Derivace a další užitečné nástroje

Robert Mařík

2020

https://youtu.be/va5-0hR4tdQ

Parita funkce

https://youtu.be/5vRoVfXUbvE

V následující definici se budeme zajímat o to, jestli existuje nějaký vztah mezi funkční hodnotou v bodě x z definičního oboru a v bodě opačném.

Definice (parita funkce). Nechť funkce f splňuje následující podmínku: $x \in \mathrm{Dom}(x) \implies (-x) \in \mathrm{Dom}(f)$.

- Řekneme, že funkce f je *sudá* pokud platí $f(-x) = f(x)$.
- Řekneme, že funkce f je *lichá* pokud platí $f(-x) = -f(x)$.
- Řekneme, že funkce f má *paritu*, je-li sudá nebo lichá.

Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy y. Graf liché funkce je středově souměrný podle bodu $[0,0]$.

U sudé funkce stačí mít algoritmus nebo tabulky pro kladné argumenty. Například kosinus je sudá funkce a platí

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

Analogicky pro funkci sinus jako pro lichou funkci platí

$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

Poznámka (využití sudosti v materiálovém inženýrství). Funkční hodnoty sudé funkce jsou rozloženy symetricky podle osy y. Pokud víme, že úloha bude mít osově symetrické řešení, můžeme tuto znalost použít a hledat řešení mezi sudými funkcemi. Například při řešení prostupu tepla deskou, kdy stejný fyzikální proces probíhá na obou stranách desky, je přirozené modelovat jenom polovinu desky a uprostřed nastavit podmínku, která umožní sudé prodloužení do druhé poloviny. Většinou to bývá nulovost derivace. Proto se například při nestacionární difuzi používá v definici bezrozměrného času, který charakterizuje fyzikální proces, polovina tloušťky materiálu. Viz P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I nebo odpovídající e-opora.

Sudé a liché funkce jsou, díky svým vlastnostem, v jistém smyslu pěkné. V matematice se často snažíme zapsat nějaký objekt pomocí podobných pěkných objektů. Uvidíme to později například při popisu deformace. Jako ukázku přístupu si můžeme už teď ukázat následující snadnou větu. Věta je teď asi málo užitečná, ale naučíme se na ní trik, kterým později rozdělíme složitější objekt (matici) na součet dvou jiných a šikovnějších objektů (součet symetrické a antisymetrické matice).

Věta (o rozkladu funkce na součet sudé a liché funkce). *Platí*

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Každou funkci definovanou na $(-\infty, \infty)$ je možné takto rozložit na součet sudé a liché funkce.

Příklad. Pro funkci $f(x) = e^x$ dostáváme

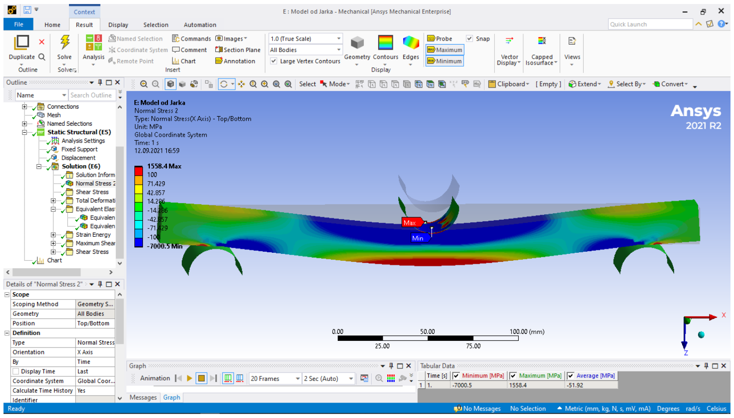
$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Dvě funkce na pravé straně mají význam v aplikacích a nazývají se hypebolický kosinus, $\cosh x$, a hyperbolický sinus, $\sinh x$.

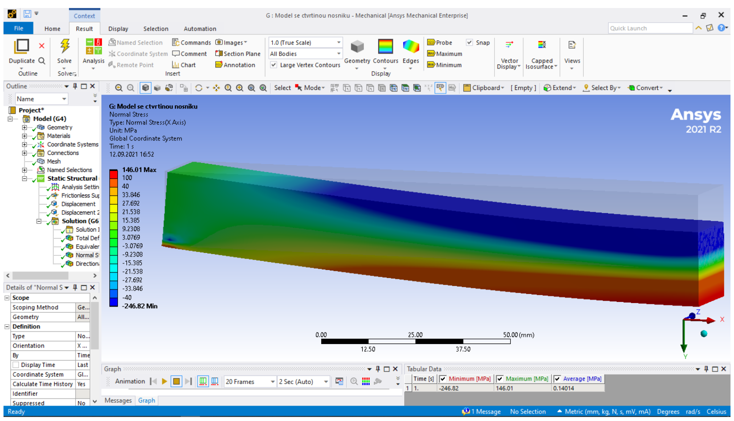
Příklad. Je-li funkce $f(x)$ polynom, potom rozkladem na sudou a lichou část dostaneme polynomy, které jsou tvořeny členy původního polynomu tak, že sudá část obsahuje právě členy se sudým exponentem a lichá část právě členy s lichým exponentem.

Využití parity při technických výpočtech

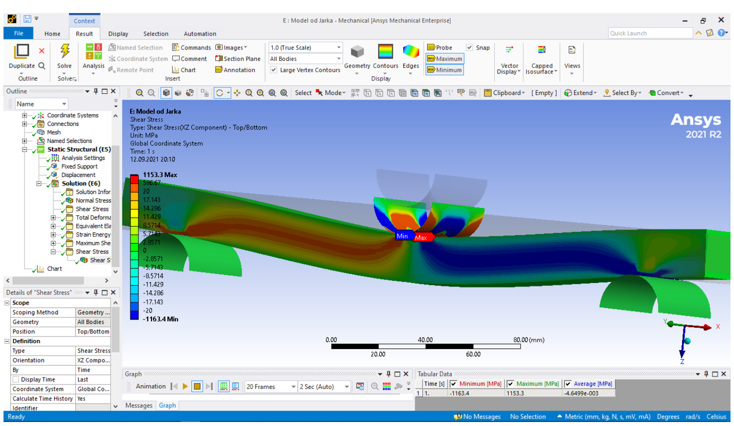
Model tříbodového namáhání nosníku vykazuje dvě roviny symetrie: uprostřed (levá půlka je zrcadlem pravé) a uprostřed podélně podle svislé osy. Stačí tedy modelovat jenom čtvrtinu nosníku. To je výhoda. Protože dřevo je anizotropní materiál s nelineárními materiálovými vlastnostmi, trvá řešení modelu i na nejrychlejších počítačích dlouho a využití symetrie dokáže značně zkrátit čas výpočtu. Na obrázku nahoře je tříbodové namáhání nosníku modelované i s podporami použitými pro deformaci. Dole je zjednodušená situace, kdy nás zajímá jenom část mezi levou dolní a prostřední horní čelistí zkušebního stroje. Protože se jedná jenom o výřez, končí pravá strana poněkud nepřirozeně. Po zrcadlovém doplnění chybějící části nosníku se však obě poloviny spojí a výsledek bude odpovídat modelování celého nosníku.



Obrázek 1: *Tříbodový ohyb nosníku. Sleduje se veličina symetricky rozložená vzhledem ke středu (napětí ve směru nosníku).*



Obrázek 2: *Tříbodový ohyb nosníku s využitím symetrie. Počítá se jenom čtvrtina tělesa.*



Obrázek 3: *Tříbodový ohyb nosníku. Sledovaná veličina (smykové napětí v rovnině boční stěny) je symetrická, ale vlevo i vpravo se liší znaménkem.*

Na dvou obrázcích je barevně napětí ve vodorovném směru. Pokud bychom na přední stranu nakreslili vodorovné čárečky, souvisí toto napětí se silou, která se snaží tyto čárečky natáhnout (kladná hodnota, červená barva) nebo stlačit (záporná hodnota, modrá barva). Z popisu je jasné, že situace je symetrická. Z obrázku například vyčteme, která část je podél nosníku namáhána tahem a která tlakem a jak velká jsou tato tahová a tlaková napětí. Co je však důležité, pravá polovina je zrcadlovou kopií levé poloviny a proto není nutné zde výpočty opakovat. Výsledná funkce bude sudou funkcí proměnné x, pokud počátek soustavy umístíme do středu nosníku a osu x orientujeme ve směru nosníku.

Třetí obrázek znázorňuje smykové napětí v rovině xz, tj. v rovině boční stěny. Pokud bychom si na boční stěně nakreslili čtverečky, sledujeme tímto sílu, snažící se tyto čtverečky deformovat. Situace je opět symetrická, jako v zrcadle. Ale v tomto případě platí, že co se zkosí doprava se v zrcadle zkosí doleva a naopak. Proto se sledovaná veličina liší v levé a pravé půlce znaménkem. Bude popsána funkcí, která je lichou funkcí proměnné x. Stačí vypočítat levou půlku a podle ní doplnit půlku pravou.

Pro zajímavost: u dřeva jako nelineárního anizotropního materiálu je nutné před výpočtem rozhodnout, na kolik elementů se během výpočtu těleso rozdělí a při výpočtu postupně zvyšovat zatížení, sledovat poměry v každém kousku tělesa a rozhodovat, kdy se dostaneme mimo platnost Hookova zákona pro deformaci a přepneme v daném místě na nelineární chování. Proto výpočet trvá cca 20 minut nebo 40 minut (podle velikosti elementů, na které se těleso rozdělí). Oproti tomu výpočet například s ocelí trvá řádově vteřiny, protože úloha je lineární, izotropní, dá se vypočítat hned konečný stav a je možné během výpočtu zmenšovat velikost elementů jenom v místech, kde to je nutné. U dřeva výpočet jedné čtvrtiny modelu výrazně pomůže, závislost doby výpočtu na složitosti dokonce není lineární. Výpočet čtvrtinového modelu trvá výrazně kratší dobu než je čtvrtina doby pro výpočet celého modelu.

Lokální extrémy

https://youtu.be/E1XxOQDtto0

Motivace: Jak najít minimum potenciálu?

V příkladě s aproximací potenciálu pomocí Taylorova polynomu se nám povedlo potenciál aproximovat pomocí kvadratické funkce v okolí vrcholu paraboly. To je častá úloha, protože systémy s potenciální energií se často nacházejí ve stavu blízkému minimu této energie. Otázka je, jak toto minimum najít. Budeme řešit poněkud obecnější úlohu, jak hledat nejenom minimální hodnotu, ale i maximální hodnotu. Zaměříme se na minima a maxima, která jsou lokální (s funkcí pracujeme pouze na určitém intervalu, třeba i krátkém).

Lokální extrémy spojitých funkcí

Následující definice si všímají bodů které mají tu vlastnost, že v okolí není možné najít body buď s vyšší funkční hodnotou (potom se jedná o lokální maximum, nikde v okolí mi funkce neukáže více) nebo s nižší funkční hodnotou (analogicky, lokální minimum).

Definice (lokální extrémy). Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Řekneme, že f má v bodě x_0 *lokální maximum*, pokud platí
$$f(x) \leq f(x_0)$$
pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0.
- Řekneme, že f má v bodě x_0 *lokální minimum*, pokud platí
$$f(x) \geq f(x_0)$$
pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0.
- Řekneme, že f má v bodě x_0 *lokální extrém*, pokud v tomto bodě má buď lokální maximum nebo lokální minimum.

Přímo z definice lokálních extrémů a rostoucí a klesající funkce plyne, že funkce nemůže mít lokální extrém v bodě, kde je rostoucí nebo kde je klesající. Tuto skutečnost vyjadřuje pomocí derivací následující věta.

Věta (Fermatova o lokálním extrému, nutná podmínka pro lokální extrém). *Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, potom je derivace funkce f v bodě x_0 nulová, nebo neexistuje.*

Předchozí věta představuje *nutnou podmínku* pro lokální extrém. V bodě kde není splněna (tj. pokud je derivace v tomto bodě kladná nebo záporná) extrém nemůže nastat. Tím je eliminováno obrovské množství bodů z definičního oboru funkce. V prakticky využitelných případech nám po této eliminaci často zůstane jenom jediný bod, podobně jako v následující úloze.

Příklad: Nosník maximální tuhosti

Příklad. Z kulatiny o průměru d chceme získat nosník obdélníkového průřezu, který se při zatížení co nejméně prohýbá. Z fyzikálních úvah víme, že musí být maximální součin wh^3, kde w je šířka a h výška nosníku.

Trik 1: Budeme měřit jednotky v násobcích průměru. Proto je $d = 1$. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že kulatina má jednotkový průměr.

Z Pythagorovy věty (nakreslete si průřez, tj. obdélník vepsaný do kružnice) plyne $w = \sqrt{1-h^2}$ a snažíme se tedy řešit úlohu
$$wh^3 = h^3\sqrt{1-h^2} \to \mathrm{MAX},$$
která má fyzikální smysl na intervalu $(0,1)$.

Trik 2: Protože uvažujeme jenom kladné délky, je funkce kladná a bude maximální tam, kde bude maximální její druhé mocnina. Je tedy možné studovat ekvivalentní úlohu
$$(wh^3)^2 = h^6(1-h^2) = h^6 - h^8 \to \mathrm{MAX}$$
na intervalu $(0,\infty)$. Výhoda je zřejmá: místo součinu dvou funkcí, z nichž jedna je navíc složená, studujeme dvoučlenný polynom. Pro funkci
$$f(h) = h^6 - h^8$$
dostáváme
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h} = 6h^5 - 8h^7 = 2h^5(3-4h^2).$$
Tato derivace je nulová pro
$$h^2 = \frac{3}{4}$$
tj.
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Pro tuto výšku bude mít nosník maximální hodnotu tuhosti. Šířka nosníku bude
$$w = \sqrt{1-h^2} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$
Poměr výšky a šířky u nosníku maximální tuhosti tedy bude $\sqrt{3}:1$ a šířka bude rovna polovině průměru.

Online výpočet.

Postačující podmínka pro lokální extrém

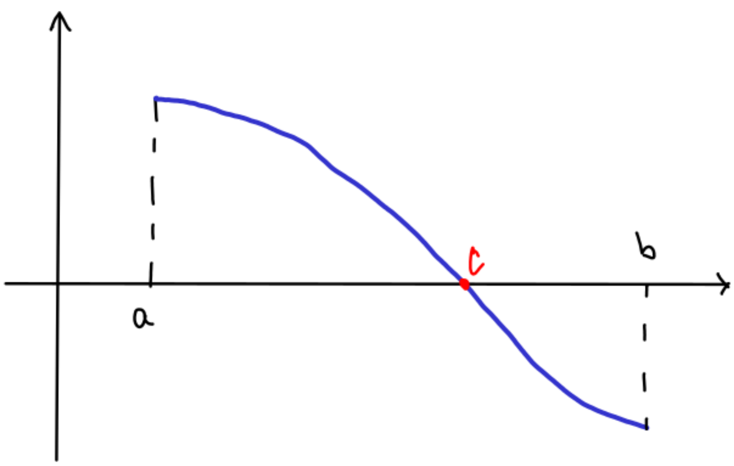
https://youtu.be/W7Kf-waoHQE

Pokud řešíme úlohu s praktickým zadáním, je z povahy úlohy často zřejmé, že lokální extrém požadovaného typu existuje a často to bývá jediný bod, kde je derivace nulová. V takovém případě pro identifikaci lokálního extrému stačí nutná podmínka. Pokud bodů vyhovujících nutné podmínce máme více, nebo pokud je situace méně zřetelná, můžeme existenci lokálního extrému posoudit pomocí následující věty. Ta představuje *dostatečnou (postačující) podmínku* pro lokální extrém. Stačí aby tato podmínka byla splněna a můžeme s jistotou usoudit, že v bodě je extrém a jaký.

Věta (postačující podmínka pro lokální extrémy). *Je-li f spojitá v bodě x_0 a mění-li se v bodě x_0 funkce f z rostoucí na klesající, má funkce f v bodě x_0 lokální maximum. Analogicky, lokální minimum nastává při změně z klesající na rostoucí.*

Podle této věty jsou intervaly monotonie zásadní informací pro nalezení lokálních extrémů. Vzhledem k souvislosti monotonie s derivací je tedy nutné se věnovat nalezení intervalů, kde má funkce kladnou derivaci a intervalů, kde má funkce zápornou derivaci.

Bolzanova věta



Obrázek 4: *Bolzanova věta je jedna z těch, které člověka nepřekvapí. Pokud se má funkce spojitě přehoupnout z jedné strany osy na druhou, musí tuto osu někde protnout.*

Pro nalezení intervalů, kde je výraz závislý na jedné proměnné kladný a kde záporný je vynikajícím nástrojem Bolzanova věta představená v následujících odstavcích. Hodí se například pro nalezení intervalů, kde má funkce kladnou a kde zápornou derivaci, což využijeme při nalezení intervalů, kde je funkce rostoucí a kde klesající.

Bolzanova věta je poměrně názorné tvrzení. Hlavním přínosem pražského matematika Bernarda Bolzana bylo, že si uvědomil, že toto tvrzení není snadným důsledkem definice spojitosti a že přes názornost tohoto tvrzení je nutno podat jeho přesný důkaz, který rozhodně není jednoduchý. Jiná, zdánlivě nevinná tvrzení, však pravdivá být nemusí. Zde se nabízí souvislost se spojitostí funkce a nakreslitelností jedním tahem. Bolzano například našel funkci, která je spojitá, ale její graf je tak komplikovaný, že se nedá nakreslit.

Podmínka $f(a)f(b) < 0$ v následující větě znamená, že funkční hodnoty funkce f v bodech a a b se liší znaménkem.

Věta (Bolzanova věta). *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ a $f(a)f(b) < 0$. Potom existuje c na intervalu (a, b) takové, že platí $f(c) = 0$.*

Důsledek.

- Na intervalu, kde je funkce spojitá a různá od nuly, se zachovává znaménko funkce, tj. funkce je zde buď pořád kladná nebo pořád záporná. Mezi oběma variantami se můžeme rozhodnout testováním znaménka funkce v jednom libovolném bodě intervalu.
- Na intervalu, kde má funkce spojitou a od nuly různou derivaci, se zachovává monotonie funkce, tj. funkce je zde buď pořád rostoucí nebo pořád klesající. Mezi oběma variantami se můžeme rozhodnout testováním monotonie (tj. znaménka derivace) v jednom libovolném bodě intervalu.

Poznámka. Lokální extrém nastává tam, kde je funkce spojitá a kde se mění monotonie. Nenastává tam, kde se monotonie spojité funkce nemění. Přirozeně nenastává ani tam, kde funkce není definována.

Příklad. Najděte lokální extrém funkce $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Derivace je $y' = \dfrac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$.

Příklad. Najděte lokální extrém funkce $y = \dfrac{x^3}{x+2}$. Derivace je $y' = \dfrac{2(x+3)x^2}{(x+2)^2}$.

Příklad: kritická tloušťka izolace trubky

Následující příklad je poněkud překvapivý. Představme si, že potřebujeme obalit horkou trubku izolací, abychom snížili tepelné ztráty. Izolace se zahřeje od trubky a vyzařuje teplo do okolí. Vyzářené teplo je úměrné rozdílu teploty povrchu izolace a teploty vnějšího okolí a také plošnému obsahu povrchu izolace (větší plocha více vyzáří). Roli hraje i kvalita povrchu, to je skryto v příslušné konstantě úměrnosti. S daným materiálem potřebujeme tedy u izolace dosáhnout toho, aby její teplota a povrch byly co nejmenší. Teplotu snížíme, pokud uděláme izolaci silnější, to ovšem zvýší její povrch. A z většího povrchu se vyzáří více tepla. Přidávání izolace by tedy mohlo být kontraproduktivní. Zdá se to být proti logice, ale logika nás někdy může zavést na zcestí a stojí za to jev prozkoumat.

Nejprve ukážeme, že přidávání izolace opravdu může zvýšit tepelné ztráty, ale potom se uklidníme tím, že v praktickém životě, například při izolování topenářských trubek, tento problém nemáme. Potřebujeme dva vzorce, které dodá fyzika, poté již budeme pracovat čistě matematicky.

Teplo Q, které projde za jednotku času při ustáleném vedení tepla povrchem trubky délky L o vnitřním poloměru r, vnějším poloměru R je dáno vztahem

$$\frac{Q}{2\pi Lk}\ln\frac{R}{r}=T_1-T_2, \qquad (*)$$

kde T_1 je teplota uvnitř, T_2 teplota na vnějším okraji a k je tepelná vodivost materiálu. Tento vzorec odvodíme později v přednášce o integrálu.

Teplo Q, které za jednotku času vyzáří plocha trubky o poloměru R a teplotě T_2 do okolí o teplotě T_∞, vztažené na jednotku povrchu trubky, je přímo úměrné rozdílu teplot a povrchu, tj. platí

$$\frac{Q}{2\pi RL}=h(T_2-T_\infty).$$

Odsud

$$\frac{Q}{h2\pi RL}=T_2-T_\infty. \qquad (**)$$

Sečtením ohvězdičkovaných vztahů dostaneme

$$\frac{Q}{2\pi L}\left(\frac{1}{k}\ln\frac{R}{r}+\frac{1}{hR}\right)=T_1-T_\infty.$$

Tento vzorec popisuje tepelné ztráty při izolaci trubky o vnitřním poloměru r a teplotě T_1 izolací o vnějším poloměru R ve vnější teplotě T_∞. Parametry izolace jsou tepelná vodivost k a s koeficient prostupu tepla h. Budeme sledovat, jak se chová veličina Q (tepelné ztráty) jako funkce proměnné R.

$$Q(R)=2\pi L\frac{T_1-T\infty}{\frac{1}{k}\ln\frac{R}{r}+\frac{1}{hR}}$$

Pokud chceme minimalizovat tepelné ztráty Q, musíme maximalizovat jmenovatel

$$f(R)=\frac{1}{k}\ln\frac{R}{r}+\frac{1}{hR}=\frac{1}{k}\ln R-\frac{1}{k}\ln r+\frac{1}{h}R^{-1}.$$

Ostatní veličiny jsou totiž konstantní. Platí

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}R}=\frac{1}{k}\frac{1}{R}+\frac{1}{h}(-1)R^{-2}=\frac{Rh-k}{khR^2}.$$

Derivace je nulová pro

$$R=\frac{k}{h}$$

a v okolí tohoto bodu mění znaménko ze záporného na kladné. Proto má funkce $f(R)$ v tomto bodě minimum. To odpovídá maximu funkce Q. Hodnota $R=\dfrac{k}{h}$ tedy odpovídá maximu funkce tepelných ztrát Q. Pro menší poloměr izolace přidávání další izolace paradoxně zvyšuje tepelné ztráty. Nazývá se *kritický poloměr izolace*.

Online graf funkce

Při použití běžných materiálů pro izolaci vodovodních a topenářských trubek je kritický poloměr tak malý, že při praktické realizaci s ním nemusíme pracovat a materiál se chová dle očekávání, tj. více izolace znamená menší ztráty.

Inženýr, který má navrhnout izolaci elektrického vodiče ovšem vidí problém trochu jinak. Potřebuje naopak tepelné ztráty maximalizovat aby se vodič zbavoval tepla vytvořeného průchodem elektrického proudu. Proto by izolace neměla překročit kritický poloměr.

Odbočka: triky pro práci s funkcemi 1

1. Vhodnou volbou jednotek dokážeme eliminovat některé parametry. Přesněji, vhodnou volnou jednotek dokážeme některým parametrům dát konkrétní numerickou hodnotu. Vyšetřovaná funkce je potom často jednodušší. Viděli jsme v příkladě s vytesáním nosníku maximální tuhosti z kulatiny.
2. Je-li g rostoucí, potom z definice rostoucí funkce plynou ekvivalence

$$\begin{aligned} f(x)\leq f(x_0) &\iff g(f(x))\leq g(f(x_0)),\\ f(x)\geq f(x_0) &\iff g(f(x))\geq g(f(x_0)) \end{aligned}$$

   a proto funkce $f(x)$ a $g(f(x))$ mají lokální extrémy ve stejných bodech. Toho je možné využít, pokud vidíme, že při vhodné volbě funkce g by byla funkce $g(f(x))$ vhodnější pro hledání lokálních extrémů. Viděli jsme v příkladě s vytesáním nosníku maximální tuhosti z kulatiny.
3. Podobně jako v předchozím bodě je možné uvažovat i klesající funkce g. Ale protože klesající funkce obrací směr nerovností, mění se lokální maximum na lokální minimum a naopak.

$$\begin{aligned} f(x)\leq f(x_0) &\iff g(f(x))\geq g(f(x_0)),\\ f(x)\geq f(x_0) &\iff g(f(x))\leq g(f(x_0)) \end{aligned}$$

   Viděli jsme v příkladě s tepelnými ztrátami tepelně izolovaných trubek. Zde jsme využili toho, že zúžení funkce $\dfrac{1}{x}$ na kladná čísla je klesající.

Buckinghamův Π-teorém

https://youtu.be/C4_3IbbLpiI

Naučíme se, že některé vztahy mezi veličinami se dají určit z fyzikálních jednotek těchto veličin.

Existují tělesa, která jsou závislá jenom na jednom délkovém parametru a pokud tento délkový parametr zvětšíme k-krát, povrchy a obsahy na tomto tělese se zvětšují k^2-krát a objemy k^3-krát. To je princip známý z elementární matematiky jako podobnost. Proto objem koule o poloměru r je objem koule o jednotkovém poloměru vynásobený faktorem r^3 a analogické tvrzení platí i pro krychli. Podobnost nacházíme i v živé přírodě. Výrazná je například u ryb, kdy velká ryba je často tvarově blízká zvětšené malé rybě (viz S. Vogel, Comparative biomechanics, kap. 3). V technických aplikacích najdeme stejný princip u skladování sypkého materiálu (písek nasypaný na hromadu zaujme tvar kužele, úhel u vrcholu je daný vlastnostmi písku) nebo vyprazdňování nádrže ve tvaru trychtýře (tekutina má tvar kužele s úhlem u vrcholu daným trychtýřem).

Rozšíření myšlenky podobnosti je rozměrová analýza. Ta je založená na poznatku, že fyzikální zákony je možno vyjadřovat v různých jednotkách. Formální postup umožňuje například následující věta.

Věta (Buckinghamův Pi-teorém). *Rovnici*

$$F_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

resp.

$$x_1 = F(x_2, \dots, x_n),$$

která vyjadřuje fyzikální zákon a obsahuje n veličin (včetně fyzikálních a materiálových konstant) vyjádřených pomocí m základních jednotek je možno zapsat jako rovnici vyjádřenou pomocí $(n-m)$ bezrozměrných parametrů, tj.

$$f_0(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0,$$

nebo

$$\pi_1 = f(\pi_2, \dots, \pi_{n-m}).$$

Formální tvar a metoda výběru bezrozměrných parametrů jsou v tuto chvíli pro nás poměrně komplikované a proto bude nejjednodušší si problematiku ukázat na příkladech. Jejich hlavním smyslem je to, že vztah mezi veličinami odhalíme (až na detaily typu multiplikativní konstanta) jenom z fyzikálních jednotek, bez hlubší znalosti fyzikálního pozadí. Stačí identifikovat relevantní parametry.

Příklad (vztah mezi rychlostí, dráhou a dobou u pohybu konstantní rychlostí). U pohybu konstantní rychlostí jsou relevantní parametry rychlost v v kilometrech za hodinu, doba t v hodinách a dráha s v kilometrech. To jsou tři veličiny vyjádřené pomocí dvou základních jednotek. Existuje tedy jediná bezrozměrná veličina, pomocí které je možno zapsat souvislost mezi parametry pohybu. Tu je možno sestavit jediným možným způsobem (až na případné mocniny) a to ve tvaru

$$\pi_1 = \frac{vt}{s}.$$

Podle Buckinghamova teorému tato veličina musí být konstantní, tj. musí platit $\frac{vt}{s} = k$ pro nějakou konstantu k. Prozkoumáním modelového případu, kdy rychlost, dráha i čas jsou jednotkové, vidíme, že konstanta musí být rovna jedné a proto platí

$$\frac{vt}{s} = 1.$$

Odsud již snadno nalezneme $v = \frac{s}{t}$ a další variace vzorce pro rovnoměrný pohyb tak jak je známe ze základní školy.

Příklad (vztah mezi objemem a povrchem koule). Pro nalezení přepočtu mezi objemem koule V (v metrech krychlových) a povrchem koule S (v metrech čtverečních) máme $n = 2$ (veličiny S a V) a $m = 1$ (jediná základní jednotka metr). Tedy platí $n - m = 1$ a vztah se dá zapsat pomocí jedné bezrozměrné veličiny. Pro tuto veličinu existuje jenom jediná možná varianta: $\pi_1 = V^2 S^{-3}$. Potom je funkce f konstantní a pro nějakou hodnotu k platí

$$V^2 S^{-3} = k$$

a odsud

$$V^2 = kS^3.$$

Tedy vhodné mocniny objemu a obsahu jsou si úměrné. Tento výsledek je možné získat i kombinací vzorců $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ a $S = 4\pi r^2$, ovšem je nutná znalost těchto vzorců a provedení netriválního množství matematických výpočtů. Jako výsledek takové detailnější analýzy bychom navíc věděli, jaká je hodnota konstanty úměrnosti k. My jsme si však chtěli ukázat dosažení výsledku s minimální námahou a s minimálními vstupními znalostmi, abychom podobný postup mohli používat i v jiných případech, kdy alternativní postup nemáme k dispozici.

Příklad (tuhost nosníků čtvercového a kruhového průřezu). Veličinou ovlivňující tuhost nosníku při daném materiálovém složení je kvadratický moment průřezu I v jednotkách metr na čtvrtou. Pokud je průřez nosníku daný jenom jedním délkovým parametrem a (například čtvercový nebo kruhový průřez), máme stejný případ jako výše, kdy počet parametrů o jedničku převyšuje počet základních jednotek: $n = 2$ a $m = 1$. Vztah mezi kvadratickým průřezem I a rozměrem a se dá vyjádřit pomocí jedné bezrozměrné veličiny a máme vlastně jenom jedinou možnost jako tuto veličinu sestavit:

$$\pi_1 = \frac{I}{a^4}.$$

Stejně jako v předchozím příkladě existuje konstanta k taková, že $\frac{I}{a^4} = k$, tj.

$$I = ka^4.$$

Po seznámení se s dvojným integrálem uvidíme, že pro čtvercový průřez o straně čtverce a je $k = \frac{1}{12}$.

Příklad (tuhost nosníků obdélníkového průřezu). Budeme pokračovat v předchozím příkladě. Pro obdélníkový průřez o rozměrech w krát h je $m = 3$ (tři veličiny w, h, I) a $n = 1$ (jediná základní jednotka metr). Pokud však víme, že dva nosníky vedle sebe se prohýbají stejně, jako by byly spojeny, víme, že mezi I a w musí být přímá úměrnost. Proto můžeme místo kvadratického momentu průřezu pracovat s kvadratickým momentem na jednotku šířky $\dfrac{I}{w}$ v jednotkách metr na třetí a potom stejně jako v minulém případě existuje konstanta k taková, že $\dfrac{I}{w} = kh^3$, tj.

$$I = kwh^3.$$

To je přesně v souladu s tvrzením, které jsme použili v příkladu s maximalizací tuhosti nosníku obdélníkového průřezu, kdy jsme tvrdili, že mírou tuhosti je součin wh^3.

Pokud více nosníků pokládáme na sebe nebo vedle sebe, tuhost se sčítá. Pokud nosníky vedle sebe slepíme bočními hranami, nic se nezmění, protože na spoji není žádné tahové napětí. Tuhost tedy roste lineárně s šířkou. Pokud tři nosníky položíme na sebe, vzroste tuhost na trojnásobek jednoho nosníku. Tuhost nosníku však také roste se třetí mocninou výšky. Nosníky položené na sebe a slepené se chovají jako jediný nosník. Pokud tři nosníky slepíme nebo spojíme hřebíky, vzroste tuhost 3^3-krát, tj. 27-krát v porovnání s jediným nosníkem. Tři spojené nosníky mají tedy devítinásobnou tuhost v porovnání se třemi na sobě volně položenými.

Vektorové funkce, gradient

https://youtu.be/trdMQ6WOGlk

Výstupem vektorové funkce je vektor. Vstupem je buď reálné číslo (funkce jedné proměnné), nebo vektor. V prvním případě se jedná o parametrickou křivku v rovině nebo v prostoru, ve druhém případě bývá zpravidla na vstupu stejný počet veličin jako na výstupu a jedná se o vektorové pole (každému bodu v rovině je přiřazen rovinný vektor nebo každému bodu v prostoru je přiřazen prostorový vektor). Vektory zapisujeme pomocí jejich komponent následovně.

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \; = P\vec{e}_1 + Q\vec{e}_2 + R\vec{e}_3$$

Gradient

Pokud nerovnoměrnost v prostorovém rozložení skalární veličiny iniciuje nějaký děj, je nutné znát směr, ve kterém tato veličina roste nebo klesá. To jsme viděli například u rovnice vedení tepla, kde nerovnoměrnost v prostorovém rozložení teploty dává vznik toku tepla. V jednorozměrném případě byla situace jednoduchá a stačí se řídit znaménkem derivace. Ve dvourozměrném nebo trojrozměrném případě je bohužel situace složitější ale i zde máme nástroj pro detekci směrů ve kterém veličina roste nebo klesá a také intenzity tohoto růstu nebo poklesu.

Definice (gradient). Buď $f(x, y)$ funkce dvou proměnných, která má parciální derivace. *Gradientem* funkce f rozumíme vektor

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

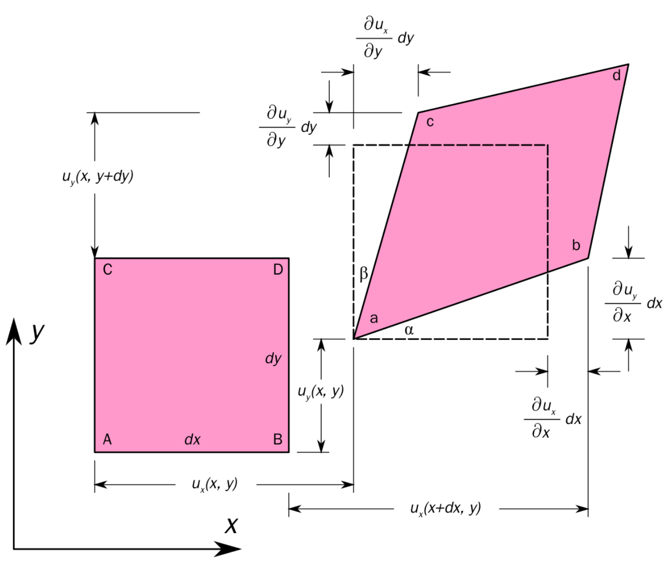
Poznámka. Formálně též často píšeme

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f,$$

kde $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ je operátor, se kterým pracujeme jako s vektorem. Nazývá se *nabla* nebo *Hamiltonův operátor*.

Poznámka (fyzikální význam gradientu). Gradient skalární veličiny f je vektorová veličina, která vyjadřuje směr a intenzitu maximálního růstu veličiny f. Přesněji, výsledkem gradientu je vektor ve směru maximálního růstu veličiny f. Délka tohoto vektoru je nárůst veličiny f na intervalu jednotkové délky. Pro rovnoměrně rozloženou veličinu v prostoru (konstantní) je gradient nulový. Proto je možné gradient chápat jako míru nerovnoměrného rozložení veličiny v prostoru. Řada fyzikálních dějů probíhá tak, že tato nerovnoměrnost vyvolá proudění, které se snaží tuto nerovnoměrnost vyrovnat, například vedení tepla nebo difuze. V praxi nás proto většinou zajímá směr maximálního poklesu, tj. $-\nabla f$.

Lineární aproximace rovinné transformace



Obrázek 5: *Působením síly se element materiálu může posunout, rotovat, deformovat. Tuto změnu potřebujeme zachytit. Zdroj: https://physics.stackexchange.com/questions/311716/geometric-derivation-of-the-infinitesimal-strain-tensor/311744*

Následující pasáže jsou motivací pro tematický celek, kterému se začneme věnovat na další přednášce.

Rozšiřují lineární aproximaci na případ, kdy chceme popsat transformaci roviny. Protože v tomto případě pracujeme se dvěma souřadnicemi, je nutno uvažovat dvě funkce (pro každou souřadnici jednu funkci) a každá funkce závisí na dvou proměnných (na obou souřadnicích). Popis, který si představíme, využijeme při popisu matematického namáhání při odvození veličin, na nichž je založen obecný Hookův zákon dávající do souvislosti deformaci materiálu a působení vnější síly.

Lineární aproximaci funkce jedné proměnné můžeme zapsat ve tvaru

$$f(x+\Delta x) \approx f + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Delta x,$$

kde na pravé straně pro stručnost nevypisujme závislost na x. Podobně můžeme zapsat lineární aproximaci pro funkci dvou proměnných x_1 a x_2 ve tvaru

$$f(x_1+\Delta x_1, x_2) \approx f + \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad f(x_1, x_2+\Delta x_2) \approx f + \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Uvažujme nyní mechanické namáhání, kdy se těleso posunuje, rotuje a deformuje vlivem působení vnější síly a bod (x_1, x_2) se posune o $(u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))$. Pomocí lineárních aproximací

$$\begin{aligned} u_1(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) &\approx u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Delta x_2 \\ u_2(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) &\approx u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Delta x_2 \end{aligned}$$

dostáváme aproximace této transformace. Při transformaci ve $3D$ je situace podobná, jenom jsou zde další členy od třetích souřadnic. Aby se situace nestala nepřehlednou, je klasický způsob zápisu neudržitelný. Nástroj pro přehlednou formulaci lineární aproximace dostaneme k dispozici později po probrání maticového počtu a maticového násobení. Poté budeme díky lineární aproximaci schopni zformulovat souvislost mezi deformací a působením vnější síly.

Za výše uvedenou lineární aproximaci však platíme jistou daň. Lineární zobrazení mimo jiné transformuje přímky na přímky, rovnoběžky na rovnoběžky, střed úsečky na střed úsečky. Deformaci, která tyto podmínky nesplňuje, tím pádem nemůžeme podchytit. Lineární aproximace je přesná jenom pro relativně malé deformace. Proto se také výsledný produkt, ke kterému se v průběhu semestru dopracujeme, nazývá tenzor malých deformací.

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Derivace dokáže detekovat růst a klesání funkce a díky tomu dokážeme také detekovat body, kde se růst zastaví a změní na klesání nebo naopak. Tyto body nás přirozeně zajímají, protože v těchto bodech je studovaná veličina maximální nebo minimální a to má dopad při minimalizaci nákladů, maximalizaci pevnosti či zisku a jiných úlohách z praktického života.
- Silným nástrojem dokáží být i jednodušší postupy, jako například rozměrová analýza reprezentovaná Buckinghamovým Π teorémem.