Dvojný integrál

Robert Mařík

2019-2021

Motivace

V praxi pracujeme s řadou veličin, které se počítají tak, že se parametr systému násobí obsahem.

- Z plošné hustoty a obsahu násobením obdržíme hmotnost.
- Z hloubky nádrže a obsahu obdržíme násobením objem.
- Z tlaku a obsahu obdržíme násobením tlakovou sílu.

Je však otázka, jak tento přístup použít v případě, že daný parametr není po celé ploše na které je rozložen konstantní. Deska může být nehomogenní, nádrž nemusí mít vodorovné dno a ponořená deska nemusí mít všechny své části ve stejné hloubce.

Řešení této nesnáze je použití dvojného integrálu, který si nyní představíme.

Dvojný integrál

Uvažujme plošný materiál (desku) s danou plošnou hustotou. Budeme se snažit vypočítat hmotnost.

- Pokud je deska homogenní, je její (plošná) hustota desky konstantní a její hmotnost je možno získat jednoduše jako součin této hustoty a obsahu.
- Pokud deska není homogenní, ale skládá se z konečného počtu homogenních kousků, určíme postupem z minulého bodu hmotnost každého kousku a tyto hmotnosti poté sečteme.
- Zbývá případ, kdy je hustota dána nějakou obecnou funkcí. Pokud se hustota desky mění a v obecném bodě (x, y) je dána funkcí $f(x, y)$, můžeme myšlenkově rozdělit desku na malé kousky, v rámci každého malého kousku hustotu aproximovat konstantou a postupovat jako u desky z konečného počtu (malých) homogenních částí.
- Získaná veličina je aproximací celkové hmotnosti. Pro jemnější dělení se přesnost aproximace zlepšuje.

V limitním přechodu kdy rozměry všech kousků na něž je deska dělena jde k nule dostáváme **dvojný integrál**

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde Ω je oblast v rovině (x, y) definovaná uvažovanou deskou. V aplikacích je častý též zápis

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}A$$

nebo

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}S.$$

Linearita a aditivita

Dvojný integrál je odvozen (tak jako všechny integrály) pro aditivní veličiny a proto se “dobře snáší” se sčítáním (ať už integrovaných funkcí, nebo integračních oborů) a s násobení integrované funkce konstantou. Přesněji, platí následující věty.

Věta (linearita dvojného integrálu). *Buď f_1, f_2 funkce integrovatelné v Ω a c_1, c_2 libovolná reálná čísla. Platí*

$$\begin{aligned}&\iint_\Omega [c_1 f_1(x,y)+c_2 f_2(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\quad = c_1\iint_\Omega f_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + c_2\iint_\Omega f_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

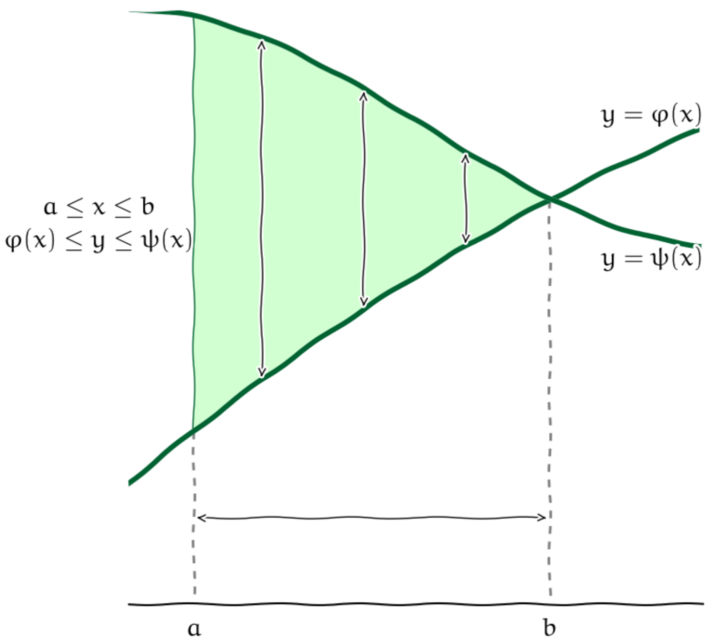
Věta (aditivita vzhledem k oboru integrace). *Nechť je množina Ω rozdělena na dvě oblasti Ω_1 a Ω_2, které mají společné nejvýše hraniční body. Platí*

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Omega_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

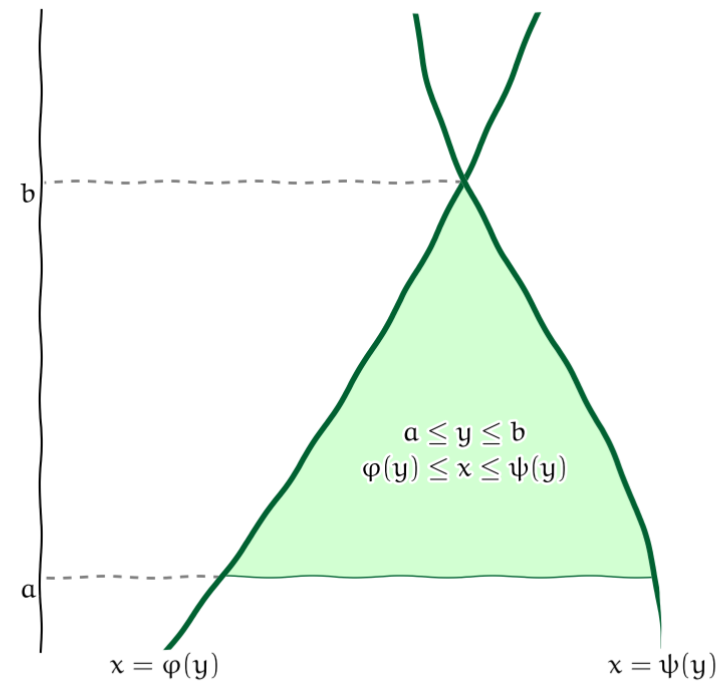
Výpočet

Výpočet pro oblast mezi funkcemi proměnné x

V závislosti na tom, jakými nerovnostmi množinu Ω definujeme, můžeme pro výpočet dvojného integrálu použít následující věty. Tyto věty udávají, jak je možno dvojný integrál přepsat jako dvojnásobný integrál. Mají název **Fubiniovy věty**.



Obrázek 1: *Oblast mezi funkcemi proměnné x.*



Obrázek 2: *Oblast mezi funkcemi proměnné y.*

Věta (Fubiniova věta). *Nechť f je funkce spojitá v uzavřené oblasti*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \text{ a } \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

Potom

$$\iint_\Omega f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x.$$

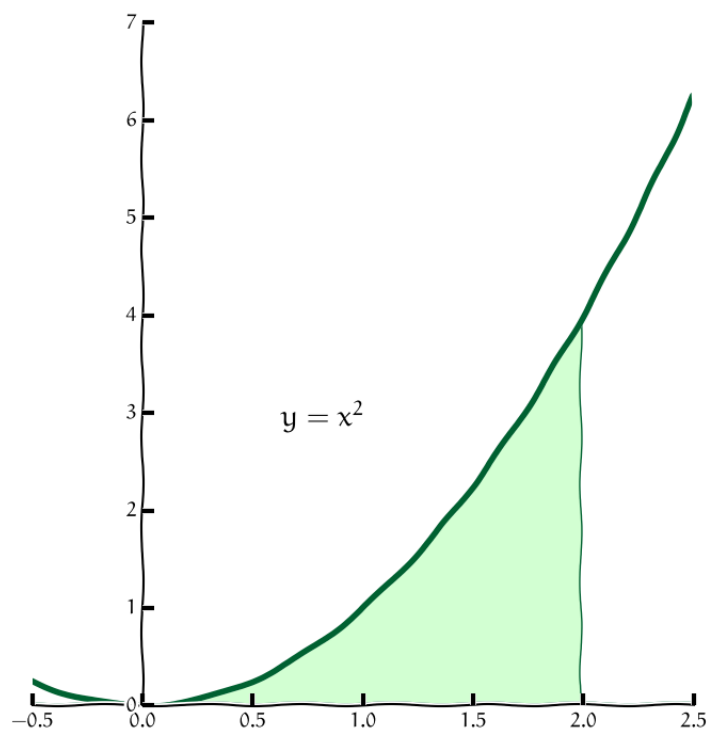
Výpočet pro oblast mezi funkcemi proměnné y

Věta (Fubiniova věta pro jiné pořadí integrace). *Nechť f je funkce spojitá v uzavřené oblasti*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le y \le b \text{ a } \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}.$$

Potom

$$\iint_\Omega f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y.$$



Obrázek 3: *Oblast, pro kterou jsou možná obě pořadí integrace.*

Problematika záměny pořadí integrace

Často je možné oblast integrace zapsat pomocí obou možností uvedených na předchozích slidech. Například oblast na obrázku je možno zapsat buď jako

$$0 \le x \le 2$$
$$0 \le y \le x^2$$

nebo

$$0 \le y \le 4$$
$$\sqrt{y} \le x \le 2.$$

Pro integrál funkce $f(x, y)$ přes takovou množinu tedy máme dvě alternativy:

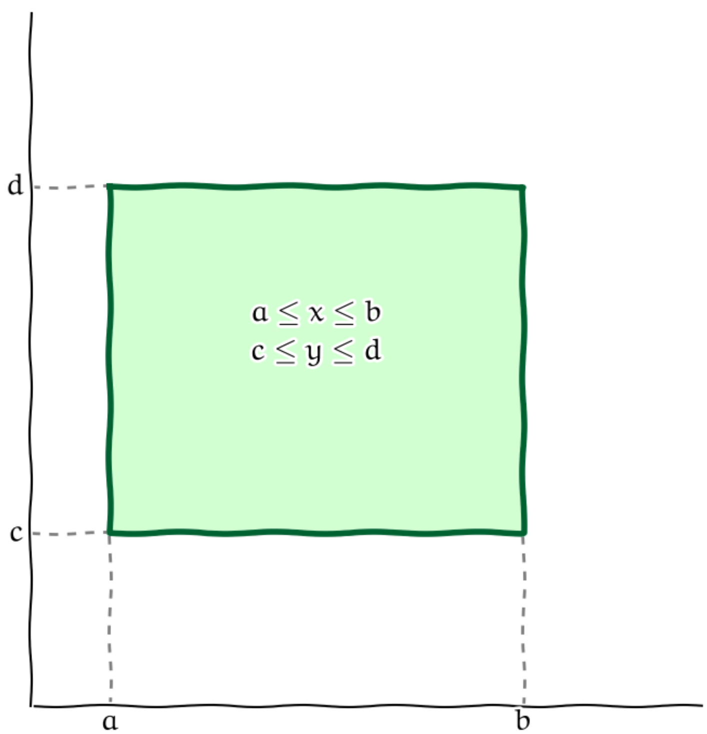
$$\int_0^2 \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

a

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Všimněte si, že nestačí prosté prohození integrálů. Je nutno přepočítávat meze a hraniční křivky je nutno vyjádřit jednou jako funkce proměnné x a jednou jako funkce proměnné y. V důsledku tohoto dochází v průběhu výpočtu dvěma různými způsoby k tomu, že pracujeme se dvěma různými integrály. Výsledky jsou stejné, nemusí však být dosažitelné srovnatelnou námahou, jedna z cest může být snazší.

Výpočet pro obdélníkovou oblast



Obrázek 4: *Integrál přes obdélník.*

Výše uvedené problémy se stanovením a případným přepočítáváním mezí při záměně pořadí integrace se nevyskytují při integrování přes obdélníkovou oblast.

Věta (Fubiniova věta na obdélníku). *Nechť $R = [a, b] \times [c, d]$ je uzavřený obdélník v $\mathbb{R}^2$ a f funkce definovaná a spojitá na R. Pak platí*

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y.$$

Platí-li dokonce rovnost $f(x, y) = g(x)h(y)$, pak

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \int_c^d h(y)\mathrm{d}y.$$

Aplikace dvojného integrálu

Matematické aplikace dvojného integrálu

- **Obsah** $\mu(\Omega)$ množiny Ω vypočteme jako integrál
$$\mu(\Omega) = \iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
- **Integrální střední hodnota** funkce $f(x, y)$ definované na množině Ω je
$$\frac{\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\mu(\Omega)},$$
kde $\mu(\Omega) = \iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ je obsah množiny Ω.

Fyzikální aplikace dvojného integrálu

- **Hmotnost** množiny M je
$$m = \iint_M \sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
kde $\sigma(x, y)$ je **plošná hustota** (hmotnost vztažená na jednotku povrchu).
- **Lineární momenty** hmotné množiny M vzhledem k osám y a x jsou rovny
$$\iint_M x\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
a
$$\iint_M y\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- **Moment setrvačnosti** hmotné množiny M vzhledem k ose je
$$J = \iint_M \rho^2(x,y)\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
kde $\rho(x,y)$ je vzdálenost bodu (x,y) od osy otáčení. Například pro osu x je $\rho(x,y) = y$ a pro osu y je $\rho(x,y) = x$. Pro osu procházející kolmo počátkem je $\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Techniké aplikace dvojného integrálu

- **Souřadnice těžiště** množiny jsou podílem lineárních momentů a celkové hmotnosti množiny.
- **Kvadratický moment průřezu** (což je moment setrvačnosti pro $\sigma(x,y) = 1$, anglicky *second moment of area*) je veličina, která hraje podstatnou roli v mechanice (nábytek, stavby) při dimenzování (polic, nosných tyčí, nosníků).
- V technické praxi zpravidla neuvažujeme nekonstantní plošnou hustotu. Potom je možné je bez újmy na obecnosti nahradit jedničkou. Vzorce pro obsah, x-ovou souřadnici těžiště (x_0), y-ovou souřadnici těžiště (y_0), kvadratický moment vzhledem k ose x (I_x) a kvadratický moment vzhledem k ose y (I_y) (pro množinu M s plošnou hustotou 1) jsou
$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{S}\iint_M x\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & I_x &= \iint_M y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\\ y_0 &= \frac{1}{S}\iint_M y\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & I_y &= \iint_M x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$
kde $S = \mu(M)$ je obsah množiny M. Poloha těžiště je tedy střední hodnotou funkcí x a y.

Praktické aplikace dvojného integrálu - tuhost nosníků, stabilita stromů

Tuhost (odolnost vůči deformaci) pro nosník obdélníkového průřezu o výšce b a šířce a je dána kvadratickým momentem obdélníkového průřezu vzhledem k vodorovné ose procházející těžištěm.

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{\left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right]\times\left[-\frac{b}{2},\frac{b}{2}\right]} y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2\,\mathrm{d}y = a\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{12}ab^3\end{aligned}$$

Odsud máme okamžitě několik pozorování

- Pokud šířka vzroste dvakrát, tuhost vzroste také dvakrát. Pokud ale dvakrát vzroste výška, tuhost vzroste dokonce osmkrát. Pro nosník s poměrem stran 1:2 je poměr tuhostí při poloze naplacato a nastojato roven 1:4.
- Pro nosník čtvercového průřezu ($a = b$) roste tuhost se čtvrtou mocninou rozměrů. Obsah (a tedy i hmotnost) roste s druhou mocninou. Pokud tedy u nosníku se čtvercovým průřezem zdvojnásobíme množství materiálu, tuhost vzroste čtyřnásobně. Toto si můžeme představit tak, že jsme původní nosník obalili trubkou vyrobenou ze stejného množství materiálu. Protože společná tuhost je čtyřnásobná, znamená to, že přidaná trubka má trojnásobnou tuhost než původní tyč. Proto se v konstrukcích nepoužívají tyče, ale trubky nebo analogické struktury (I-čka apod). I příroda zná tyto zákonitosti a kosti tvořící opěrný aparát živočichů jsou trubkovitého tvaru.
- Pro čtvercový průřez roste tuhost se čtvrtou mocninou délky strany
$$I_x = \frac{1}{12}a^4.$$
Stejná závislost (přímá úměrnost mezi kvadratickým momentem a čtvrtou mocninou rozměru) musí být u každého průřezu jednoparametrického tvaru, například pro kruh. To plyne například z věty nazývané Buckinghamův Π teorém. Jako aplikaci uvažujme strom modelovaný jako nosník s kruhovým průřezem. Například strom, ve kterém je dutina o velikosti poloviny průměru kmene většinou vyvolá obavy ze stability. I když taková dutina vypadá obrovská, tuhost se sníží o původní tuhost vynásobenou koeficientem
$$(0.5)^4 = 0.0625 \approx 6\%.$$
Vidíme, že i s hrozivě vypadající dutinou má kmen pořád tuhost 94% původní tuhosti (za předpokladu dutiny uprostřed kmene). Z hlubšího fyzikálního rozboru, který je nyní nad rámec našeho popisu, pevnost roste jenom s třetí mocninou a proto odolnost vůči zlomení klesne o něco více než tuhost.

Aplikace dvojného integrálu - těžiště složeného obrazce

Uvažujme množinu M s jednotkovou plošnou hustotou, rozdělenou na dvě disjunktní části M_1 a M_2. Tyto množiny mají x-ovou polohu těžiště v bodě

$$x_{0i} = \frac{1}{S_i}\iint_{M_i} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad S_i = \iint_{M_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad i = 1,2.$$

Poloha těžiště není aditivní veličinou. Dvojný integrál však aditivní veličinou je. Platí

$$\begin{aligned}\iint_M x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{M_1} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{M_2} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= S_1x_{01} + S_2x_{02}\end{aligned}$$

a těžiště množiny M je

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{S_1+S_2}\iint_M x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{S_1+S_2}(S_1x_{01}+S_2x_{02}) \\ &= \frac{S_1x_{01}+S_2x_{02}}{S_1+S_2}. \end{aligned}$$

Totéž je možné provést pro y-ovou souřadnici, nebo pro libovolný konečný počet částí. Podobně je možné odvodit vzorec s obecnou nekonstantní plošnou hustotou. Poloha těžiště složeného obrazce je tedy *váženým průměrem* těžišť jednotlivých složek, kde váha každé složky je určena její hmotností. Protože se jedná o vážený průměr, tj. vlastně o lineární kombinaci bodů, kdy součet koeficientů je roven jedné, okamžitě vidíme, že těžiště složeného obrazce je na úsečce mezi těžišťmi jednotlivých částí.

Zobecnění výše uvedených myšlenek na množinu rozdělenou na více částí je již snadné.

Aplikace dvojného integrálu - Steinerova věta

Nechť je dána množina M s plošnou hustotou $\sigma(x,y)$. *Ukážeme, že vzhledem k ose procházející těžištěm je nejmenší moment setrvačnosti.* Ukážeme si dále, že pomocí momentu setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm je možné vyjádřit momenty setrvačnosti i k libovolným rovnoběžným osám. Pro jednotkovou plošnou hustotu dostáváme jako speciální případ vzorce pro kvadratický moment, důležité ve statice.

Nechť $m = \iint \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $y_0 = \frac{1}{m}\iint_M y\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a $I_{xT} = \iint_M (y-y_0)^2\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ jsou hmotnost, y-ová poloha těžiště a moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm rovnoběžně s osou x. Moment setrvačnosti vhledem k ose x je

$$I_{x0} = \iint y^2\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Platí (píšeme zkráceně σ místo $\sigma(x,y)$)

$$\begin{aligned} I_{xT} &= \iint_M (y-y_0)^2\sigma\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_M (y^2-2yy_0+y_0^2)\sigma\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_M y^2\sigma\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2y_0\iint_M y\sigma\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + y_0^2\iint_M \sigma\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= I_{x0} - 2y_0my_0 + y_0^2m \\ &= I_{x0} - my_0^2. \end{aligned}$$

Odsud dostáváme

$$I_{x0} = I_{xT} + my_0^2,$$

což lze interpretovat tak, že *moment setrvačnosti vhledem k ose o je součtem momentu setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm rovnoběžně s o a momentu setrvačnosti hmotného bodu ležícího v těžišti množiny a o stejné hmotnosti jako je hmotnost množiny vzhledem k ose o.*

Aplikace dvojného integrálu - tlak na svislou plochu

Vzorec pro tlakovou sílu $F = pS$ není možné použít například pro výpočet celkové síly působící na svislou stěnu nebo hráz, protože tlak p se mění s hloubkou a není tedy konstantní na celém průřezu o obsahu S. Pro obdélníkovou stěnu jsme úlohu vyřešili (viz Mojžíšův most) pomocí integrálu, pro stěnu obecného tvaru použijeme integrál dvojný.

Uvažujme svislou rovinnou hráz M. Hrází je přitom myšlena rovinná množina s jednotkovou plošnou hustotou, ne postavený trojrozměrný objekt. Počátek kartézské soustavy souřadnic volíme u hladiny, osa y směřuje dolů, osa x vodorovně. Tlak v hloubce y je roven $p = y\rho g$, kde ρ je hustota vody a g tíhové zrychlení. Na plochu o rozměrech ΔS v hloubce y působí tlaková síla

$$\Delta F = y\rho g\Delta S.$$

Tato tlaková síla má ve všech bodech hráze stejný směr a celkovou sílu na hráz je možno zjistit sečtením sil v jednotlivých bodech. Podobná myšlenková úvaha jako v úvodu pro hmotnost desky, nebo přesný matematický popis, nás dovedou k tomu, že celková síla na hráz je dána integrálem

$$F = \iint_M y\rho g\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Protože g a ρ jsou konstanty, je možno psát

$$F = \rho g\iint_M y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Využijeme-li vzorec pro y-ovou souřadnici těžiště, má výsledný vztah tvar

$$F = \rho g y_0 S,$$

kde S je obsah hráze. Formálně tento vztah odpovídá vzorci

$$F = p_0S, \tag{H1}$$

kde $p_0 = \rho g y_0$ je tlak v těžišti. *Proto v praxi stačí znát těžiště hráze a pro výpočet síly na hráz použít celkovou plochu hráze a tlak v těžišti.* Protože jsme pracovali s obecnou množinou M, není tento poznatek nijak vázán na konkrétní tvar hráze. Musí být však splněna podmínka, že všechny body hráze leží v jedné rovině.

Ve výpočtu výše jsme uvažovali svislou rovinu, ale zobecnění na šikmou rovinu je snadné. Stačí opravit vztah pro hloubku, protože když svislou množinu i s kartézskými souřadnicemi pootočíme okolo osy procházející hladinou, hloubka všech bodů se sníží faktorem $\sin\alpha$, kde α je úhel mezi vodorovnou hladinou a rovinou hráze. Formálně tato operace dopadne stejně, jako kdybychom tekutinu nahradili tekutinou s hustotou $\sin\alpha$-krát nižší. Protože však vztah (H1) nezávisí na hustotě, nic se na něm nezmění. Také zobecnění na několik rovin je snadné. Zobecnění na zakřivenou plochu je náročnější a vyžaduje jiný typ integrálu.

V předchozím textu jsme proměnnou veličinu popisující tlak na hráz jako funkci hloubky nahradili konstantní veličinou, udávající tlak v těžišti. Výsledný účinek na hráz se nezměnil. To je přesně smysl střední hodnoty. V matematických pojmech je možno říci, že střední hodnota tlaku na svislou hráz je rovna tlaku v těžišti hráze. (Protože hrází myslíme spíše rovinnou plochu, tak by přesnější terminologie měla používat raději pojem geometrický střed. Budeme se však držet ustálené terminologie.)

Nikde ve výpočtu jsme nepoužili konkrétní meze pro integraci. Výsledek tedy platí nejenom pro hráz dosahující k hladině, ale například i pro poklop výpusti, který je celý pod vodou.

Aplikace dvojného integrálu - působiště tlakové síly

Budeme pokračovat v předchozím příkladě a hledat působiště výsledné tlakové síly.

Tlaková síla působící na svislou hráz má celkový nulový moment vzhledem k ose proházející působištěm. Je-li hráz definována množinou M a je-li y_c působiště výsledné tlakové síly, je v hloubce y tlak na plošku o velikosti ΔS roven $y\rho g\Delta S$ a součin $(y_c - y)y\rho g\Delta S$ je příspěvek k otáčivému momentu vzhledem k ose, procházející vodorovně působištěm tlakové síly. Součet všech těchto příspěvků se nuluje, tedy musí platit

$$\iint_M (y_c - y)y\rho g \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Odsud po vydělení konstantami ρg dostáváme

$$\iint_M (y_c - y)y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

a po roznásobení závorky, rozdělení integrálu na dva a vytknutí konstanty

$$y_c \iint_M y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Nyní již snadno dostaneme výsledný vztah

$$y_c = \frac{\iint_M y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_M y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}. \tag{H2}$$

Pokud je množina M obdélník, je možné ji (po vhodné změně jednotek) brát jako jednotkový čtverec. Protože platí

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}, \quad \iint_{[0,1]\times[0,1]} y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3},$$

dostáváme $y_c = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ a působiště na obdélníkovou hráz je v hloubce odpovídající dvěma třetinám celkové hloubky.

Formálně vztah pro y_c odpovídá vztahu pro těžiště množiny s plošnou hustotou y. Na tomto pozorování a na skutečnosti, že u pravidelných množin umíme těžiště najít geometricky, je založena metoda nalezení působiště tlakové síly pomocí zatěžovacího obrazce.

Kvadratický moment v čitateli zlomku (H2) vyjadřujícího y_c je často výhodnější rozepsat pomocí Steinerovy věty. Ve jmenovateli je součin obsahu S a y-ové souřadnice těžiště y_0. Tím dostaneme

$$y_c = \frac{I_{x0} + Sy_0^2}{Sy_0} = \frac{I_{x0}}{Sy_0} + y_0,$$

kde I_{x0} je kvadratický moment vzhledem k ose procházející vodorovně těžištěm. Působiště tlakové síly y_c je tedy posunuto směrem dolů od těžiště y_0 o hodnotu odpovídající kvadratickému momentu vzhledem k vodorovné ose těžištěm I_{x0} vyděleném součinem obsahu hráze S a y-ové polohy těžiště y_0.

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Mnoho veličin, které nás zajímají, počítáme jako součin obsahu plochy s nějakou jinou veličinou. Zpravidla veličina kterou takto počítáme souvisí v objektem jako s celkem a veličina, kterou násobíme s plochou, souvisí se situací v jednom konkrétním místě. Například hmotnost desky z plošného materiálu (vlastnost objektu) je součinem plošné hustoty (charakteristika materiálu) a obsahu. Celková tlaková síla na hráz (vlastnost objektu) je součinem tlaku (vlastnost v daném bodě) a obsahu. Problém však nastane, pokud vlastnosti nejsou všude stejné. Například plošný materiál může mít v různých místech různé vlastnosti, nebo tlak může být v každém místě hráze jiný, protože hráz je napříč více hloubkami. V takových případech je potřeba součin něčím nahradit. Příslušná náhrada je dvojný integrál.
- Vidíte dvojný integrál a potřebujete promyslet, co vyjadřuje? Představte si, že integrovaná veličina je konstantní. Potom se integrál redukuje na součin a ten už zpravidla je snadné vyjádřit slovně. Například dvojný integrál hloubky jezera vypočítaný přes celé jezero. Pro konstantní hloubku se tato veličina redukuje na součin hloubky a obsahu hladiny. To je ale objem jezera. Proto dvojný integrál hloubky jezera vyjadřuje objem vody v jezeře.
- Dvojný integrál počítáme převodem na dvojnásobný integrál, tj. dva integrály, z nichž jeden je uvnitř druhého. V některých situacích (integrál funkce sestavené jako součin funkcí jedné proměnné a počítaný přes obdélník) se dokonce může situace redukovat na součin dvou integrálů funkce jedné proměnné.

- Dvojný integrál je také odpověď na problém, jak sesčítat veličinu rozloženou v ploše (kvadratický moment obrazce, veličina důležitá pro posuzování tuhosti a pevnosti nosníků) nebo jak ji zprůměrovat (integrální střední hodnota funkce dvou proměnných).