parametry. Tj. v případě funkce z minulého bodu je $\frac{\partial f}{\partial t} = 2xt$, $\frac{\partial f}{\partial x} = t^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$.
- Pro jednotku a výpočet platí totéž co u obyčejné derivace.

- Při aplikacích často pracujeme s gradientem, tj. s vektorem sestaveným z parciálních derivací podle jednotlivých prostorových proměnných. Pro funkci tří proměnných x , y a z a pro potřeby matematické formulace fyzikálních zákonů gradient uvažujeme jako sloupcový vektor

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Pro úsporu místa jej někdy píšeme v transponovaném tvaru

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^T.$$

Gradient je vektor, který má směr odpovídající směru nejrychlejšího růstu skalární veličiny a velikost odpovídá změně veličiny na jednotku délky.

Transportní jevy

<https://youtu.be/ULoUeHincbM>

Pochopení a modelování transportních dějů je důležité pro většinu technických oborů. Podstata těchto dějů je často odlišná, přesto mají navenek podobné chování a tím je umožněn jednotný přístup při matematickém modelování.

Příklady veličin podléhajících transportním dějům

- povrchová voda
- podzemní voda
- teplo
- voda ve dřevě

Obecná bilance veličiny, která má zdroje a spotřebiče a je přenášena tokem vypadá následovně.

- Existuje veličina, spojitě rozložená v prostoru, charakterizující stav systému. Tuto veličinu budeme nazývat *stavovou veličinou* a její hustotu označíme u .

- Stavová veličina se může v prostoru přemisťovat *tokem* \vec{J} .
- Stavová veličina může vznikat a zanikat. *Zdroje i spotřebiče* budeme uvažovat společně a jejich vydatnost rozlišíme znaménkem: spotřebiče budou zdroje se zápornou vydatností. Celkovou vydatnost zdrojů a spotřebičů v daném místě, tj. množství veličiny vygenerované na jednotku objemu (nebo plochy, nebo délky, podle počtu dimenzí v úloze) za jednotku času, označíme σ .

Zákon zachování (se zohledněním toku a zdrojů) je vlastně celková bilance stavové veličiny. Přírozeným jazykem je možno tuto bilanci formulovat následovně.

Přírůstek množství veličiny je součtem přírůstku ze zdrojů a přírůstku způsobeného tokem.

Toto je jednoduchý, ale přitom neuvěřitelně silný nástroj, který umožní popsat řadu zcela odlišných dějů. Pro použití v matematickém modelu ale musíme jednotlivé pojmy kvantifikovat. Měřit rychlost, s jakou se mění množství veličiny v daném místě umíme pomocí derivace podle času. Měřit změny v toku přenášejícím sledovanou veličinu jsme se naučili jako jednu z aplikací parciálních derivací: jedná se o záporně vzatou derivaci podle prostorové proměnné vynásobenou fyzikální materiálovou konstantou. Ještě se musíme naučit měřit intenzitu toku a její změny ve dvou nebo třech dimenzích.

Tok a gradient v konstitutivních zákonech

<https://youtu.be/xUhAudBfGLo>

Poznámka (konstitutivní zákony). V aplikacích často formulujeme zákony nebo vztahy mezi fyzikálními veličinami specifickými pro danou látku nebo materiál a udávají odezvu tohoto materiálu na externí stimul. Tyto zákony se nazývají *konstitutivní zákony* a formulujeme je pomocí gradientu a toku vektorového pole. Viz též [Wikipedie](#).

Například vítr (tok molekul vzduchu) je vyvolán nerovnoměrným rozložením vzduchu (jeho hustoty a tím i tlaku) v prostoru a směřuje z míst s vyšším tlakem do míst s tlakem nižším. Větší rozdíl tlaků způsobí “větší vítr” a tím větší tok vzduchu. Toto platí i pro jiné proudění, jak ukážeme dále.

Nerovnoměrnost v prostorovém rozložení charakterizuje gradient. V ustáleném stavu je pro široké rozmezí fyzikálních problémů závislost intenzity toku na gradientu lineární. A protože nulovému gradientu (nulovému stimulu) odpovídá

nulový tok (nulová odezva), bude tato lineární funkce přímou úměrností.

V dalším shrneme důležité praktické příklady, kdy je tok úměrný gradientu. Konstanta úměrnosti je obecně pouze konstantou pro daný problém a dané hodnoty parametrů. Může se měnit s velikostí studovaného objektu (například obsah průřezu geologické vrstvy, kterou proudí voda), s fyzikálními vlastnostmi proudící látky (např. viskozita nebo hustota tekutiny, stlačitelnost vzduchu), s fyzikálními vlastnostmi prostředí (např. velikost pórů v pórovitém prostředí nebo vlhkost dřeva). Proto je možné tyto zákony najít v různých tvarech, s různými členy a případnými přidavnými konstantami, které například odseparují vliv vlastností proudící látky a vliv vlastností prostředí. Vždy záleží na konkrétní situaci, zvyklostech v příslušném podoboru, nebo na přístupu autora. Není proto naší ambicí vést výklad dopodrobna, všimněme si jenom základních myšlenek.

Vícerozměrné konstitutivní zákony

Zákony uvedené níže byly často odvozeny v jednorozměrném případě a letmo zmíněny v přednášce [Derivace II](#). V moderní formulaci používáme obecný vektorový zápis, který zohledňuje i směr. Konstanta úměrnosti potom zprostředkovává vztah mezi dvěma vektory. Jedná se tedy z matematického pohledu o matici, která umožní nejenom změnit délku vektoru a jeho jednotku, ale i směr. Tato matice se navíc při změně báze transformuje speciálním způsobem, tak jako vektory. Takové objekty nazýváme **tenzory**. Níže budeme pojmem tenzor rozumět matici 3×3 nebo 2×2 , podle kontextu. (Obecněji je možno považovat skalární veličiny a vektory za tenzory nižších řádů, toto my však dělat nebudeme.)

Vizualizace toku a vrstevnic pro anizotropní materiál, kdy tok není vždy kolmý na směr maximálního spádu stavové veličiny.

Fickův zákon (difuze)

V roce 1855 německý lékař A. Fick objevil, že difuzní tok \vec{J} (množství látky které projde při difuzi jednotkovou plochou za jednotku času) je úměrný gradientu koncentrace c této látky. Matematicky vyjádřeno pomocí moderní terminologie to znamená, že platí

$$\vec{J} = -D\nabla c.$$

Veličina D se nazývá difuzní koeficient. Pokud má \vec{J} stejný směr jako ∇c , je D skalární veličina. Pokud směry nejsou stejné, je D tenzor. Z fyzikálních důvodů je tenzor D symetrický.

Difuzi se například dřevo zbavuje vlhkosti při vysoušení.

Darcyho zákon (proudění podzemní vody)

V letech 1855 a 1856 francouzský inženýr H. Darcy pokusy prokázal přímou úměru mezi rozdílem tlaků na koncích trubice naplněné porézní zeminou (jednalo se vlastně o rozdíl výšek pro šikmou trubici) a rychlostí proudění vody touto trubicí. Tok (množství vody, která proteče jednotkovou plochou za jednotku času) je dán vztahem

$$\vec{q} = -K\nabla p,$$

kde p je tlak a K je koeficient vodivosti (někdy též koeficient filtrace), v obecném případě symetrický tenzor, v izotropním případě, kdy \vec{q} a ∇p mají stejný směr, veličina skalární.

Někdy se tento zákon neformuluje pomocí gradientu tlaku, ale pomocí gradientu jiné veličiny, kterou zavádíme v hydrologii pro názorné studium efektů, souvisejících s prouděním vody. Nejčastěji se jedná o *vodní potenciál* a hydraulickou výšku či *piezometrickou hladinu*. Piezometrická hladina je veličina používaná k tomu, abychom do jednoho jednoduše modelovatelného faktoru (má rozměr stejný jako délka) započítali všechny veličiny mající vliv na proudění podzemní vody, od rozdílu nadmořských výšek, přes kapilární a osmotické jevy až po vnější síly vyvolané tlakem geologických vrstev a jiné. Jedná se vlastně o celkovou energii vody s tím, že některé části považujeme za zanedbatelné. Například často neuvažujeme kinetickou energii nebo osmózu a kapilární jevy.

Fourierův zákon (vedení tepla)

Fourierův zákon se týká vedení tepla a vyjadřuje, že vektor hustoty tepelného toku \vec{q} vyvolaného gradientem teploty ∇T je dán vztahem

$$\vec{q} = -k\nabla T.$$

Je-li materiál anizotropní, což je nejobecnější případ, je veličina k symetrickým tenzorem. Je-li materiál izotropní, je k skalární veličinou, případně skalární veličina násobená jednotkovou maticí, pokud potřebujeme zachovat její maticový charakter.

Soretův efekt (termodifuze)

Tok tepla je vyvolaný nerovnoměrným rozložením teploty. Difuze chemické látky je vyvolána nerovnoměrným rozložením koncentrace této látky. Většinou je hybatelem procesu nerovnoměrnost v rozložení látky, která se tímto procesem transportuje. Nemusí to však být vždy. Příkladem je termodifuze, což je pohyb prvků vyvolaný nerovnoměrným rozložením teploty. Například při difúzi vody ve dřevě s nerovnoměrným rozložením teploty je tok dán vztahem

$$\vec{J} = -D\nabla c - sD\nabla T,$$

kde s je koeficient termodifuze.

Rozeznáváme kladný a záporný Soretův efekt. Při kladném dochází k transportu ve směru klesající teploty, při záporném naopak ve směru rostoucí teploty. Te je v kontrastu s ostatními konstitutivními zákony, kde tok proudí vždy jenom do míst s menší hustotou stavové veličiny. Viz Wikipedia a heslo Thermophoresis. Viz Wikipedia a heslo Thermophoresis.

Speciální případy vztahu mezi gradientem a tokem

Uvažujme vztah mezi gradientem a tokem ve tvaru

$$\vec{j} = -K\nabla u,$$

kde K je symetrický tenzor. Gradient má ve trojrozměrném případě vyjádření

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)^T$$

a ve 2D

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T,$$

kde horní index T značí transponovanou matici, tj. jedná se o sloupcový vektor.

Obecný případ (anizotropní)

Velichina K je matice

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$

jejíž komponenty splňují $k_{ij} = k_{ji}$. Často jsou všechny veličiny kladné a prvky v hlavní diagonále jsou dominantní.

Komponenty vektoru $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)^T$ jsou

$$\begin{aligned} j_x &= -k_{11} \frac{\partial u}{\partial x} - k_{12} \frac{\partial u}{\partial y} - k_{13} \frac{\partial u}{\partial z}, \\ j_y &= -k_{21} \frac{\partial u}{\partial x} - k_{22} \frac{\partial u}{\partial y} - k_{23} \frac{\partial u}{\partial z}, \\ j_z &= -k_{31} \frac{\partial u}{\partial x} - k_{32} \frac{\partial u}{\partial y} - k_{33} \frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned}$$

což zjistíme prostým maticovým násobením. Prostor pro další úpravu není.

Ortotropní případ, vhodně zvolené osy

V obecném případě je zpravidla možné transformovat soustavu souřadnic tak, aby tenzor K byl diagonální. Pro praktické výpočty se toto však často nevyplatí. Pokud však je studovaný problém ortotropní, má charakteristické směry (přesněji, má tři roviny symetrie materiálových vlastností), je možné zvolit souřadnice v souladu s těmito směry a matice K je diagonální.

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix}$$

Komponenty vektoru \vec{j} jsou

$$\begin{aligned} j_x &= -k_{11} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ j_y &= -k_{22} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ j_z &= -k_{33} \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}$$

S diagonální maticí se pracuje velmi dobře, protože má v hlavní diagonále vlastní čísla. Tato vlastní čísla jsou fyzikální charakteristikou úlohy. Například největší vlastní číslo a odpovídající vlastní směr charakterizují směr, ve kterém je odezva materiálu na vnější podnět maximální a vlastní číslo udává velikost této reakce. Tyto fyzikální charakteristiky nemohou být závislé na volbě souřadné soustavy, ve které úlohu popisujeme. Co se mění s volbou souřadné soustavy jsou pouze souřadnice vlastního vektoru. Vlastní čísla jsou však skalární a proto jsou invariantní při otočení soustavy souřadnic. Pokud bychom neměli možnost zvolit soustavu souřadnic tak, aby matice byla diagonální, máme alespoň jistotu, že vlastní čísla zůstanou stejná.

Ortotropní případ ve 2D

Stejně jako ve 3D, pouze chybí třetí rovnice.

Izotropní případ

Stejně jako ortotropní případ, ale navíc platí $k_{11} = k_{22} = k_{33} = k$. Potom $\vec{j} = -k\nabla u$, kde k je konstanta a vektory toku a gradientu mají opačný směr.

Divergence

<https://youtu.be/wrYpaPerg3M>

Budeme sledovat tok vektorového pole a bude nás zajímat, o kolik se tok v daném místě mění.

- Pro jednoduchost rozdělíme tok na tři nezávislé části ve směru jednotlivých os a vztáhneme vše k jednotkám času a průřezu, tj. budeme uvažovat hustotu toku nějaké fyzikální veličiny.
- Je-li tato hustota toku popsána vektorovým polem $\vec{q} = (P, Q, R)$ v jednotkách kilogram na metr čtvereční za sekundu, znamená to, že kolmým průřezem jednotkového obsahu projde za jednotku času P kilogramů sledované látky, jejíž tok popisujeme. Často se pracuje i s objemovým tokem, kdy množství neměříme v kilogramech ale v metrech krychlových a například při ustáleném proudění v trubici (hydrodynamika) je tok roven vektoru rychlosti a při proudění porézním materiálem (proudění podzemní vody) je roven filtrační rychlosti.
- Derivace $\frac{\partial P}{\partial x}$ udává, o kolik studovaný tok v daném místě vzroste ve směru osy x a tento nárůst je vztažený na jednotku délky.
- Ve směru osy y máme tok vyjádřený veličinou Q a proto nás podobně zajímá $\frac{\partial Q}{\partial y}$.
- Analogicky $\frac{\partial R}{\partial z}$.
- Celková změna toku bude součtem všech tří příspěvků. Pokud je kladná, znamená to, že z daného místa více veličiny vytéká, než kolik teče dovnitř. Pokud je záporná, je tomu naopak. Jestli se v případě nerovnováhy v daném místě může proudící veličina tvořit nebo spotřebovávat nebo akumulovat nebo jestli v daném místě může ubývat z tohoto rozboru nezjistíme. Záleží na charakteru proudící veličiny a na okolnostech s tímto prouděním spojených. Tuto informaci nám pro další popis musí dodat externí věda (obecná fyzika, fyzika materiálu, fyzika životního prostředí, hydrologie, pedologie, ...).
- Při preciznější argumentaci dávající do souvislosti partiální derivace jednotlivých komponent toku s tím, co se reálně s vektorovým polem děje, je nutné si pomoci stejně jako u derivací, tj. uvažovat ne dané místo, ale jistý konečně velký objem (viz obrázek), vztáhnout dané veličiny na jednotku objemu a rozměry tohoto objemu limitně stáhnout k nule. Toto však již přesahuje ambice v našem kurzu a jedná se o formalismus, kterému se vyhneme přímým představením hotového výsledku.

Výše uvedenými úvahami je motivována následující definice a věta. (Definice je maličko nepřesná, protože nemáme nástroje pro pečlivější formulaci.)

Definice (divergence). *Divergence* vektorového pole \vec{F} v daném bodě je převis toku vektorového pole z tohoto místa nad tokem do tohoto místa. Tento tok se počítá přes hranici infinitezimálně malého referenčního tělesa a je vztažený na jednotku objemu. Divergenci vektorového pole \vec{F} označujeme $\nabla \cdot \vec{F}$ nebo $\text{div } \vec{F}$.

Věta (výpočet divergence). *Pro vektorovou funkci*

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k},$$

kde P , Q a R jsou funkce tří proměnných x , y a z vypočteme divergenci vztahem

$$\nabla \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Pro vektorovou funkci dvou proměnných vypočteme divergenci analogicky, pouze chybí třetí člen.

Poznámka (fyzikální interpretace divergence). Vektorové pole používáme k modelování toku veličin, které nás zajímají (teplo v materiálu, tekutina nebo chemická látka v materiálu, voda nebo plyn v půdě a podobně). Divergence vektorového pole udává tok z jednotkového objemu látky v daném místě. Udává, jestli se v daném místě a čase tok nábývá na intenzitě (kladná divergence) nebo ustává (záporná divergence). Tento efekt může být způsoben tím, že veličina přenášená tímto polem se v daném místě buď kumuluje, nebo ubývá a také tím, že daná veličina v bodě může vznikat nebo zanikat.

Divergence je lokální veličina. Udává informaci o daném bodě. Pro měření však je nutné mít konečný objem a pro stanovení toku konečně velkou hranici. Vzájemný vztah mezi lokální veličinou a konečným objemem je založený na předpokladu, že podmínky se nemění skokem a okolí každého bodu jsou nepřilíší odlišné od podmínek v okolních bodech.

Poznámka (fyzikální interpretace divergence v měřitelných pojmech). Protože tok přes hranici umíme měřit u těles, představíme si okolo bodu který nás zajímá, těleso. Například kouli nebo krychli. Poté určíme tok přes hranici. Tok hranicí ven počítáme kladně a dovnitř záporně. Celkový tok hranicí určíme jako součet přes všechny části hranice. Podíl celkového toku přes hranici tělesa a objemu tohoto tělesa je odhad pro divergenci v daném bodě.

Přesnou divergenci získáme postupem uvedeným v předchozí poznámce, pokud limitním přechodem stáhneme rozměry tělesa k nule.

Pokud se daném místě množství veličiny nemění s časem, tj. žádná veličina se tam neakumuluje ani neubývá, mluvíme o stacionárním proudění a stacionárním poli. Situace se zjednoduší, protože potom divergence souvisí jenom s přítomností zdrojů a spotřebičů.

Poznámka (praktická interpretace divergence stacionárního pole). Pokud při ustáleném proudění je v některém místě divergence kladná, znamená to, že v tomto místě musí být zdroj této veličiny. Pokud je záporná, je v daném místě spotřebič. Pro pohodlí při popisu toku bere spotřebiče jako záporné zdroje. Vektorové pole, jehož divergence je rovna nule, se nazývá **nezřídlové pole**. To proto, že pokud toto pole popisuje ustálený tok, tak se jedná o tok v prostředí bez zdrojů a spotřebičů.

Ze střední školy z fyziky umíme modelovat vektorové pole pomocí siločar. Siločáry nezřídlového pole nikde nezačínají ani nekončí a jsou to uzavřené křivky. Například stacionární magnetické pole je nezřídlové. Absence zdrojů magnetického pole se projevuje tak, že rozříznutím tyčového magnetu vzniknou dva menší plnohodnotné magnety. Nevznikne samostatný jižní pól a samostatný severní pól magnetu. To je rozdíl oproti poli elektrickému, kdy rozdělením tyče s opačně nabitými konci vznikne jedna kladně nabitá a jedna záporně nabitá tyč poloviční délky.

Výpočet gradientu a divergence

https://youtu.be/UzT_PDj5ukY

Viz přednáška.

Rovnice kontinuity

https://youtu.be/_iHeE-9DJrA

- Přírůstek stavové veličiny za jednotku času v jednotkovém objemu (nebo ploše, nebo délce, podle dimenzionality úlohy) je derivace hustoty u podle času.

$$\text{Přírůstek} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

- Přírůstek veličiny v jednotkovém objemu (nebo ploše, nebo délce) za jednotku času způsobený tokem \vec{j} je záporně vzatá divergence vektorového pole \vec{j} . Tento přírůstek je způsobený snížením toku, proto má předřazeno záporné znaménko.

$$\text{Přírůstek způsobený tokem} = -\nabla \cdot \vec{j}$$

Matematickou formulací celkové bilance je **rovnice kontinuity**.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot \vec{j}$$

Poznámka (fyzikální interpretace členů rovnice kontinuity).

- Člen $\frac{\partial u}{\partial t}$ udává, jak rychle se roste hustota stavové veličiny u v daném místě a čase.
- Člen σ udává vydatnost zdrojů stavové veličiny, přičemž spotřebiče jsou uvažovány jako zdroje záporné vydatnosti. Tento člen tedy udává, kolik stavové veličiny v tomto místě vzniká v jednotkovém objemu za jednotku času.
- Člen $\nabla \cdot \vec{j}$ udává v daném bodě změnu ve velikosti proudění přenášejícím stavovou veličinu. Přesněji, udává, o kolik více veličiny z daného místa vyteče ve srovnání s množstvím veličiny, které do tohoto místa vteče. Jinak řečeno, udává, o kolik zesílí v daném místě tok \vec{j} . My potřebujeme mít zachyceno zeslabení (množství které chybí v toku se “použije” na akumulaci veličiny v daném místě) a proto uvažujeme záporně vzatou divergenci, tj. $-\nabla \cdot \vec{j}$.
- Pokud zdroje stavové veličiny neexistují, jedná se o *bez zdrojovou rovnici* a klademe $\sigma = 0$.
- Pokud studujeme systém v ustáleném stavu, kdy se stavová veličina nemění v čase, je člen $\frac{\partial u}{\partial t}$ na levé straně nulový. V tomto případě mluvíme o *stacionárním stavu* a *stacionární rovnici kontinuity*. Stacionární rovnice kontinuity typicky popisuje systémy, které byly dostatečně dlouhou dobu ve stabilních podmínkách a dosáhly rovnovážného stavu.
- Viděli jsme, že za určitých podmínek mohou některé členy v rovnici kontinuity chybět. Naopak člen $\nabla \cdot \vec{j}$ charakterizující změny v toku je v rovnici kontinuity přítomen vždy. Bez něj by rovnice kontinuity ztratila smysl (resp. redukovala by se na triviální případ, kdy veličina v daném místě vzniká danou rychlostí a zůstává zde, tj. problém řešitelný čistě integrováním).

V matematice často rovnici kontinuity uvažujeme ve výše uvedeném tvaru. Při praktickém použití většinou preferujeme názornou interpretaci jednotlivých veličin a proto se v rovnici mohou objevit další konstanty úměrnosti, které umožní sladit jednotky a fyzikální interpretaci členů. Někdy se naopak snažíme konstanty co nejvíce redukovat metodami transformace popsány v přednášce o diferenciálních rovnicích. Proto volíme vhodné násobky veličin vystupujících v matematické formulaci tak, aby se co nejvíce konstant eliminovalo, případně shluklo do jediné veličiny. Zkušenosti ukazují, že je vhodné volit veličiny bezrozměrné. Například v publikaci P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti

dřeva I je zavedena **bezrozměrná vlhkost**, **bezrozměrný čas** a **bezrozměrná vzdálenost** na straně 61 pro rovnici popisující difuzi a **charakteristická délka**, **Biotovo číslo** (bezrozměrná tepelná vodivost) a **bezrozměrná teplota**, **bezrozměrný čas** a **bezrozměrná vzdálenost** pro rovnici popisující vedení tepla na stranách 88 a 89.

V této rovnici není zahrnut případ, kdy se veličina přenáší ještě i prouděním hmotného prostředí (konvekce).

Rovnice mělké vody

Rovnici kontinuity můžeme použít pro popis vody v korytě. Úloha je jednodimenzionální a tok Q je skalární veličina. Divergence toku se díky jednodimenzionálnosti redukuje na derivaci podle prostorové proměnné $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Zachovávající se veličinou je množství vody. Hustota zachovávající se veličiny je množství vody na metr délky toku, tj. *průtočný průřez* A (obsah průřezu říčního toku v daném místě). Zdroje zpravidla neuvažujeme, tj. $\sigma = 0$. Rovnice kontinuity má potom tvar

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

a nazývá se Saint-Venantova rovnice nebo též *rovnice mělké vody*. Tato rovnice se používá při popisu *proudění v korytě* nebo při modelování *vln tsunami*.

V rovnici jsou dvě funkce, tok Q definující pohyb stavové veličiny a průřez A definující množství stavové veličiny. Někdy je vhodnější pracovat se stavovou veličinou h udávající výšku hladiny. Jak jsme zmínili v úvodní přednášce o derivacích, je derivace $\frac{dA}{dh}$ rovna šířce hladiny. Abychom mohli celou rovnici převést na tvar pracující jenom se stavovou veličinou h , je nutné udělat nějaké dodatečné předpoklady, jako například pracovat s konkrétním tvarem koryta.

Proudění tekutiny v mechanice kontinua

V mechanice kontinua podobně jako u vedení tepla neuvažujeme zdroje. Stavovou veličinou je hustota ρ , která popisuje množství látky v daném místě. Tato látka je přenášena tokem, který je roven součinu rychlosti \vec{u} a hustoty ρ . Rovnice kontinuity popisující proudění dané rychlostí \vec{u} má poté tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0,$$

kde ρ je hustota. Tato rovnice napsána pro vzduch je jednou z rovnic používaných při **modelování vývoje počasí**

Pro nestlačitelnou tekutinu je hustota konstantní, což eliminuje nestacionární člen a redukuje rovnici na

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

Důsledkem této rovnosti je zvýšení rychlosti molekul pohybující se nestlačitelné tekutiny při proudění místem s menším průřezem.

Středoškolský makroskopický tvar jednorozměrné rovnice kontinuity pro proudění nestlačitelné tekutiny je

$$Su = \text{konst.}$$

Difuzní rovnice

<https://youtu.be/MH8IzenZZCo>

Difuzní rovnice je rovnice kontinuity s dosazeným konstitučním vztahem pro tok. Použijeme-li pro kvantifikaci souvislosti toku a gradientu lineární aproximaci, je možné psát

$$\vec{j} = -D\nabla u,$$

kde D konstanta úměrnosti. Pokud tok \vec{j} a gradient ∇u leží v jedné přímce, je D reálné číslo, jinak je D matice. Například při studiu pohybu vody ve dřevě se voda řídí nejen směrem maximálního poklesu vlhkosti, ale stáčí se současně do podélného směru, ve kterém dřevo vede vlhkost nejlépe. V takovém případě je D matice. Spojením rovnice kontinuity

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot \vec{j}$$

a vztahu pro tok stavové veličiny dostáváme rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot (-D\nabla u).$$

Tuto rovnici je možno upravit na tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \nabla \cdot (D\nabla u),$$

který se nazývá *difuzní rovnice*.

Poznámka (fyzikální interpretace difuzní rovnice).

- Člen $\frac{\partial u}{\partial t}$ udává, jak rychle se mění hustota stavové veličiny u . Je stejný jako v rovnici kontinuity.
- Člen σ udává vydatnost zdrojů stavové veličiny. Je stejný jako v rovnici kontinuity.
- Člen ∇u udává nerovnoměrnost v prostorovém rozložení stavové veličiny. Pomocí difuzní matice D a konstitutivního zákona tuto nerovnoměrnost přepočítáme na tok, který se snaží uvažovanou nerovnoměrnost vyrovnat. Tento tok je reprezentován výrazem $-D\nabla u$.

- Záporně vzatá divergence toku udává, jak tok v daném místě ztrácí na intenzitě. Vzhledem k zápornému znaménku v konstitutivním zákoně má záporně vzatá divergence tvar

$$\nabla \cdot (D\nabla u).$$

Představuje přírůstek hustoty stavové veličiny v daném místě za jednotku času, způsobený zeslábnutím toku.

- Rovnice jako celek vyjadřuje, že navýšení hustoty stavové veličiny (tj. množství stavové veličiny v jednotkovém objemu) je součtem navýšení díky zdrojům a navýšení díky zeslábnutí toku v daném místě.

Vedení tepla

Důležitým speciálním případem difuzní rovnice je rovnice vedení tepla. Stavovou veličinou, která se zachovává v úlohách s vedením tepla, je vnitřní energie ve formě tepla. Zpravidla nemá smysl uvažovat členy vyjadřující zdroje, tj. $\sigma = 0$. Protože teplo neměříme přímo, je vhodnější model formulovat pro teplotu T . Jsou-li ρ a c po řadě hustota a měrná tepelná kapacita materiálu, má člen vyjadřující změnu hustoty energie v daném místě tvar $\rho c \frac{\partial T}{\partial t}$. Úměrnost mezi gradientem teploty a tokem tepla zprostředkovává *Fourierův zákon*. Difuzní rovnice má v tomto případě tvar

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla T)$$

Poznámka (fyzikální interpretace rovnice vedení tepla).

- Veličina $\frac{\partial T}{\partial t}$ udává rychlost růstu teploty tělesa a koeficient ρc tuto hodnotu přepočítává na údaj, jak rychle roste vnitřní energie tělesa (kinetická energie molekul.)
- Výraz $D\nabla T$ udává (až na znaménko), jak se nerovnoměrnost v rozložení teploty vyrovnává tokem tepla. Přesněji, tok tepla je $-D\nabla T$.
- Člen $\nabla \cdot (D\nabla T)$ udává, kolik tepla z celkového toku v daném místě zůstává a podílí se na zvýšení teploty. Vzhledem k absenci zdrojů je to také jediný mechanismus, jak v daném místě může vnitřní energie přibývat či ubývat.
- Rovnice jako celek vyjadřuje to, že pokud z daného místa více energie odtéká, než kolik do místa proudí, dojde v tomto místě k odpovídajícímu snížení teploty. V tomto bodě je totiž divergence toku $\nabla \cdot (-D\nabla T)$ kladná a výraz z rovnice $\nabla \cdot (D\nabla T)$ je proto záporný.

Tato rovnice je zobecnění rovnice vedení tepla v jedné dimenzi, kterou jsme odvodili primitivními prostředky (jenom

pomocí parciálních derivací, bez gradientu a divergence) ve tvaru

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

v úvodní přednášce.

Rovnice vedení tepla se používá například při *tepelné ochraně budov*, při modelování *tepelných ostrovů* v krajině, při *tepelné modifikaci dřeva*, nebo při studiu *permafrostu*.

V literatuře věnované problematice dřeva se rovnice vedení tepla ve dřevě označuje jako Druhý Fourierův zákon (P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I, str. 88).

V některých případech nemusí být člen charakterizující zdroje nulový. Teplo může vznikat například při tření nebo při průchodu elektrického proudu transformací z jiného druhu energie. Dále teplo vzniká například při betonování po **přidání vody do cementu**, známý je problém jak **uchladit Hooverovu přehradu** při stavbě.

Voda v porézním materiálu

V porézním materiálu voda prostupuje materiálem a zachovává se její množství, což bude stavová veličina. Hustotu tohoto množství, tj. obsah vody v jednotce objemu, označíme c a pro tuto veličinu formulujeme matematický model. Zdroje neuvažujeme. Úměrnost mezi gradientem koncentrace vody a jejím tokem zprostředkovává *Fickův zákon*. Modelem je potom difuzní rovnice bez zdrojů.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla c)$$

Tato rovnice se používá například při modelování procesu *sušení dřeva* v sušárnách nebo při modelování *dřeva ve vlhkém prostředí*. Stejná rovnice napsaná pro vzduch se používá k modelování proudění v atmosféře při *předpovídání počasí*.

V literatuře věnované problematice dřeva se rovnice difuze použita na modelování vlhkosti ve dřevě označuje jako Druhý Fickův zákon (A. Požgaj a kol., Štruktúra a vlastnosti dřeva, str. 202, P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I, str. 60).

V praxi je dřevo často s jistou přesností homogenní, ale difuzní koeficient dřeva závisí na vlhkosti, tedy vztah mezi gradientem vlhkosti a difuzním tokem není lineární. Přesto i v tomto případě používáme Fickův zákon, ovšem složky difuzního koeficientu nepovažujeme za konstanty, jsou závislé na c a jejím prostřednictvím i na x .

Rovnice podzemní vody

Proudění podzemní vody je vlastně úloha s řekou se zasypaným korytem. Taková voda teče ve srovnání s povrchovou vodou velmi pomalu, protože prosakuje půdou. Prostor, kde se podzemní voda nachází, se nazývá *zvodněň*. Stejně jako řeka v korytě na povrchu, i voda v podzemní zvodněň teče v jistém smyslu “z kopce”. V tomto případě však kromě nadmořské výšky může hrát roli i rozdíl tlaků nebo další efekty. Vliv všech těchto efektů shrnujeme do jediného pojmu *piezometrická výška*. Směr “z kopce” pro podzemní vodu je poté směr poklesu piezometrické výšky. V daném místě se může voda hromadit, to poznáme nárůstem hladiny spodní vody. Také může z hlediska zvodněň část vody zanikat, například pokud je zde čerpaná studna nebo průsak do jiné zvodně. Voda může ve zvodně i vznikat, například zasakovacím vrtem nebo průsakem dešťových srážek. Pokud do celkové bilance započteme rozdíl mezi přítokem a odtokem a všechny zdroje a spotřebiče, množství vody se zachovává.

Podzemní zvodněň je typickým porézním materiálem, přesto k modelování vody v tomto prostředí přistupujeme speciálním způsobem. Úloha se většinou uvažuje ve dvou dimenzích, protože horizontální rozměry zvodněň jsou mnohem větší než její hloubka. Zachovává se množství vody, ale stejně jako u vedení tepla je výhodné formulovat model pro lépe měřitelnou veličinu, *piezometrickou výšku* h . Přírůstek množství podzemní vody za časovou jednotku na jednotkové ploše v daném místě zvodněň má tvar $S_S \frac{\partial h}{\partial t}$, kde S_S je *specifická zásobnost*. Úměrnost mezi gradientem piezometrické výšky a filtračním tokem zprostředkovává *Darcyho zákon*. Difuzní rovnice má (s konstantou úměrnosti T , *transmisivitou*) tvar

$$S_S \frac{\partial h}{\partial t} = \sigma + \nabla \cdot (T \nabla h).$$

Tato rovnice se nazývá *rovnice podzemní vody*. Zdroje jsou nejčastěji zasakovací nebo odvodňovací vrty, dále studny, poldry, výkopy nebo zářezy. Informace získané z rovnice podzemní vody se využívají například k ochraně lomů, dolů a stavebních jam před *zaplavením*, k hospodaření s *pitnou vodou*, k ochraně před šířením *kontaminace z chemických provozů*. Aplikace jsou dále v detekci zdroje kontaminace pitné vody a odhadu rychlosti šíření kontaminace, včetně *kontaminace slanou mořskou vodou* v přímořských oblastech.

U proudění s napjatou hladinou (mezi dvěma nepropustnými vrstvami, angl. *confined aquifer*) transmisivita závisí pouze na fyzikálních vlastnostech zvodněň. Například pro homogenní izotropní materiál je konstantní. U proudění s volnou hladinou (bez horní nepropustné vrstvy, angl. *unconfined aquifer*) je transmisivita úměrná tloušťce vrstvy obsahující vodu. Zpravidla nulovou hodnotu piezometrické hladiny volíme na dolní nepropustné vrstvě a potom platí $T = kh$, kde k závisí pouze na fyzikálních vlastnostech půdy. Proto se

často rovnice podzemní vody pro proudění s volnou hladinou zapisuje ve tvaru

$$S_S \frac{\partial h}{\partial t} = \sigma + \nabla \cdot (kh \nabla h).$$

Rovnice vedení tepla ve 2D v různých podmínkách

<https://youtu.be/5hy6lB1O4KQ>

Uvažujme rovnici vedení tepla ve dvou rozměrech a v prostředí bez zdrojů.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla T) \quad (***)$$

Stacionární stav

Stacionární stav znamená, že stavové veličiny nezávisí na čase. Derivace podle času je v takovém případě nulová. Rovnice (***) se redukuje na

$$\nabla \cdot (D \nabla T) = 0.$$

Homogenní izotropní materiál a lineární materiálové vztahy

Materiál má ve všech místech (homogenní) a ve všech směrech (izotropní) stejné vlastnosti. Veličina D je reálná skalární veličina (konstanta).

Podle pravidla derivace konstantního násobku se rovnice (***) redukuje na

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = D \nabla \cdot (\nabla T)$$

a ve složkách

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

Pro $\tau = \frac{Dt}{\rho c}$ (změna jednotky času) dostáváme

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Ortotropní materiál, nehomogenní nebo nelineární

Materiál má dva charakteristické směry související s rovinami symetrie. Zvolíme soustavu souřadnic tak, aby osy byly orientovány ve směru vlastních vektorů.

Veličina D je diagonální matice. Pro

$$D = \begin{pmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{pmatrix}$$

je tvar rovnice (***) ve složkách

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

Homogenní ortotropní materiál a lineární materiálové vztahy

Materiál má dva charakteristické směry související s rovinami symetrie a materiálové charakteristiky jsou ve všech místech stejné a nezávislé na T . Stejně jako předchozí případ, ale D_x a D_y jsou konstanty. Podle pravidla pro derivaci konstantního násobku se rovnice (***) redukuje na

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Umění identifikace předpokladů z tvaru difuzní rovnice

Jasná kuchařka, jak identifikovat předpoklady vedoucí ke konkrétní formě difuzní rovnice může vypadat následovně. Obecný tvar v kartézských souřadnicích je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

a pokud máte před sebou podobnou rovnici, ve které některý člen chybí, znamená to, že tato rovnice v sobě již obsahuje jisté předpoklady. Ty se pokusíme identifikovat. Některý člen může být lehce modifikovaný, například a levé straně mohou figurovat dodatečné multiplikativní konstanty (například v případě rovnice vedení tepla) nebo člen popisující zdroje může být nekonstantní (například při studiu vývoje populace se zahrnutím prostorového rozložení používáme logistický růst $\sigma = ru \left(1 - \frac{u}{K} \right)$), zajímavé však pro nás jsou podstatné odlišnosti shrnuté v následujících odrážkách. Vždy je to “něco za něco”. Jednodušší rovnice se lépe dále zpracovává, ale neumí zachytit plnou škálu efektů, které jsou v obecné rovnici.

- Je v rovnici člen $\frac{\partial u}{\partial t}$ s derivací podle času? Pokud ano, je rovnice *nestacionární* a dokáže popsat časový vývoj děje. Pokud ne, jedná se o *stacionární* rovnici popisující děj po dosažení ustáleného stavu. Stacionární rovnice je jednodušší, ale nedokáže zachytit časový vývoj.

- Je v rovnici člen bez časové a prostorové derivace? Tj. v našem označení σ ? Pokud ano, popisuje tento člen vydatnost zdrojů nebo spotřebičů a rovnice je schopna zachytit situace, kdy stavová veličina vzniká nebo zaniká. Pokud ne, jedná se o *bezzdrojovou rovnici*. Takové rovnice popisuje stav, kdy se stavová veličina může jenom přemísťovat nebo kumulovat. Bezzdrojová rovnice je jednodušší, ale nedokáže modelovat vznik či zánik stavové veličiny.
- Jsou přítomny všechny prostorové souřadnice, nebo jenom některé? Počet prostorových souřadnic definoje *dimenzi problému*, tj. určuje, zda se jedná o úlohu v prostoru, v rovině nebo na přímce.
- Jsou všechny difuzní koeficienty stejné (například D), nebo jsou odlišeny (například indexy D_x, D_y, D_z)? Pokud jsou stejné, jedná se o *izotropní* materiál a rovnice dokáže popsat pouze materiál mající ve všech směrech stejné vlastnosti. Pokud jsou difuzní koeficienty odlišeny, jedná se o *anizotropní* nebo *ortotropní* materiál a dokážeme s ní popsat i materiály mající díky své struktuře jiné vlastnosti v jednotlivých směrech.
- Jsou difuzní koeficienty uvnitř derivací ve členech typu

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

nebo jsou difuzní členy zjednodušeny do tvaru

$$D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

s druhými derivacemi? Pokud jsou zjednodušeny do druhého tvaru se součinem difuzního koeficientu a druhé derivace, znamená to, že rovnice je sice jednodušší, ale rovnice je schopna popsat pouze materiál, který je *homogenní* a konstitutivní zákon v tomto materiálu je *lineární*. V opačném případě (nehomogenita materiálu, nelinearita materiálu, případně obojí) necháváme difuzní koeficienty uvnitř derivace, tak jak to je v obecném případě. Rovnice je komplikovanější, ale umožňuje práci s obecnějšími materiály.

Shrnutí, hlavní myšlenky

<https://youtu.be/TjyB3kP2uXE>

- Pomocí gradientu a aparátu lineární algebry můžeme vyjádřit vztah mezi pohybem fyzikální veličiny a mechanismem, který tento pohyb iniciuje. Většinou se jedná o vztah mezi vektorovým polem toku a gradientem jistého skalárního pole.
- Pomocí parciálních derivací a divergence dokážeme určit, jestli se v nějakém místě veličina proudí tímto místem “ztrácí” nebo “přibývá”.

- Dokážeme dokonce s rozumnou interpretací, čím případně ubývání přenášené veličiny může být způsobeno (zdroje a spotřebiče nebo akumulace v daném místě), zformulovat rovnici, která dané proudění plně popisuje. Výsledkem jsou rovnice vedení tepla, rovnice difuze, rovnice proudění podzemní vody a jiné.
- Obecná rovnice odvozená podle předchozích bodů je obecná a pro práci na konkrétní úloze se ji snažíme nějak blíže specifikovat. Například zjednodušit, pokud máme informaci o charakteru materiálových vztahů (lineární/nelineární) a materiálu (homogenní/nehomogenní). Jiným zjednodušením je, pokud se zajímáme o stacionární stav, který se nastolí po dosažení rovnováhy.
- Posláním široké škály příkladů různých specifikací rovnice kontinuity (vedení tepla, proudění povrchové a podzemní vody a další) je, aby si student uvědomil široký záběr obecné formulace rovnice kontinuity. Na zkoušku se naučte obecnou rovnici a jenom informativně si přečtěte její speciální případy. Obory pracující se dřevem (dřevařství, nábytek, dřevostavby) si uložte do paměti rovnice popisující modelování tepla a vlhkosti ve dřevě. Budou se vám hodit ve studiu. Na krajinářství se zase zaměřte na modelování vody, mělké i podzemní.

Shrnutí více matematickou formou

- Ukázali jsme si, že má smysl založit model na bilanci, která vyjadřuje, že rychlost růstu stavové veličiny je součtem příspěvku vygenerovaného zdroji a příspěvku přineseného tokem.
- Rychlost růstu je derivace podle času,

$$\frac{\partial u}{\partial t}$$

- Příspěvek přinesený tokem je roven zeslabení toku v daném místě. Zeslabení toku vypočteme jako záporně vzaté zesílení toku, tj. záporně vzatou divergenci toku,

$$-\nabla \cdot \vec{j}$$

- Celková bilance se poté nazývá rovnice kontinuity a má tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot \vec{j}$$

- Tok \vec{j} zpravidla vypočteme jako záporně vzatý gradient stavové veličiny vynásobený difuzní maticí, tj.

$$\vec{j} = -D\nabla u$$

- Spojením předchozích vztahů dostáváme difuzní rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \nabla \cdot (D\nabla u)$$

To je rovnice popisující obecně transport energie nebo hmoty prostředím. Například vedení tepla nebo difuzi vody při sušení dřeva.

- Pro konkrétní výpočet je často nutné rovnici zapsat v souřadnicích. Například pokud máme dvojrozměrný model a směr souřadných os zvolíme ve vlastních směrech matice D (potom matice D bude diagonální s diagonálními prvky například D_x a D_y), má difuzní rovnice tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

- Pokud je materiál homogení a má lineární materiálovou odezvu, je dokonce možné rovnici dále zjednodušit na

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (\text{N})$$

Tato formulace je jednodušší než předešlá, protože obsahuje druhé derivace místo kvaziderivací.

- Pokud je rovnice například stacionární (stavová veličina nezávisí na čase, derivace podle času je nulová), bezdrožová (neobsahuje zdroje ani spotřebiče, veličina σ je nulová), z homogenního a lineárního materiálu (viz předchozí bod) redukuje se rovnice (N) na

$$0 = D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (\text{S})$$

Tato rovnice je jednodušší než “plná rovnice” (N) a proto ji dokážeme řešit i ve složitějších podmínkách. Někdy například umíme vyřešit nestacionární rovnici (N) a máme dynamiku jak rychle roste stavová veličina, například jak rychle roste teplota v materiálu. To je nejlepší scénář, někdy však může být nerealizovatelný. Někdy ale umíme vyřešit jenom stacionární rovnici (S) a najdeme jenom rozložení stavové veličiny po dosažení rovnovážného stavu. To je také dobrá a užitečná informace sama o sobě. Navíc může sloužit jako odrazový můstek k řešení nestacionární rovnice (N) tak, že od stacionárního řešení postupujeme zpětně v čase.

- Pokud je materiál z předchozího bodu ještě izotropní, tj. pokud má stejné vlastnosti ve všech směrech, je $D_x = D_y$ a rovnici je možno vydělit do tvaru

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

O této rovnici si ukážeme (v roce 2021 jsme si ukázali už na minulé přednášce) že zapojením druhých diferencí pro numerickou aproximaci druhé derivace (viz [přednáška číslo 2](#)) se model redukuje na soustavu lineárních rovnic, jak jsme ji poněkud naivní metodou odvodili v [přednášce číslo 7](#).

Praktická aplikace (zajímavost z jiné oblasti než nauky o materiálu)

Jste frustrování, že k rovnici nemáme řešení? Bohužel ho není obecně možné najít. Rovnici dokážeme přesně vyřešit jenom ve velmi speciálních případech. I bez vyřešení však z rovnice získáváme užitečné informace. Navíc rovnice může být stavebním kamenem složitějšího modelu. Místo slibů konkrétní příklad zase na jiné (ale aktuální) téma.

V článku [A Local and Time Resolution of the COVID-19 Propagation—A Two-Dimensional Approach for Germany Including Diffusion Phenomena to Describe the Spatial Spread of the COVID-19 Pandemic](#) je prostorové šíření epidemie COVID modelováno difuzní rovnicí (1) ve tvaru

$$\frac{\partial c}{\partial t} = q + \nabla \cdot (D \nabla c),$$

což je přesně rovnice, se kterou jsme pracovali zde. Je to rovnice ve své neobecnější formě, aby bylo možno zachytit

- časový vývoj (o ten nám jde),
- nehomogenitu v šíření (například ve městech je jiná rychlost šíření než na venkově) a
- existenci zdrojů (vir se umí množit).

Tato rovnice se řeší pro Německo, což znemožňuje kvůli složité geometrii nalezení analytického přesného řešení. To totiž umíme v prakticky použitelné formě najít jenom pro obdélník a několik málo dalších množin. Proto se tento model řeší numericky. V prvním odstavci podkapitoly 4 článku je numerický model pro jednotlivé spolkové země označen číslem (7) a redukce na soustavu lineárních rovnic (8). V následujícím odstavci je zmíněna Jacobiho metoda pro numerické řešení soustav lineárních rovnic. S touto metodou jsme se setkali v předchozí přednášce o soustavách rovnic.

Model je dokonce možné doplnit dynamikou růstu zahrnující nárůst nejenom vlivem difuze, ale i vlivem množení viru v daném místě. Přesněji, v odstavci 6 odkazovaného článku se model doplňuje rovnicemi (9) až (11) ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dS_j}{dt} &= -\kappa_j \frac{I_j}{N_j} S_j, \\ \frac{dI_j}{dt} &= \kappa_j \frac{I_j}{N_j} S_j - \eta_j I_j, \\ \frac{dR_j}{dt} &= \eta_j I_j. \end{aligned}$$

Toto jsou již naši staří známí ze světa derivací funkce jedné proměnné. Například první rovnice vyjadřuje, že počet S_j lidí zdravých a náchylných k onemocnění COVID19 ve spolkové zemi s indexem j se snižuje rychlostí přímo úměrnou současně množství náchylných lidí a množství I_j infikovaných lidí a nepřímo úměrnou celkové velikosti populace v této

zemi N_j . Konstanta úměrnosti je κ_j a abychom se mohli spolehnout na to, že tato konstanta je kladná, je úbytek skupiny dosud zdravých lidí zachycen záporným znaménkem na pravé straně rovnice. Podobně je možné interpretovat další rovnice, je to vlastně klasický **SIR model epidemie**. Prolistujete si výše odkazovaný anglický článek o modelování epidemie v Německu a všimněte si, že se nic ručně nemusí počítat. Rovnice se nasimulují v počítači a člověk jenom plní ty úlohy, které počítače neumí a nikdy umět nemůžou: sestaví model na základě své představy o fungování procesu a poté interpretuje výstup ze simulace.

Kapitola 11

Dvojný integrál

Motivace

V praxi pracujeme s řadou veličin, které se počítají tak, že se parametr systému násobí obsahem.

- Z plošné hustoty a obsahu násobením obdržíme hmotnost.
- Z hloubky nádrže a obsahu obdržíme násobením objem.
- Z tlaku a obsahu obdržíme násobením tlakovou sílu.

Je však otázka, jak tento přístup použít v případě, že daný parametr není po celé ploše na které je rozložen konstantní. Deska může být nehomogenní, nádrž nemusí mít vodorovné dno a ponořená deska nemusí mít všechny své části ve stejné hloubce.

Řešení této nesnáze je použití dvojného integrálu, který si nyní představíme.

Dvojný integrál

Uvažujme plošný materiál (desku) s danou plošnou hustotou. Budeme se snažit vypočítat hmotnost.

- Pokud je deska homogenní, je její (plošná) hustota desky konstantní a její hmotnost je možno získat jednoduše jako součin této hustoty a obsahu.
- Pokud deska není homogenní, ale skládá se z konečného počtu homogenních kousků, určíme postupem z minulého bodu hmotnost každého kousku a tyto hmotnosti poté sečteme.
- Zbývá případ, kdy je hustota dána nějakou obecnou funkcí. Pokud se hustota desky mění a v obecném bodě (x, y) je dána funkcí $f(x, y)$, můžeme myšlenkově rozdělit desku na malé kousky, v rámci každého malého kousku hustotu aproximovat konstantou a postupovat jako u desky z konečného počtu (malých) homogenních částí.
- Získaná veličina je aproximací celkové hmotnosti. Pro jemnější dělení se přesnost aproximace zlepšuje.

V limitním přechodu kdy rozměry všech kousků na něž je deska dělena jde k nule dostáváme **dvojný integrál**

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy,$$

kde Ω je oblast v rovině (x, y) definovaná uvažovanou deskou. V aplikacích je častý též zápis

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dA$$

nebo

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dS.$$

Linearita a aditivita

Dvojný integrál je odvozen (tak jako všechny integrály) pro aditivní veličiny a proto se “dobře snáší” se sčítáním (ať už integrovaných funkcí, nebo integračních oborů) a s násobením integrované funkce konstantou. Přesněji, platí následující věty.

Věta (linearita dvojného integrálu). *Bud' f_1, f_2 funkce integrovatelné v Ω a c_1, c_2 libovolná reálná čísla. Platí*

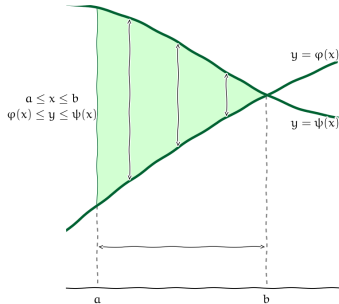
$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} [c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y)] dx dy \\ = c_1 \iint_{\Omega} f_1(x, y) dx dy + c_2 \iint_{\Omega} f_2(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Věta (aditivita vzhledem k oboru integrace). *Nechť je množina Ω rozdělena na dvě oblasti Ω_1 a Ω_2 , které mají společné nejvýše hraniční body. Platí*

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy + \iint_{\Omega_2} f(x, y) dx dy.$$

Výpočet

Výpočet pro oblast mezi funkcemi proměnné x



Obrázek 11.1: Oblast mezi funkcemi proměnné x .

V závislosti na tom, jakými nerovnostmi množinu Ω definujeme, můžeme pro výpočet dvojného integrálu použít následující věty. Tyto věty udávají, jak je možno dvojný integrál přepsat jako dvojnásobný integrál. Mají název **Fubiniovy věty**.

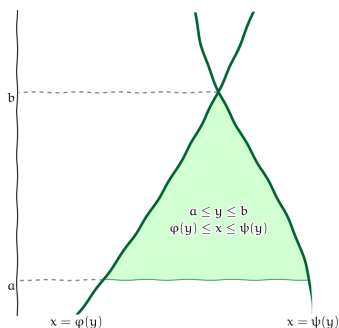
Věta (Fubiniova věta). *Nechť f je funkce spojitá v uzavřené oblasti*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ a } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Potom

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Výpočet pro oblast mezi funkcemi proměnné y



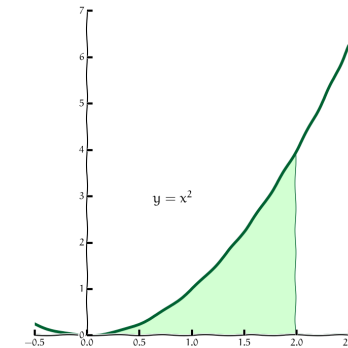
Obrázek 11.2: Oblast mezi funkcemi proměnné y .

Věta (Fubiniova věta pro jiné pořadí integrace). *Nechť f je funkce spojitá v uzavřené oblasti*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b \text{ a } \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}.$$

Potom

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$



Obrázek 11.3: Oblast, pro kterou jsou možná obě pořadí integrace.

Problematika záměny pořadí integrace

Často je možné oblast integrace zapsat pomocí obou možností uvedených na předchozích slidech. Například oblast na obrázku je možno zapsat buď jako

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 2 \\ 0 &\leq y \leq x^2 \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq 4 \\ \sqrt{y} &\leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Pro integrál funkce $f(x, y)$ přes takovou množinu tedy máme dvě alternativy:

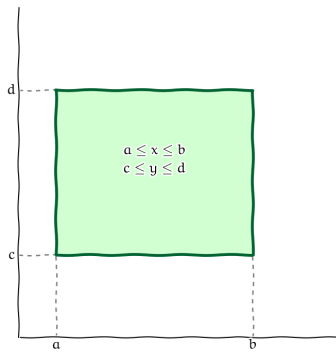
$$\int_0^2 \int_0^{x^2} f(x, y) dy dx$$

a

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx dy.$$

Všimněte si, že nestačí prosté prohození integrálů. Je nutno přepočítávat meze a hraniční křivky je nutno vyjádřit jednou jako funkce proměnné x a jednou jako funkce proměnné y . V důsledku tohoto dochází v průběhu výpočtu dvěma různými způsoby k tomu, že pracujeme se dvěma různými integrály. Výsledky jsou stejné, nemusí však být dosažitelné srovnatelnou námahou, jedna z cest může být snazší.

Výpočet pro obdélníkovou oblast



Obrázek 11.4: Integrál přes obdélník.

Výše uvedené problémy se stanovením a případným přepočítáváním mezí při záměně pořadí integrace se nevyskytují při integrování přes obdélníkovou oblast.

Věta (Fubiniova věta na obdélníku). Necht $R = [a, b] \times [c, d]$ je uzavřený obdélník v \mathbb{R}^2 a f funkce definovaná a spojitá na R . Pak platí

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \end{aligned}$$

Platí-li dokonce rovnost $f(x, y) = g(x)h(y)$, pak

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy.$$

Aplikace dvojného integrálu

Matematické aplikace dvojného integrálu

- **Obsah** $\mu(\Omega)$ množiny Ω vypočteme jako integrál

$$\mu(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy.$$

- **Integrální střední hodnota** funkce $f(x, y)$ definované na množině Ω je

$$\frac{\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy}{\mu(\Omega)},$$

kde $\mu(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy$ je obsah množiny Ω .

Fyzikální aplikace dvojného integrálu

- **Hmotnost** množiny M je

$$m = \iint_M \sigma(x, y) dx dy,$$

kde $\sigma(x, y)$ je **plošná hustota** (hmotnost vztažená na jednotku povrchu).

- **Lineární momenty** hmotné množiny M vzhledem k osám y a x jsou rovny

$$\iint_M x \sigma(x, y) dx dy$$

a

$$\iint_M y \sigma(x, y) dx dy.$$

- **Moment setrvačnosti** hmotné množiny M vzhledem k ose je

$$J = \iint_M \rho^2(x, y) \sigma(x, y) dx dy,$$

kde $\rho(x, y)$ je vzdálenost bodu (x, y) od osy otáčení. Například pro osu x je $\rho(x, y) = y$ a pro osu y je $\rho(x, y) = x$. Pro osu procházející kolmo počátkem je $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Technické aplikace dvojného integrálu

- **Souřadnice těžiště** množiny jsou podílem lineárních momentů a celkové hmotnosti množiny.
- **Kvadratický moment průřezu** (což je moment setrvačnosti pro $\sigma(x, y) = 1$, anglicky *second moment of area*) je veličina, která hraje podstatnou roli v mechanice (nábytek, stavby) při dimenzování (polic, nosných tyčí, nosníků).
- V technické praxi zpravidla neuvažujeme nekonstantní plošnou hustotu. Potom je možné je bez újmy na obecnosti nahradit jedničkou. Vzorce pro obsah, x -ovou souřadnici těžiště (x_0), y -ovou souřadnici těžiště (y_0), kvadratický moment vzhledem k ose x (I_x) a kvadratický moment vzhledem k ose y (I_y) (pro množinu M s plošnou hustotou 1) jsou

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{S} \iint_M x dx dy, & I_x &= \iint_M y^2 dx dy, \\ y_0 &= \frac{1}{S} \iint_M y dx dy, & I_y &= \iint_M x^2 dx dy, \end{aligned}$$

kde $S = \mu(M)$ je obsah množiny M . Poloha těžiště je tedy střední hodnotou funkcí x a y .

Praktické aplikace dvojného integrálu - tuhost nosníků, stabilita stromů

Tuhost (odolnost vůči deformaci) pro nosník obdélníkového průřezu o výšce b a šířce a je dána kvadratickým momentem obdélníkového průřezu vzhledem k vodorovné ose procházející těžištěm.

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]} y^2 \, dx dy \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \, dy = a \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{12} ab^3 \end{aligned}$$

Odsud máme okamžitě několik pozorování

- Pokud šířka vzroste dvakrát, tuhost vzroste také dvakrát. Pokud ale dvakrát vzroste výška, tuhost vzroste dokonce osmkrát. Pro nosník s poměrem stran 1:2 je poměr tuhostí při poloze naplacato a nastojato roven 1:4.
- Pro nosník čtvercového průřezu ($a = b$) roste tuhost se čtvrtou mocninou rozměrů. Obsah (a tedy i hmotnost) roste s druhou mocninou. Pokud tedy u nosníku se čtvercovým průřezem zdvojnásobíme množství materiálu, tuhost vzroste čtyřnásobně. Toto si můžeme představit tak, že jsme původní nosník obalili trubkou vyrobenou ze stejného množství materiálu. Protože společná tuhost je čtyřnásobná, znamená to, že přidaná trubka má trojnásobnou tuhost než původní tyč. Proto se v konstrukcích nepoužívají tyče, ale trubky nebo analogické struktury (I-čka apod). I příroda zná tyto zákonitosti a kosti tvořící opěrný aparát živočichů jsou trubkovitého tvaru.
- Pro čtvercový průřez roste tuhost se čtvrtou mocninou délky strany

$$I_x = \frac{1}{12} a^4.$$

Stejná závislost (přímá úměrnost mezi kvadratickým momentem a čtvrtou mocninou rozměru) musí být u každého průřezu jednoparametrického tvaru, například pro kruh. To plyne například z věty nazývané **Buckinghamův II teorém**. Jako aplikaci uvažujme strom modelovaný jako nosník s kruhovým průřezem. Například strom, ve kterém je dutina o velikosti poloviny průměru kmene většinou vyvolá obavy ze stability. I když taková dutina vypadá obrovská, tuhost se sníží o původní tuhost vynásobenou koeficientem

$$(0.5)^4 = 0.0625 \approx 6\%.$$

Vidíme, že i s hrozně vypadající dutinou má kmen pořád tuhost 94% původní tuhosti (za předpokladu dutiny uprostřed kmene). Z hlubšího fyzikálního rozboru, který je nyní nad rámec našeho popisu, pevnost roste jenom s třetí mocninou a proto odolnost vůči zlomení klesne o něco více než tuhost.

Aplikace dvojného integrálu - těžiště složeného obrazce

Uvažujme množinu M s jednotkovou plošnou hustotou, rozdělenou na dvě disjunktní části M_1 a M_2 . Tyto množiny mají x -ovou polohu těžiště v bodě

$$x_{0i} = \frac{1}{S_i} \iint_{M_i} x \, dx dy, \quad S_i = \iint_{M_i} dx dy, \quad i = 1, 2.$$

Poloha těžiště není aditivní veličinou. Dvojný integrál však aditivní veličinou je. Platí

$$\begin{aligned} \iint_M x \, dx dy &= \iint_{M_1} x \, dx dy + \iint_{M_2} x \, dx dy \\ &= S_1 x_{01} + S_2 x_{02} \end{aligned}$$

a těžiště množiny M je

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{S_1 + S_2} \iint_M x \, dx dy \\ &= \frac{1}{S_1 + S_2} (S_1 x_{01} + S_2 x_{02}) \\ &= \frac{S_1 x_{01} + S_2 x_{02}}{S_1 + S_2}. \end{aligned}$$

Totéž je možné provést pro y -ovou souřadnici, nebo pro libovolný konečný počet částí. Podobně je možné odvodit vzorec s obecnou nekonstantní plošnou hustotou. Poloha těžiště složeného obrazce je tedy *váženým průměrem* těžišť jednotlivých složek, kde váha každé složky je určena její hmotností. Protože se jedná o vážený průměr, tj. vlastně o lineární kombinaci bodů, kdy součet koeficientů je roven jedné, okamžitě vidíme, že těžiště složeného obrazce je na úsečce mezi těžišti jednotlivých částí.

Zobecnění výše uvedených myšlenek na množinu rozdělenou na více částí je již snadné.

Aplikace dvojného integrálu - Steinerova věta

Nechť je dána množina M s plošnou hustotou $\sigma(x, y)$. Ukážeme, že vzhledem k ose procházející těžištěm je nejmenší moment setrvačnosti. Ukážeme si dále, že pomocí momentu setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm je možné vyjádřit momenty setrvačnosti i k libovolným rovnoběžným osám. Pro jednotkovou plošnou hustotu dostáváme jako speciální případ vzorce pro kvadratický moment, důležité ve statice.

$$\begin{aligned} \text{Nechť } m &= \iint \sigma(x, y) \, dx dy, \quad y_0 = \frac{1}{m} \iint_M y \sigma(x, y) \, dx dy \\ \text{a } I_{xT} &= \iint_M (y - y_0)^2 \sigma(x, y) \, dx dy \text{ jsou hmotnost, } y\text{-ová} \end{aligned}$$

poloha těžiště a moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm rovnoběžně s osou x . Moment setrvačnosti vzhledem k ose x je

$$I_{x0} = \iint_M y^2 \sigma(x, y) \, dx dy.$$

Platí (píšeme zkráceně σ místo $\sigma(x, y)$)

$$\begin{aligned} I_{xT} &= \iint_M (y - y_0)^2 \sigma \, dx dy \\ &= \iint_M (y^2 - 2yy_0 + y_0^2) \sigma \, dx dy \\ &= \iint_M y^2 \sigma \, dx dy - 2y_0 \iint_M y \sigma \, dx dy + y_0^2 \iint_M \sigma \, dx dy \\ &= I_{x0} - 2y_0 m y_0 + y_0^2 m \\ &= I_{x0} - m y_0^2. \end{aligned}$$

Odsud dostáváme

$$I_{x0} = I_{xT} + m y_0^2,$$

což lze interpretovat tak, že *moment setrvačnosti vzhledem k ose o je součtem momentu setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm rovnoběžně s o a momentu setrvačnosti hmotného bodu ležícího v těžišti množiny a o stejné hmotnosti jako je hmotnost množiny vzhledem k ose o.*

Aplikace dvojného integrálu - tlak na svislou plochu

Vzorec pro tlakovou sílu $F = pS$ není možné použít například pro výpočet celkové síly působící na svislou stěnu nebo hráz, protože tlak p se mění s hloubkou a není tedy konstantní na celém průřezu o obsahu S . Pro obdélníkovou stěnu jsme úlohu vyřešili (viz **Mojžíšův most**) pomocí integrálu, pro stěnu obecného tvaru použijeme integrál dvojný.

Uvažujme svislou rovinnou hráz M . Hrází je přitom myšlena rovinná množina s jednotkovou plošnou hustotou, ne postavený trojrozměrný objekt. Počátek kartézské soustavy souřadnic volíme u hladiny, osa y směřuje dolů, osa x vodorovně. Tlak v hloubce y je roven $p = y\rho g$, kde ρ je hustota vody a g tíhové zrychlení. Na plochu o rozměrech ΔS v hloubce y působí tlaková síla

$$\Delta F = y\rho g \Delta S.$$

Tato tlaková síla má ve všech bodech hráze stejný směr a celkovou sílu na hráz je možno zjistit sečtením sil v jednotlivých bodech. Podobná myšlenková úvaha jako v úvodu pro hmotnost desky, nebo přesný matematický popis, nás dovedou k tomu, že celková síla na hráz je dána integrálem

$$F = \iint_M y\rho g \, dx dy.$$

Protože g a ρ jsou konstanty, je možno psát

$$F = \rho g \iint_M y \, dx dy.$$

Využijeme-li vzorec pro y -ovou souřadnici těžiště, má výsledný vztah tvar

$$F = \rho g y_0 S,$$

kde S je obsah hráze. Formálně tento vztah odpovídá vzorci

$$F = p_0 S, \quad (\text{H1})$$

kde $p_0 = \rho g y_0$ je tlak v těžišti. *Proto v praxi stačí znát těžiště hráze a pro výpočet síly na hráz použít celkovou plochu hráze a tlak v těžišti.* Protože jsme pracovali s obecnou množinou M , není tento poznatek nijak vázán na konkrétní tvar hráze. Musí být však splněna podmínka, že všechny body hráze leží v jedné rovině.

Ve výpočtu výše jsme uvažovali svislou rovinu, ale zobecnění na šikmou rovinu je snadné. Stačí opravit vztah pro hloubku, protože když svislou množinu i s kartézskými souřadnicemi pootočíme okolo osy procházející hladinou, hloubka všech bodů se sníží faktorem $\sin \alpha$, kde α je úhel mezi vodorovnou hladinou a rovinou hráze. Formálně tato operace dopadne stejně, jako kdybychom tekutinu nahradili tekutinou s hustotou $\sin \alpha$ -krát nižší. Protože však vztah (H1) nezávisí na hustotě, nic se na něm nezmění. Také zobecnění na několik rovin je snadné. Zobecnění na zakřivenou plochu je náročnější a vyžaduje jiný typ integrálu.

V předchozím textu jsme proměnnou veličinu popisující tlak na hráz jako funkci hloubky nahradili konstantní veličinou, udávající tlak v těžišti. Výsledný účinek na hráz se nezměnil. To je přesně smysl střední hodnoty. V matematických pojmech je možno říci, že střední hodnota tlaku na svislou hráz je rovna tlaku v těžišti hráze. (Protože hrází myslíme spíše rovinnou plochu, tak by přesnější terminologie měla používat raději pojem geometrický střed. Budeme se však držet ustálené terminologie.)

Nikde ve výpočtu jsme nepoužili konkrétní meze pro integraci. Výsledek tedy platí nejenom pro hráz dosahující k hladině, ale například i pro poklop výpusti, který je celý pod vodou.

Aplikace dvojného integrálu - působíště tlakové síly

Budeme pokračovat v předchozím příkladě a hledat působíště výsledné tlakové síly.

Tlaková síla působící na svislou hráz má celkový nulový moment vzhledem k ose procházející působíštěm. Je-li hráz definována množinou M a je-li y_c působíště výsledné tlakové síly, je v hloubce y tlak na plošku o velikosti ΔS roven $y\rho g \Delta S$ a součin $(y_c - y)y\rho g \Delta S$ je příspěvek k otáčivému

momentu vzhledem k ose, procházející vodorovně působícím tlakové síly. Součet všech těchto příspěvků se nuluje, tedy musí platit

$$\iint_M (y_c - y)y\rho g \, dx dy = 0.$$

Odsud po vydělení konstantami ρg dostáváme

$$\iint_M (y_c - y)y \, dx dy = 0$$

a po roznásobení závorky, rozdělení integrálu na dva a vytknutí konstanty

$$y_c \iint_M y \, dx dy = \iint_M y^2 \, dx dy.$$

Nyní již snadno dostaneme výsledný vztah

$$y_c = \frac{\iint_M y^2 \, dx dy}{\iint_M y \, dx dy}. \quad (\text{H2})$$

Pokud je množina M obdélník, je možné ji (po vhodné změně jednotek) brát jako jednotkový čtverec. Protože platí

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} y \, dx dy = \frac{1}{2}, \quad \iint_{[0,1] \times [0,1]} y^2 \, dx dy = \frac{1}{3},$$

dostáváme $y_c = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ a působíště na obdélníkovou hráz je v hloubce odpovídající dvěma třetinám celkové hloubky.

Formálně vztah pro y_c odpovídá vztahu pro těžiště množiny s plošnou hustotou y . Na tomto pozorování a na skutečnosti, že u pravidelných množin umíme těžiště najít geometricky, je založena metoda nalezení působíště tlakové síly pomocí **zatěžovacího obrazce**.

Kvadratický moment v čitateli zlomku (H2) vyjadřujícího y_c je často výhodnější rozepsat pomocí Steinerovy věty. Ve jmenovateli je součin obsahu S a y -ové souřadnice těžiště y_0 . Tím dostaneme

$$y_c = \frac{I_{x0} + S y_0^2}{S y_0} = \frac{I_{x0}}{S y_0} + y_0,$$

kde I_{x0} je kvadratický moment vzhledem k ose procházející vodorovně těžištěm. Působíště tlakové síly y_c je tedy posunuto směrem dolů od těžiště y_0 o hodnotu odpovídající kvadratickému momentu vzhledem k vodorovné ose těžištěm I_{x0} vyděleném součinem obsahu hráže S a y -ové polohy těžiště y_0 .

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Mnoho veličin, které nás zajímají, počítáme jako součin obsahu plochy s nějakou jinou veličinou. Zpravidla

veličina kterou takto počítáme souvisí v objektu jako s celkem a veličina, kterou násobíme s plochou, souvisí se situací v jednom konkrétním místě. Například hmotnost desky z plošného materiálu (vlastnost objektu) je součinem plošné hustoty (charakteristika materiálu) a obsahu. Celková tlaková síla na hráz (vlastnost objektu) je součinem tlaku (vlastnost v daném bodě) a obsahu. Problém však nastane, pokud vlastnosti nejsou všude stejné. Například plošný materiál může mít v různých místech různé vlastnosti, nebo tlak může být v každém místě hráže jiný, protože hráz je napříč více hloubkami. V takových případech je potřeba součin něčím nahradit. Příslušná náhrada je dvojný integrál.

- Vidíte dvojný integrál a potřebujete promyslet, co vyjadřuje? Představte si, že integrovaná veličina je konstantní. Potom se integrál redukuje na součin a ten už zpravidla je snadné vyjádřit slovně. Například dvojný integrál hloubky jezera vypočítaný přes celé jezero. Pro konstantní hloubku se tato veličina redukuje na součin hloubky a obsahu hladiny. To je ale objem jezera. Proto dvojný integrál hloubky jezera vyjadřuje objem vody v jezeře.
- Dvojný integrál počítáme převodem na dvojnásobný integrál, tj. dva integrály, z nichž jeden je uvnitř druhého. V některých situacích (integrál funkce sestavené jako součin funkcí jedné proměnné a počítaný přes obdélník) se dokonce může situace redukovat na součin dvou integrálů funkce jedné proměnné.
- Dvojný integrál je také odpověď na problém, jak sesčítat veličinu rozloženou v ploše (kvadratický moment obrazce, veličina důležitá pro posuzování tuhosti a pevnosti nosníků) nebo jak ji zprůměrovat (integrální střední hodnota funkce dvou proměnných).

Kapitola 12

Vybrané postupy numerické matematiky

Numerické řešení diferenciálních rovnic

Již v prvním týdnu jsme se při zdůraznění role derivace dostali k formulování modelů použitím derivací, k diferenciálním rovnicím. Tyto rovnice je možné pro konkrétní hodnoty parametrů a konkrétní počáteční podmínku řešit numericky.

Následující přehledka znovu připomene některé modely a odkaz za těmito modely vede na interaktivní nástroj pro numerické řešení. Tímto nástrojem můžeme vizualizovat řešení pro různé počáteční podmínky. Pro náročnější práci, jako například vizualizace různých rovnic (například pro různé nastavení parametrů) by bylo nutné použít nějaký neinteraktivní nástroj, kde se ve speciálním jazyce naformuluje model, nastaví parametry, spustí řešič a vykreslí řešení.

- [Model ochlazování kávy](#)

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$$

- [Model růstu populace v prostředí s omezenou nosnou kapacitou](#)

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Neinteraktivní model, který vypočte 1000 řešení pro 1000 kombinací hodnot r a K je [zde](#). Podobné analýzy se dělají, pokud jsou koeficienty v rovnici zatíženy chybou a chceme vědět, jak se tato chyba projevuje na řešení. V takovém případě nestačí “klikací” přístup, ale je možné udělat dostatečný počet simulací s vhodně nastavenými parametry a tyto statisticky vyhodnotit.

- [Model růstu vodní kapky v atmosféře](#)

$$\frac{dV}{dt} = kV^{2/3}$$

- [Model růstu ledu podle Stefanova zákona](#)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k}{h}$$

Všimněte si, že v numerickém modelu je prostým pohledem prakticky nerozlišitelný model růstu vodní kapky od modelu růstu úměrného velikost populace (změňte si mocninu $\frac{2}{3}$ na 1), ale modely se chovají principiálně zcela jinak, protože v jednom je zaručena jednoznačnost řešení a ve druhém je tato jednoznačnost porušena. Dále si všimněte, že model růstu ledu má při prodlužování řešení zpět v čase evidentně problémy s nulou ve jmenovateli. Abychom různé parazitní výstupy numerických algoritmů jako je zde dokázali odchytnout a eliminovat, nestačí “umět rovnici naklikat do programu”, ale znalost teorie a kvalitativních vlastností řešení je téměř nezbytná pro jakoukoliv závažnější práci.

Numerické řešení diferenciálních rovnic ve 2D a 3D

Pokud máme v zásobě zkušenosti s modelováním diferenciálních rovnic, můžeme se pustit do odvážnějších aplikací, jako třeba následující modely.

Konkurence dvou populací

Dynamika rozvoje jedné populace může být ovlivněna přítomností druhé populace. Například pokud se dvě populace navzájem brzdí v růstu, je vhodným modelem soustava rovnic

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= r_x x \left(1 - \frac{x}{K_x} - ay\right), \\ \frac{dy}{dt} &= r_y y \left(1 - \frac{y}{K_y} - bx\right).\end{aligned}$$

V chování této soustavy je možno podle nastavení parametrů pozorovat všechny možné situace pozorované v přírodě, což zahrnuje dominanci jednoho z druhů, slabou konkurenci druhů nebo silnou konkurenci druhů. Více viz učebnice z populační ekologie.

[Model](#)

Model dravce a kořisti

Dynamika rozvoje interagujících populací dravce a kořisti může být vyjádřena Lotkovým Volterrovým modelem

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} &= cxy - dy.\end{aligned}$$

V chování této soustavy je možno pozorovat oscilace obou populací přesně tak, jako to vidáme v přírodě. Další pozorované situace model nevysvětluje, protože je jednoduchý. Jedná se však o základní stavební kámen, který je možno dále zpřesňovat a modelovat situaci blíže konkrétní aplikaci.

Model

Model epidemie

Populaci rozdělíme na tři skupiny.

- Skupina S (**angl. susceptible**) obsahuje tu část populace, které je náchylná k onemocnění. Tito jedinci netrpí chorobou, mohou však být infikováni při styku s nemocnými.
- Skupina I (**angl. infected**) obsahuje část populace tvořenou infikovanými jedinci. Tito jedinci vykazují známky onemocnění a rozšiřují nemoc mezi členy skupiny S.
- Skupina R (**angl. removed**) obsahuje tu část populace, která je tvořena jedinci, kteří byli dříve infikováni, ale nyní již nemohou šířit chorobu.

Velikosti skupin S, I a R budeme označovat S , I a R . Předpoklady, že počet osob které onemocní za jednotku času souvisí s počtem náchylných a infikovaných a že počet osob, které jsou izolovány souvisí s počtem infikovaných vede k soustavě diferenciálních rovnic (Kermack-McKendrick(1927))

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \beta I, \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I\end{aligned}$$

Matematicky je možno chování modelu studovat i bez explicitní formulace diferenciálních rovnic, pouze využitím takzvaného kompartmentového modelu. Tímto způsobem je možno relativně snadno přidávat do modelu skupinu nepřiznakových, vakcinovaných, skupinu v inkubační době a podobně.

Model

Nondimensionalizace a bezrozměrné veličiny

Rovnice vedení tepla v jedné dimenzi (prostup tepla stěnou, vedení tepla tyčí) má tvar (viz minulá přednáška)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial T}{\partial x} \right),$$

kde $T(x, t)$ je teplota v místě x a čase t , ρ je hustota, c je měrná tepelná kapacita, D je teplotní vodivost. Pro homogenní stěnu nebo tyč a lineární materiálovou odezvu je D konstanta a můžeme ji vytknout z derivace na pravé straně a psát

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Pro úplnou formulaci úlohy na nalezení teploty v jednotlivých místech stěny musíme zadat polohu stěny, teplotu na vnějším a vnitřním okraji stěny a počáteční rozložení teploty ve stěně. Nechť tedy okraje jsou $x = 0$ a $x = L$, a teploty na okrajích a počáteční rozložení teploty jsou

$$\begin{aligned}T(0, t) &= T_0 \\ T(L, t) &= T_1 \\ T(x, 0) &= f(x)\end{aligned}$$

Analogicky jako u obdobného příkladu s chladnutím tělesa podle Newtonova zákona (viz přednáška o diferenciálních rovnicích) zavedeme bezrozměrnou teplotu tak, aby se podmínky na okrajích redukovaly na konstanty. Zavedeme-li bezrozměrnou teplotu

$$\xi(x, t) = \frac{T(x, t) - T_0}{T_1 - T_0}$$

a bezrozměrnou vzdálenost $\mu = \frac{x}{L}$, redukuje se model podle stejných pravidel, jaká jsme poznali u obyčejných rovnic, na

$$\begin{aligned}\rho c \frac{\partial \xi}{\partial t} &= D \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mu^2}, \\ \xi(0, t) &= 0, \\ \xi(1, t) &= 1, \\ \xi(\mu, 0) &= f_\xi(\mu),\end{aligned}$$

kde $f_\xi(\mu)$ je počáteční rozložení teploty transformované do nových veličin. Přepíšeme-li rovnici na tvar

$$\frac{1}{L^2 \rho c} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mu^2},$$

vidíme, že zavedení bezrozměrného času vztahem $\tau = \frac{Dt}{\rho c L^2}$ redukuje úlohu z původního tvaru (kde každý člen má svůj

fyzikální význam a přímou interpretaci)

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \\ T(0, t) &= T_0, \\ T(L, t) &= T_1, \\ T(x, t) &= f(x), \end{aligned}$$

na tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mu^2}, \\ \xi(0, \tau) &= 0, \\ \xi(1, \tau) &= 1, \\ \xi(\mu, 0) &= f_\xi(\mu), \end{aligned}$$

který je mnohem jednodušší pro následnou numerickou analýzu nebo analytické studium. Mimo jiné je tím ukázáno, že pro danou úlohu nemají podstatný význam jednotlivé veličiny samy o sobě, ale veličina $\tau = \frac{Dt}{\rho c L^2}$, definující bezrozměrný čas. Tato veličina se nazývá Fourierovo číslo. Obdobným postupem získáme jiná čísla důležitá pro popis jiných procesů, jako jsou Biotovo číslo (vedení tepla), Reynoldsovo číslo (proudění tekutin), Froudeho číslo (proudění tekutin) apod. Podobná nondimenzionalizace pro vlhkostní pole ve dřevě je v publikaci Horáček P., Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva. Viz též [eopora](#), rovnice (144) a rovnice následující.

Metoda konečných diferencí

Vraťme se s aparátlem matematického popisu vedení tepla k úloze hledání rozložení teploty na čtvercové desce, kterou jsme představili v přednášce o lineární algebře: Je dána deska čtvercového tvaru, jejíž okraje udržujeme na konstantních teplotách (každý okraj obecně na jiné teplotě) a hledáme rovnovážné rozložení teploty. Dvourozměrná rovnice vedení tepla pro homogenní izotropní desku s materiálovými charakteristikami ρ , c a D má tvar

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Ve stacionárním stavu se teplota nemění s časem a proto je levá strana nulová a rovnice se redukuje na

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Použijeme stejnou myšlenku jako v lineární algebře: rozdělíme desku čtvercovou sítí na malé oblasti a budeme studovat teplotu v bodech této sítě, tj. v rozích jednotlivých čtverců, na které je deska čtvercovou sítí rozdělena.

Z přednášky o derivacích a aproximaci víme, že funkci můžeme aproximovat v okolí námi zvoleného bodu Taylorovým polynomem a v kapitole o diferenciálních rovnicích jsme tuto aproximaci použili pro aproximaci druhé derivace konečnými diferencemi ve tvaru

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)].$$

Podobně pro parciální derivace funkce dvou proměnných $f(x, y)$ dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h^2} [f(x+h, y) - 2f(x, y) + f(x-h, y)] \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &\approx \frac{1}{h^2} [f(x, y+h) - 2f(x, y) + f(x, y-h)] \end{aligned}$$

a odsud

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &\approx \frac{1}{h^2} [f(x+h, y) + f(x-h, y) + f(x, y+h) \\ &\quad + f(x, y-h) - 4f(x, y)]. \end{aligned}$$

Z rovnice

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

popisující rozložení teploty vyplývá, že výraz v hranaté závorce musí být nulový, tj.

$$f(x, y) = \frac{1}{4} [f(x+h, y) + f(x-h, y) + f(x, y+h) + f(x, y-h)].$$

To však znamená, že teplota v každém uzlovém bodě je průměrem teplot v okolních uzlových bodech. Přesně, jak jsme se (možná poněkud naivně) domnívali při představení úlohy v přednášce z lineární algebry. Nyní tento postup stavíme na solidní vědecký základ, založený na rovnici popisující fyzikální proces (rovnice vedení tepla) a na numerické aproximaci, která převede parciální diferenciální rovnici na soustavu lineárních rovnic.

Výše popsaná myšlenka je základem **metody konečných diferencí**. Bohužel je tato metoda poměrně omezená nutností, mít ekvidistantní rozložení uzlů. Proto se v praxi používají vyspělejší metody, metoda konečných prvků nebo metoda konečných objemů. Základní myšlenka je stejná (parciální diferenciální rovnice se převede na soustavu lineárních rovnic) a praktické provedení zpravidla matematicky triviální, protože vše potřebné pro výpočty je předprogramováno v softwaru určenému pro danou úlohu. Máme takto software umožňující simulovat vedení tepla, tepelné úniky, tepelné nebo mechanické namáhání, tok podzemní i povrchové vody a další důležité praktické aplikace. Uživatel jenom zadá geometrii, typ problému a okrajové a počáteční podmínky a program vypočte potřebná řešení a dle požadavků je různým způsobem interpretuje.

Ukázka programu FlexPDE

Existuje široká škála programů pro řešení diferenciálních rovnic. V mnoha jsou předpřipravené modely, předdefinované fyzikální úlohy a někdy dokonce databáze materiálových vlastností. V jiných programech je řešená rovnice plně pod kontrolou autora modelu a je možné snadno řešit i multifyzikální úlohy (například současně modelovat teplotu a vlhkost v materiálu). Zástupce druhé skupiny je FlexPDE firmy **PDE Solutions Inc.** Úloha s rozložením teploty na čtvercové desce se zadanými teplotami na okrajích, na kterou jsme několikrát jako na motivaci narazili v lineární algebře a připomněli na předchozím slidu, by měla následující zápis a výstup.

```
TITLE 'Stacionarni teplota pro ctvercovou desku se zadanou teplc
VARIABLES T
EQUATIONS T: div(grad(T))=0
INITIAL VALUES T=10
```

BOUNDARIES

REGION 1

```
START(0,0) VALUE(T)=30 LINE TO (1,0)
VALUE(T)=40 LINE TO (1,1)
VALUE(T)=20 LINE TO (0,1)
VALUE(T)=10 LINE TO CLOSE
```

PLOTS

```
CONTOUR(T)
```

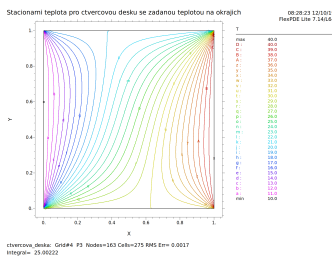
```
SURFACE(T)
```

```
END
```

Rovnice je v popisu modelu zadána jako divergence gradientu, což v kartézských souřadnicích ve 2D vede právě na rovnici

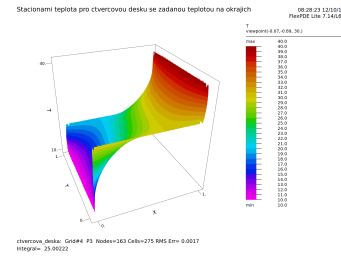
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Jiná forma zápisu je přímo pomocí druhých parciálních derivací ve tvaru $DXX(T)+DYY(T)=0$.

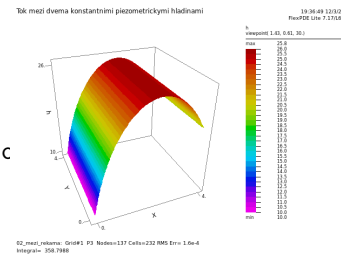


Obrázek 12.1: Teplota znázorněná pomocí izoterm.

Poslední model je model podzemní vody s konstantními piezometrickými hladinami podél dvou rovnoběžných stran (mohou být například dvě řeky) a s rovnoměrně rozloženými zdroji (například nad oblastí jsou rovnoměrné srážky a voda



Obrázek 12.2: Teplota znázorněná pomocí barev a 3D grafu.



Obrázek 12.3: Model podzemní vody mezi rovnoběžnými řekami.

rovnoměrně zasakuje). Řešením modelu vidíme odkud teče voda do které řeky. Tím je možno například usuzovat, kde po případné kontaminaci provádět sanační práce.