Matematika, cvičení

Robert Mařík

25. srpna 2021

Obsah

Úvod

Soubor obsahuje příklady pro cvičení k mým přednáškám na Lesnické a dřevařské fakultě pro bakalářské studium v zimním semestru 2020. Text bude expandovat, jak poběží semestr. Vychází ze cvičení v minulém semestru (kompletní zadání a většina řešení jsou k dispozici na webu předmětu). Text existuje ve verzích pro tisk na papír a pro promítání na plátně, každá z těchto verzí ještě s řešeními a bez řešení.

1 Výpočet derivací

Derivaci budeme chápat jako zobrazení, které funkci přiřadí jinou funkci. Proč je tak nesmírně užitečná zjistíme v následujících týdnech.

Základní vzorce.

$$(c)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c) = 0$$

$$(x^n)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$$

$$(\cos x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Zde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta a zbytek jsou vzorce, které platí vždy, když je výraz napravo definovaný.

Triky, které se často hodí.

(A) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

(B) $\sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$

(C) $\dfrac{1}{x^k} = x^{-k}$

(D) $\dfrac{f(x)}{c} = \dfrac{1}{c}f(x)$

(E) $\dfrac{c}{f(x)} = cf^{-1}(x)$

(F) $a^x = e^{x \ln a}$

(G) $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

(H) $\sqrt{x}(x+1) = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$

(I) $\dfrac{x^3+4}{x^2} = x + 4x^{-2}$

Derivování a operace mezi funkcemi

Nechť f, g jsou funkce a $c \in \mathbb{R}$ konstanta. Platí

$$\begin{aligned}
[cf]' &= cf',\\
[f \pm g]' &= f' \pm g',\\
[fg]' &= f'g + fg',\\
\left[\frac{f}{g}\right]' &= \frac{f'g - g'f}{g^2},\\
[f(g(x))]' &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = f'(g(x))g'(x)
\end{aligned}$$

1.1 Výpočet derivace

Určete derivace následujících funkcí, kde $a, b, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $f(x) = x^6 + \dfrac{1}{x^6}$
2. $f(x) = x^2 + 2x + 6$
3. $f(r) = r^3 + 2r^2 - 1$
4. $f(x) = 3x\sqrt{x} + 9x^5$
5. $f(x) = 1 - e^{bx}$
6. $f(x) = (x^2 - 1)^4$
7. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{ax^2}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{(x+6)^2}$
9. $f(x) = \dfrac{a}{(\mu x + b)^2}$

Řešení:

1. $f'(x) = 6x^5 - \dfrac{6}{x^7}$
2. $f'(x) = 2x + 2$
3. $f'(r) = 3r^2 + 4r$
4. $f'(x) = (3x^{3/2} + 9x^5)' = \dfrac{9}{2}\sqrt{x} + 45x^4$
5. $f'(x) = -be^{bx}$
6. $f'(x) = 4(x^2 - 1)^3 2x = 8x(x^2 - 1)^3$
7. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{ax^2} 2ax$
8. $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+6)^3}$
9. $f'(x) = \dfrac{-2a\mu}{(\mu x + b)^3}$

1.2 Růst ryby

Biologové navrhli funkci

$$l = 0.03937t^3 - 0.945t^2 + 10.033t + 3.073$$

jako model délky jistého druhu ryby, kde l je délka ryby v centimetrech, a t je věk v letech. Vypočtěte derivaci $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$. Určete jednotku této derivace a slovní interpretaci hodnoty derivace v bodě $t = 12$.

Upraveno podle Stewart, Day: Biocalculus. Calculus for the life siences. V tomto příkladě se setkáváme s klasickou interpretací derivace jako rychlosti změny, tj. hodnoty o kterou se změní závislá veličina, když se nezávislá veličina změní o jednotku.

Řešení: $\left[\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right] = \mathrm{cm/rok}$, tj. centimetr za rok. Platí

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 3 \cdot 0.03937t^2 - 2 \cdot 0.945t + 10.033 = 0.11811t^2 - 1.89t + 10.033$$

a pro $t = 12\,\mathrm{let}$ dostáváme

$$\left.\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right|_{t=12} = 4.4\,\mathrm{cm/rok}.$$

Dvanáctiletá ryba roste rychlostí přibližně 4.4 centimetrů za rok, tj. mezi dvanáctým a třináctým rokem vyroste přibližně o 4.4 centimetru.

1.3 Bazální metabolismus

Bazální metabolismus M (ve wattech) souvisí s hmotností W vztahem

$$M = AW^n,$$

kde n je pro mnoho živočišných druhů blízké číslu 0.75 a A je konstanta, která je specifická pro daný druh a v rámci daného druhu klesá s věkem. Určete derivaci

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}W}$$

a určete i fyzikální jednotku a slovní interpretaci této derivace.

Zpracováno podle Monteith, Unsworth: Principles of Environmental Physics. Tady je opět klasická interpretace derivace jako rychlosti změny. Rychlost změny ale nemusí být jenom klasické chápání rychlosti jako závislosti na čase. Derivace vyjadřuje, jak závislá veličina reaguje na změny nezávislé veličiny. Pro pochopení, co derivace vyjadřuje, hraje velkou roli i jednotka této derivace. Označení je ponecháno z původní literatury, mimo jiné M není hmotnost a W není watt. Vztah je v literatuře znám jako Kleiberův zákon. Vysvětluje se pomocí něj rozdílná délka života různých živočišných druhů.

Řešení: $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}W} = nAW^{n-1}$ podle pravidla pro derivaci konstantního násobku a pro derivaci mocniny. Jednotka je watt na kilogram, tj. $\left[\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}W}\right] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}$. Derivace udává rychlost, s jakou se projeví změna hmotnosti na bazálním metabolismu. Je to nárůst bazálního metabolismu způsobený nárůstem hmotnosti a přepočtený na jednotkovou změnu hmotnosti. Přibližně také změna bazálního metabolismu ve wattech při změně hmotnosti o kilogram u velkých živočichů nebo v miliwatech při změně hmotnosti o gram u drobných živočichů. Například u malých ptáčků nemá smysl uvažovat nárůst hmotnosti o kilogram a pro interpretaci raději přejdeme k jednotkám tisíckrát menším.

1.4 Mezní náklady (marginal cost)

Náklady na produkci x letadel za rok jsou (v milionech Euro) dány funkcí

$$C(x) = 6 + \sqrt{4x+4}, \qquad 0 \le x \le 30.$$

Platí $C'(15) = 0.25$. Určete, jakou tato derivace má slovní interpretaci a určete i jednotku této derivace.

Toto je jedna z nejrozšířenější aplikací derivací mimo přírodní vědy. Zajímáme se o to, jak rychle rostou ekonomické veličiny, protože ekonomika je za vším. Veličiny, které v ekonomii získáváme derivováním, obsahují zpravidla slovo "mezní", nebo též "marginální". Podle Wikipedie nastupující technická revoluce nazývaná Průmysl 4.0 přinese výrobu s velmi malými mezními náklady. Tedy derivace nákladů na výrobu podle množství vyrobeného zboží bude malá. To odpovídá představě výroby v robotizovaných halách, kde hlavním nákladem je vybudování výrobního zařízení.

Řešení: Jednotka derivace $C'(x)$ je milion Euro/kus, resp. milion Euro/letadlo, resp. milion Euro, podle toho, jak nazveme jednotky v nichž měříme počet letadel.

Derivace $C'(15)$ vyjadřuje rychlost, s jakou rostou náklady při produkci 15 letadel. Je to cena vztažená na jednotkový přírůstek, tj. jedná se vlastně o cenu výroby šestnáctého letadla. Šestnácté letadlo má výrobní náklady 0.25 milionů euro.

1.5 Vzdálenost k horizontu

Vzdálenost k horizontu pro pozorovatele ve výšce h nad Zemí je dána funkcí $H = \sqrt{2Rh}$, kde $R = 6.371 \times 10^6\,\mathrm{m}$ je poloměr Země (`https://aty.sdsu.edu/explain/atmos_refr/horizon.html`). Po dosazení a vydělení faktorem 1000, aby H vycházelo v kilometrech, dostáváme vzorec

$$H = 3.57\sqrt{h},$$

kde h je v metrech a H v kilometrech. Určete hodnotu této derivace $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}h}$ pro $h = 5\,\mathrm{m}$ (včetně jednotky) a slovní interpretaci této derivace.

Někdy je rozměr veličiny derivované stejný, jako rozměr veličiny, podle které se derivuje. Potom je derivace vlastně bez rozměru. Někdy je však vhodné pro srozumitelnější interpretaci jednotky nevykrátit, obzvlášť v případě jako je tento, kdy se obě délky udávají v jiných jednotkách (metry versus kilometry).

Řešení: Pro $H = 3.57\sqrt{h}$ platí
$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}h} = \frac{1}{2} \times 3.57 \times \frac{1}{\sqrt{h}}$$
a numericky
$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}h}(5) = \frac{3.57}{2\sqrt{5}} \approx 0.7983 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{m}} \approx 0.8 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{m}}.$$
Vzdálenost k horizontu pro pozorovatele ve výšce 5 metrů roste rychlostí 0.8 kilometru na každý metr výšky navíc. Toto je interpretace pro praktické využití. Kromě toho se jednotky dají upravit a ve skutečnosti derivace žádný fyzikální rozměr nemá
$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}h}(5) = 0.7983 \times \frac{1000\,\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = 798$$
a každá změna výšky pozorovatele se na vzdálenosti k horizontu projeví svým 800-násobkem.

1.6 Rychlost s jakou roste obsahu kruhu

Váté písky je bezlesý pruh podél železniční trati nedaleko Bzence, kde je extrémní sucho (Moravská Sahara). V dřívějších dobách byly v pruhu podél železnice velmi časté požáry kvůli provozu parních vlaků. Předpokládejme, že požár se v této vysušené oblasti šíří ve tvaru kruhu. V určitém okamžiku je poloměr 50 metrů a roste rychlostí 1.5 metrů za minutu. Zapište zadání pomocí derivací a určete jak rychle roste plocha zasažená ohněm.

V tomto příkladě se učíme, že ze znalosti vztahů mezi veličinami můžeme odvodit vztah, mezi rychlostmi změn, tj. do statických vzorců můžeme dodat dynamiku vývoje. V praxi někdy jde příklad tohoto typu obejít úvahou: teď je poloměr 50 metrů, tomu odpovídá jakási plocha, za minutu bude poloměr 51.5 metru, tomu odpovídá opět jakási plocha a provnáním s plochou původní snadno zjistím přírůstek. To pro nás může být kontrola, že aparát funguje. Pro nás je teď důležité naučit se tento aparát na malých věcech, abyste mohli později dělat věci velké.

Řešení: Ze zadání: $r = 50\,\mathrm{m}$, $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 1.5\,\mathrm{m\,min^{-1}}$. Zajímá nás $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$.

Výpočet: Derivováním vztahu
$$S = \pi r^2$$
podle r získáváme
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r.$$
Derivováním podle t dostaneme
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2\pi r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$
a numericky
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 2\pi \times 50 \times 1.5 \approx 471\,\mathrm{m^2\,min^{-1}}.$$

1.7 Sůl nad zlato

V pohádce *Sůl nad zlato* sype Maruška z bezedné slánky sůl na hromadu soli ve tvaru kužele, který roste tak, že objem je v každém okamžiku svázán s výškou vzorcem
$$V = \frac{1}{4}h^3.$$
Výška je 0.5 metru a vydatnost solničky 10 litrů (tj. 0.01 krychlových metrů) soli za minutu. Určete, jak rychle roste hromada soli do výšky.

Řešení:

Podle zadání je $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0.01$ krychlových metrů za minutu, $h = 0.5$ metru a chceme znát $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$. Derivováním dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{4}h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

Odsud

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\frac{1}{h^2}$$

a po dosazení

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3} \times 0.01 \times \frac{1}{0.5^2}\,\mathrm{m\,min^{-1}} = 0.053\,\mathrm{m\,min^{-1}}.$$

Hromada roste do výšky rychlostí 5.3 centimetru za minutu.

1.8 Rychlost s jakou roste obsahu kruhu II

Město má přibližně tvar kruhu o poloměru 10 km a žije v něm 300 000 obyvatel. Jak rychle musí růst poloměr kruhu (velikost města), pokud počet obyvatel roste rychlostí 10 000 obyvatel za rok a chceme udržet stejnou hustotu osídlení?

Toto je mírná modifikace příkladu s požárem. Protože město má konstantní hustotu osídlení, jsou počet obyvatel i rozloha přímo úměrné a je to podobné, jako bychom jednu veličinu vyjadřovali ve dvou různých jednotkách.

Řešení: Ze zadání: $r = 10\,\mathrm{km}$, $N = 300\,000$, $\sigma = \frac{N}{\pi r^2}$ je hustota osídlení a ta je konstantní, $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 10\,000\,\mathrm{rok}^{-1}$. Zajímá nás $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$.

Výpočet: Pro počet obyvatel platí $N = \sigma\pi r^2$ a derivováním

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sigma\pi 2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

Odsud

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi r\sigma}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$$

a protože $\pi r\sigma = \frac{N}{r}$, máme

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{2N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{10}{2 \times 300\,000} \times 10\,000 = 0.166\,\mathrm{km\,rok^{-1}} \approx 170\,\mathrm{m\,rok^{-1}}$$

Existuje ještě poněkud přímočařejší, ale na provedení mírně náročnější postup, protože je nutné derivovat podíl funkcí. Zderivujeme přímo definiční vztah pro hustotu osídlení $\sigma = \frac{N}{\pi r^2}$ podle času. Vlevo je derivace konstanty, tj. nula, vpravo derivace podílu. Proto

$$0 = \frac{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\pi r^2 - N2\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}}{(\pi r^2)^2}$$

a odsud

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\pi r^2 - N2\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Nyní osamostatníme derivaci poloměru a dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\pi r^2 = N2\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\frac{r}{2N}$$

a výsledek je stejný jako v předchozím postupu.

2 Využití derivací v matematických modelech

2.1 Tepelná výměna podle Newtonova zákona

Newtonův zákon ochlazování je možné použít pro tělesa, u nichž teplota je ve všech místech stejná a efekty spojené s vedením tepla jsou zanedbatelné. Takové objekty charakterizujeme nízkým Biotovým číslem (naučíte se v navazujících předmětech jako Fyzikální vlastnosti dřeva). Předpokládejme, že nevytápěná místnost tyto podmínky splňuje.

Teplota v místnosti kde se přestalo topit při teplotě $T = 23°\mathrm{C}$ se mění tepelnou výměnou s okolím. Rychlost, s jakou teplota místnosti v zimě klesá je úměrná rozdílu teplot v místnosti a venku. Vyjádřete toto pozorování kvantitativně pomocí derivací. Sestavíte tím matematický model popisující pokles teploty v této místnosti.

V tomto příkladu se učíme, že tam, kde se pracuje s rychlostmi změn hraje při kvantitativním popisu roli derivace. Ze střední školy známe tvary fyzikálních zákonů a vztahů v omezené platnosti, kdy se rychlost nemění (jako například rovnoměrný pohyb) nebo mění jenom velmi speciálním způsobem (jako například rovnoměrně zrychlený pohyb). Pomocí derivací tato omezení středoškolské fyziky padají.

Řešení: Je-li T teplota a t čas, je veličina $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ rychlost s jakou roste teplota a veličina $-\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ rychlost, s jakou teplota klesá. Podle předpokladů platí

$$-\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T - T_{\text{venku}})$$

a model má tvar

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_{\text{venku}}), \quad T(0) = 23°\mathrm{C}$$

kde k je konstanta úměrnosti a T_{venku} teplota venku.

2.2 Veličiny z rovnice vedení tepla

V případech, kdy je nutno uvažovat vedení tepla (vysoké Biotovo číslo), postupujeme podle rovnice vedení tepla, kterou jsme na přednášce odvodili pro jednorozměrný případ ve tvaru

$$\varrho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\Bigr).$$

Typickým případem vedení tepla v jedné dimenzi je vedení tepla ve stěně.

Uvažujme jednorozměrnou úlohu s vedením tepla. Osa x směřuje doprava, teplota v bodě x a čase t je $T(x,t)$ ve stupních Celsia. Tok tepla v čase t a v bodě x je $q(x,t)$ v joulech za sekundu. Kladný tok je ve směru osy x. Podle Fourierova zákona je

$$q = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Budeme uvažovat jednorozměrný objekt, tyč nebo stěnu. Počáteční teplota je $0\,°\mathrm{C}$, pravý konec udržujeme na této teplotě, levý konec ohříváme na $20\,°\mathrm{C}$ a udržujeme na této teplotě. Ve zbytku tyče (stěny) se postupně nastolí rovnováha vlivem vedení tepla.

Vyjádřete následující veličiny a určete jejich znaménko.

a) Rychlost s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce času.
b) Rychlost s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce polohy, tj. jak rychle roste teplota směrem doprava.
c) Rychlost s jakou klesá teplota jako funkce polohy, tj. směrem doprava.
d) Rychlost se kterou roste (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy.
e) Rychlost se kterou klesá (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy.

Řešení:

a) Rychlost, s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce času je $\frac{\partial T}{\partial t}$ a tato derivace je v každém bodě kladná, protože tyč se ohřívá. Po čase se asi ustálí rovnováha a derivace bude nulová, teplota se přestane měnit. Měříme ve stupních Celsia za sekundu. $\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right] = {}^\circ\mathrm{C\,s^{-1}}$

b) Rychlost, s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce polohy, tj. jak rychle se roste teplota směrem doprava, je $\frac{\partial T}{\partial x}$ a tato derivace je záporná, protože vlevo je horký konec a teplota směrem doprava klesá. Měříme ve stupních celsia na metr. $\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right] = {}^\circ\mathrm{C\,m^{-1}}$

c) Rychlost s jakou klesá teplota jako funkce polohy, tj. směrem doprava, je $-\frac{\partial T}{\partial x}$ a tato veličina je kladná, protože vlevo je horký konec a teplota směrem doprava opravdu klesá. Měříme ve stupních Celsia na metr. $\left[-\frac{\partial T}{\partial x}\right] = {}^\circ\mathrm{C\,m^{-1}}$

d) Rychlost, se kterou roste (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy je $\frac{\partial q}{\partial x}$. Teplo teče doprava a přitom se spotřebovává, protože se ohřívá tyč. Proto tok klesá a parciální derivace je záporná. Měříme v joulech za sekundu na metr. $\left[\frac{\partial q}{\partial x}\right] = \mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-1}}$

e) Rychlost, se kterou klesá (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy je $-\frac{\partial q}{\partial x}$ a tato veličina je kladná, což plyne z předchozího bodu a z toho, že jsme změnili znaménko. Měříme v joulech za sekundu na metr. $\left[-\frac{\partial q}{\partial x}\right] = \mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-1}}$ Tato veličina udává, kolik tepla se za jednotku času ubude v toku na metrovém úseku tyče. Ze zákona zachování energie se toto teplo nemůže "ztratit", ale použije se na zvýšení teploty, což je právě obsahem rovnice vedení tepla.

2.3 Okrajové podmínky pro rovnici vedení tepla

K modelu stěny pomocí rovnice vedení tepla je ještě nutné přidat podmínky související s počátečním stavem (počáteční podmínky) a s chováním na okrajích (okrajové podmínky).

Nechť stěna je na intervalu $x \in [0, L]$, $x = 0$ je vnitřní okraj a $x = L$ je vnější okraj. Výraz $-k\frac{\partial T}{\partial x}$ udává tok tepla ve směru osy x. Tok ve směru osy x má kladné znaménko. Naformulujte okrajové podmínky v následujících scénářích.

a) Z venku dokonale izolovaná stěna. Na hranici $x = L$ nedochází k toku tepla.

b) Vnitřní část stěny je udržovaná na konstantní teplotě $T = 23^\circ\mathrm{C}$.

c) Stěna je zvenku osvětlená a zahřívaná Sluncem. Na vnější hranici je konstantní tok tepla směrem do stěny.

d) Stěna je zvenku ochlazována prouděním vzduchu. Tok tepla mezi stěnou a okolím je úměrný rozdílu teplot stěny a okolí.

e) Stěna je zevnitř ohřívána prouděním vzduchu od radiátorů. Tok tepla mezi stěnou a okolím je úměrný rozdílu teplot stěny a okolí.

Zpracováno podle Cengel: Mass and heat transfer.

Řešení:

a) $\frac{\partial T}{\partial x}(x = L) = 0$

b) $T(x=0)=23$

c) $-k\dfrac{\partial T}{\partial x}(x=L)=-Q$, kde Q je teplo za jednotku času dodané ze Slunce. Jedná se o výkon Slunce dopadající na stěnu vynásobený koeficientem absorbce, protože část tepelného výkonu se odráží. Záporné znaménko je proto, že teplo teče do stěny, tj. proti směru osy x.

d) $-k\dfrac{\partial T}{\partial x}(x=L)=h(T(x=L)-T_{\text{okolí}})$, kde h je koeficient přestupu tepla.

e) $-k\dfrac{\partial T}{\partial x}(x=0)=h(T_{\text{místnost}}-T(x=0))$, kde h je koeficient přestupu tepla. Všimněte si, že poslední dvě podmínky se liší znaménkem u T. To proto, že v jednom případě je kladný směr toku tepla do materiálu a jednou z materiálu. Pokud chceme mít popis jednotný, nebo nezávislý na zvolené souřadné soustavě, formulujeme podmínky pro tok tepla ven z materiálu. Tento tok získáme tak, že tok tepla vynásobíme skalárně s jednotkovým vektorem směřujícím ven z materiálu kolmo na jeho povrch. V tomto případě by pro tok ze stěny do místnosti bylo $k\dfrac{\partial T}{\partial x}(x=0)=h(T(x=0)-T_{\text{místnost}})$. Tento tok by byl záporný, protože ve skutečnosti teplo uniká z místnosti stěnou ven.

2.4 Model růstu úměrného velikosti chybějícího množství

Mnoho živočichů roste tak, že mohou dorůstat jisté maximální délky a rychlost jejich růstu je úměrná délce, která jim do této maximální délky chybí (tj. kolik ještě musí do této maximální délky dorůst). Sestavte matematický model popisující takovýto růst (von Bertalanffy growth model).

Jakmile vidíme, že v zadání figuruje rychlost změny veličiny, která nás zajímá, je jasné, že kvantitativní model bude obsahovat derivaci. Zatím se učíme model zapsat, později ho budeme umět i vyřešit.

Řešení: Je-li L délka a $L_{\max}$ maximální délka, potom do maximální délky chybí $L_{\max}-L$ a model má tvar

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=k\ (L_{\max}-L).$$

2.5 Kontaminace a čištění

Znečišťující látky se v kontaminované oblasti rozkládají tak, že za den se samovolně rozloží 8% aktuálního znečištění. Kromě toho pracovníci odstraňují látky rychlostí 30 galonů denně. Vyjádřete tento proces kvantitativně pomocí vhodného modelu.

Tento příklad opět zmiňuje rychlost změny, tj. derivaci. Tentokrát se na změně podílejí dva procesy a jejich účinek se sčítá. Příklad navíc připomíná, jak se pracuje se změnou vyjádřenou procenty. Toto je používané například při úročení spojitým úrokem. Pokud pokles změníme na růst, tj. pokud změníme znaménka u derivace, máme okamžitě model růstu financí na účtu, na kterém se pravidelně připisuje úrok a k tomu se přidává fixní úložka.

Řešení: Je-li y znečištění v galonech a t čas ve dnech, má model tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-0.08y-30.$$

2.6 Logistická rovnice: model využívání přírodních zdrojů

Při modelování růstu populace o velikosti $x(t)$ často pracujeme s populací žijící v prostředí s omezenou úživností (nosnou kapacitou). Často používáme model

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx\left(1-\frac{x}{K}\right),$$

kde r a K jsou parametry modelu (reálné konstanty). Nakreslete graf funkce $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ a ověřte, že pro velká x je $f(x)$ záporné a velikost populace proto klesá. Pokud populaci lovíme konstantní rychlostí, sníží se pravá strana o konstantu, kterou označíme h. Ukažte, že pro intenzivní lov bude pravá strana rovnice pořád záporná a intenzivní lov tak způsobí vyhubení populace. Dá se najít kritická hodnota lovu oddělující vyhynutí populace a její trvalé přežívání?

Toto je asi nejdůležitější rovnice pro modelování biologických jevů. Používá se při modelování vývoje obnovitelných zdrojů a bývá modifikována pro konkrétní případy podle toho, jak populace interaguje s okolím.

Řešení: Funkce $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ je kvadratická funkce s nulovými body $x = 0$ a $x = K$, vrcholem uprostřed mezi nulovými body (tj. pro $x = \frac{K}{2}$) a parabola je otočená vrcholem nahoru. Proto je napravo od $x = K$ záporná. To odpovídá tomu, že populace s velikostí přesahující nosnou kapacitu v dlouhodobém horizontu vymírá.

Funkce $f_h(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - h$ vznikne posunutím funkce $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ o h dolů. Pokud posuneme hodně, dostane se celá parabola pod osu x a funkce bude pořád záporná. Kritická hodnota je v situaci, kdy mizí možnost, že $f_h(x)$ má body kde je kladná a populace se může rozvíjet. To nastane, pokud se vrchol paraboly dostane na osu x, tj. h je rovno funkční hodnotě funkce $f(x)$ v bodě $x = \frac{K}{2}$.

2.7 Populace jelenů

Populace jelenů v národním parku přibývá rychlostí 10% za rok. Správa parku každý rok odebere 50 jedinců. Napište matematický model pro velikost populace jelenů v tomto parku.

Řešení: Je-li x velikost populace jelenů, platí

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.10x - 50,$$

kde t je čas v letech.

2.8 Hrubý model chřipkové epidemie

Rychlost s jakou roste počet nemocných chřipkou je úměrný současně počtu nemocných a počtu zdravých jedinců. Sestavte model takového šíření chřipky.

Toto je současně model popisující šíření informace v populaci, stačí si místo chřipky představit nějakou informaci předávanou mezi lidmi (sociální difuze).

Řešení: Je-li M velikost populace a y počet nemocných, je v populaci $M - y$ zdravých a model má tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky(M - y).$$

2.9 Ropná skvrna

Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že její poloměr jako funkce času roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Vyjádřete proces kvantitativně pomocí derivací.

Řešení: Je-li r poloměr, je r^2 druhá mocnina a protože se jedná o nepřímou úměrnost, platí

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{r^2}.$$

2.10 Model učení

Rychlost učení (tj. časová změna objemu osvojené látky nebo procento z maximální manuální zručnosti) je úměrná objemu dosud nenaučené látky. Vyjádřete proces kvantitativně pomocí derivací.

Porovnejte s příkladem 2.4.

Řešení: Je-li L objem naučené látky a $L_{\max}$ maximální objem látky kterou je možné se naučit, je objem dosud nenaučené látky $L_{\max} - L$ a model má tvar

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = k\,(L_{\max} - L).$$

2.11 Výpočet derivace

Určete derivace následujících funkcí jedné proměnné. Ostatní veličiny jsou parametry. Pokud v zadaném vzorci odhalíte vztah mezi veličinami známý ze středoškolské geometrie, pokuste se najít odpovídající interpretaci derivace.

1. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$
2. $S(r) = 4\pi r^2$
3. $A(r) = \pi r^2$
4. $V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
5. $S(a) = 6a^2$
6. $U(v) = \frac{1}{2}mv^2$
7. $V(r) = \frac{a}{r^2}$
8. $f(y) = ae^{by}$
9. $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
10. $S(h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
11. $S(a) = \frac{1}{2}(a + c)v$
12. $L(r) = 2\pi r$

V tomto příkladě se učíme mimo jiné derivovat i podle jiné proměnné než podle x. To je nezbytné pro aplikace. Abychom nebyli fixováni na proměnnou x, je vhodné se učit vzorce pro derivování vyjadřovat slovně a bez jména konkrétní proměnné.

Řešení:

1. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2$, rychlost změny objemu koule při změnách poloměru, tj. změna objemu koule vztažená k jednotkové změně poloměru
2. $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 8\pi r$, rychlost změny povrchu koule při změnách poloměru, tj. změna povrchu koule vztažená k jednotkové změně poloměru
3. $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} = 2\pi r$, rychlost změny obsahu kruhu při změnách poloměru, tj. změna obsahu kruhu vztažená k jednotkové změně poloměru
4. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} = \frac{1}{3}\pi r^2$, rychlost změny objemu kužele při změnách výšky, tj. změna objemu kužele vztažená k jednotkové změně výšky při zachovaném poloměru podstavy
5. $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a} = 12a$, změna povrchu krychle vyvolaná jednotkovou změnou délky hrany krychle
6. $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}v} = mv$
7. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -2\frac{a}{r^3}$
8. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = abe^{by}$
9. $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r + 2\pi h, \dots$
10. $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r, \dots$
11. $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a} = \frac{1}{2}v, \dots$
12. $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r} = 2\pi, \dots$

3 Výpočet derivací, lineární aproximace

3.1 Výpočet derivace součinu a podílu

Určete derivace následujících funkcí, kde $a, b, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $f(x) = x \ln x$
2. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{ax+b}$
4. $f(t) = \dfrac{t}{t^2+6}$
5. $f(x) = \dfrac{ax^2}{x^2+1}$
6. $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$
7. $f(x) = \dfrac{ax}{(x-1)^2}$

Řešení:

1. $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x\dfrac{1}{x} = 1 + \ln x$
2. $f'(x) = \sqrt{x^2+a} + x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
3. $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (ax+b) - x \cdot a}{(ax+b)^2} = \dfrac{b}{(ax+b)^2}$
4. $f'(t) = \dfrac{(t^2+6) - t2t}{(t^2+6)^2} = \dfrac{6-t^2}{(t^2+6)^2}$
5. $f'(x) = \dfrac{2ax(x^2+1) - ax^2 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2ax}{(x^2+1)^2}$
6. $f'(x) = \dfrac{6x^2(x^2+1) - 2x^3 2x}{(x^2+1)^2}$
7. $f'(x) = \dfrac{a(x-1)^2 - ax2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{a(x-1) - ax2}{(x-1)^3} = \cdots$

3.2 Základní lineární aproximace

Najděte lineární aproximace funkcí $\sin x$, $\cos x$ a $(1+x)^n$ v okolí nuly. Tím dokážete platnost následujících přibližných vzorců platných pro x blízko nuly.

$$\sin x \approx x$$
$$\cos x \approx 1$$
$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

První dvě aproximace využijeme později pro odvození tvaru matice malých rotací, což je důležité při studiu deformace materiálů. Poslední můžeme využít například pro to, abychom z relativistického vzorce pro celkovou energii extrahovali část závislou na rychlosti, tj. kinetickou energii (na přednášce).

Řešení:

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

a) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$,
$f(0) = \sin 0 = 0$,
$f'(x) = (\sin(x))' = \cos x$,
$f'(0) = \cos(0) = 1$

$$\sin(x) \approx 0 + 1 \cdot (x - 0) = x$$

b) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$,
$f(0) = \cos 0 = 1$,
$f'(x) = (\cos(x))' = -\sin x$,
$f'(0) = -\sin(0) = 0$

$$\cos(x) \approx 1 + 0 \cdot (x - 0) = 1$$

c) $f(x) = (1 + x)^n$, $x_0 = 0$,
$f(0) = (1 + 0)^n = 1$,
$f'(x) = ((1 + x)^n)' = n(1 + x)^{n-1}$,
$f'(0) = n(1 + 0)^{n-1} = n$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n \cdot (x - 0) = 1 + nx$$

3.3 Lineární aproximace

Veličina y je funkce proměnné x. Najděte její lineární aproximaci v okolí zadaného bodu.

1) $y = xe^x$ v okolí bodu $x = 0$

2) $y = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ v okolí bodu $x = 0$

3) $y = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ v okolí bodu $x = K$

4) $y = \sqrt{x}$ v okolí bodu $x = 1$

5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ v okolí bodu $x = 1$

Ve druhém a třetím příkladě aproximujeme funkci modelující růst populace v prostředí s nosnou kapacitou K. Aproximace v okolí bodu $x = 0$ odpovídá velmi malé populaci. Proto se konstanta úměrnosti ze získané lineární aproximace nazývá invazní parametr*.*

Řešení:

1) $f(x) = xe^x$, $x_0 = 0$,
$f(0) = 0e^0 = 0$,
$f'(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x$,
$f'(0) = e^0 + 0e^0 = e^0 = 1$

$$xe^x \approx 0 + 1 \cdot (x - 0) = x$$

2) $f(x) = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$, $x_0 = 0$,

$f(0) = r0\left(1 - \dfrac{0}{K}\right) = 0$,

$f'(x) = \left(rx - r\dfrac{1}{K}x^2\right)' = r - \dfrac{2r}{K}x$,

$f'(0) = r - \dfrac{2r}{K} \cdot 0 = r$

$$rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \approx 0 + r(x - 0) = rx$$

3) $f(x) = rx\left(1-\dfrac{x}{K}\right)$, $x_0 = K$,

$f(K) = rK\left(1-\dfrac{K}{K}\right) = rK(1-1) = 0,$

$f'(x) = \left(rx - r\dfrac{1}{K}x^2\right)' = r - \dfrac{2r}{K}x,$

$f'(K) = r - \dfrac{2r}{K}\cdot K = r - 2r = -r$

$$rx\left(1-\frac{x}{K}\right) \approx 0 - r(x-K) = -r(x-K) = r(K-x)$$

Poslední aproximaci je možno přepsat do tvaru

$$rx\left(1-\frac{x}{K}\right) \approx rK\left(1-\frac{x}{K}\right)$$

4) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$,

$f(1) = \sqrt{1} = 1,$

$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$

$f'(1) = \dfrac{1}{2}$

$$\sqrt{x} \approx 1 + \frac{1}{2}(x-1)$$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$,

$f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1,$

$f'(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}},$

$f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \approx 1 - \frac{1}{2}(x-1)$$

3.4 Kinetika chemických reakcích pro malé koncentrace

Rychlost mnoha chemických reakcí je dána vzorcem

$$f(x) = \frac{ax}{b+x}, \tag{1}$$

kde x je koncentrace substrátu a a, b jsou parametry (konstanty). Tento vzorec se nazývá kinetika Michaelise a Mentenové. Ukažte, že platí

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{ab}{(b+x)^2}.$$

Použijte tento výpočet k lineární aproximaci funkce (1) pro malá x.

Řešení:

Přímým dosazením dostáváme $f(0) = \dfrac{a0}{b+0} = 0$, $f'(0) = \dfrac{ab}{(b+0)^2} = \dfrac{ab}{b^2} = \dfrac{a}{b}$ a odsud

$$\frac{ax}{b+x} \approx 0 + \frac{a}{b}(x-0) = \frac{a}{b}x.$$

3.5 Lineární aproximace kvalifikovaným odhadem

Pokud je v součinu výraz, který je blízký nule, ovlivní tento výraz výsledný součin více, než zbylé součinitele. Postavíme toto pozorování na solidnější základy.

Ukažte, že pokud platí $f(x) = g(x)h(x)$ a $g(x_0) = 0 \neq h(x_0)$, má lineární aproximace funkce g tvar

$$g(x) \approx g'(x_0)(x - x_0)$$

a lineární aproximace funkce f tvar

$$f(x) \approx \Big[g'(x_0)(x - x_0)\Big]h(x_0),$$

kde v hranaté závorce je lineární aproximace funkce g a tato aproximace je vynásobena hodnotou funkce h v bodě x_0.

Situace je jednoduchá zejména v případě, kdy funkce g je lineární a je sama svojí lineární aproximací. Ukažte, že s uvedenou výbavou je možno napsat lineární aproximace prvních tří funkcí z příkladu 3.3 přímo a bez výpočtu. Ukažte, že výpočet není nutný a výsledek se dá kvalifikovaně odhadnout i v předchozím příkladě s kinetikou Michaelise a Mentenové. Pro tyto účely použijte triviální identitu

$$\frac{ax}{b + x} = x \cdot \frac{a}{b + x}.$$

Řešení:

Obecný vzorec je

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vztah

$$g(x) \approx g'(x_0)(x - x_0)$$

z něj plyne okamžitě použitím funkce g a podmínky $g(x_0) = 0$.

Pro funkci $f(x) = g(x)h(x)$ v našem případě máme

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0)h(x_0) = 0 \cdot h(x_0) = 0 \\ f'(x_0) &= g'(x_0)h(x_0) + g(x_0)h'(x_0) = g'(x_0)h(x_0) + 0 \cdot h'(x_0) = g'(x_0)h(x_0) \end{aligned}$$

a přímým dosazením

$$f(x) \approx 0 + g'(x_0)h(x_0)(x - x_0) = \Big[g'(x_0)(x - x_0)\Big]h(x_0)$$

1. Funkce $f(x) = xe^x$ má v $x = 0$ první součinitel nulový a druhý součinitel nenulový a platí $e^0 = 1$. V okolí $x = 0$ je první součinitel lineární. Proto v okolí $x = 0$ platí

   $$xe^x \approx xe^0 = x \cdot 1 = x.$$

2. Funkce $f(x) = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ má v $x = 0$ první součinitel rx nulový a druhý součinitel $\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ nenulový a platí $\left(1 - \dfrac{0}{K}\right) = 1$. V okolí $x = 0$ je první součinitel lineární a v okolí $x = 0$ platí

   $$rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \approx rx\left(1 - \frac{0}{K}\right) = rx.$$

3. Funkce $f(x) = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ má v bodě $x = K$ první součinitel rx nenulový roven rK a druhý součinitel $\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ nulový. Druhý součinitel je lineární. Proto v okolí $x = K$ platí
$$rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \approx rK\left(1 - \frac{x}{K}\right) = r(K - x).$$
4. Funkce $f(x) = x\dfrac{a}{b+x}$ má v bodě $x = 0$ první součinitel x nulový a druhý součinitel $\dfrac{a}{b+x}$ nenulový a roven $\dfrac{a}{b}$. První součinitel je lineární. Proto v okolí $x = 0$ platí
$$x\frac{a}{b+x} \approx x\frac{a}{b}.$$

3.6 Numerické derivování a závislost tepelné vodivosti mědi na teplotě

Tabulka udává závislost koeficientu tepelné vodivosti mědi na teplotě, $\lambda = \lambda(T)$. Odhadněte pomocí centrální diference derivaci funkce λ pro $T = 400K$ (cca 127°C). Určete i fyzikální jednotku derivace $\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T}$ a slovní interpretaci vypočtené hodnoty.

Poznámka: Teplota v Kelvinech (termodynamická teplota) je teplota ve stupních Celsia posunutá tak, aby teplota −273,15°C odpovídala 0 K. Dílky a tedy i změny teploty jsou na obou stupnicích identické.

T [K]	λ [W/(m K)]
200	413
400	393
600	379
800	366

Zdroj: Cengel, Mass and heat transfer.

Řešení:

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T}(400) \approx \frac{(379 - 413)\,\mathrm{W/(m\,K)}}{2 \cdot 200\mathrm{K}} = -0.085\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-2}}$$

Při teplotě $T = 400K$ hodnota koeficientu tepelné vodivosti s rostoucí teplotou klesá. S každým stupněm Celsia (s každým Kelvinem) nad danou teplotu klesne koeficient tepelné vodivosti o $0.085\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$.

Pokusíme se trošku slovně ilustrovat, co nám vlastně vyšlo. Při teplotě 400 K a teplotním gradientu jeden stupeň Celsia na metr délky prochází mědí tepelný výkon 393 wattů na metr čtvereční, tj. za sekundu se plochou metru čtverečního přenese 393 joulů. S každým stupněm Celsia navíc tato hodnota malinko poklesne: o 0.085 joulu. Odsud je patrné, že při změně teploty řádově o desítky stupňů se koeficent změní o malé jednotky procent a v těchto situacích nebude závislost na teplotě významná.

3.7 Iterační metoda

Úlohy s tepelnou bilancí (např. osluněná stěna) často vedou na rovnice obsahující čtvrtou mocninu a první mocninu neznámé veličiny. Toto je dáno tím, že vyzařování tepla souvisí podle Stefanova-Bolzmannova zákona se čtvrtou mocninou teploty a přenos tepla prouděním nebo vedením souvisí s první mocninou teploty. Koeficient u první mocniny bývá větší než u čtvrté mocniny, protože konstanta ze Stefanova-Bolzmannova zákona je velmi malá. Typickým představitelem by mohla být rovnice
$$x^4 - 8x + 6 = 0.$$
Napište iterační vzorec pro řešení této rovnice Newtonovou metodou a proveďte několik iterací s vhodnou celočíselnou počáteční aproximací. Poté porovnejte s postupem, kdy v rovnici osamostatníte x z lineární části a z takové rovnice sestavíte iterační vzorec.

Řešení:

Newtonova metoda: $f(x) = x^4 - 8x + 6$, $f'(x) = 4x^3 - 8$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 8x_n + 6}{4x_n^3 - 8}$$

$x_0 = 1$,
$x_1 = 0.75$,
$x_2 = 0.800123762376238$,
$x_3 = 0.801613150991155$,
$x_4 = 0.801614587354561$.

Ad hoc iterace:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 6}{8}$$

$x_0 = 1$,
$x_1 = 0.875000000000000$,
$x_2 = 0.823272705078125$,
$x_3 = 0.807422868167514$,
$x_4 = 0.803126865733812$,
$x_5 = 0.802005182967586$,
$x_6 = 0.801715260030858$

4 Lokální extrémy

4.1 Lokální extrémy bez slovního zadání

V úlohách z praxe často víme, že existuje optimální řešení a studovaná funkce má jediný bod s nulovou derivací. Pokud studujeme funkci bez jakéhokoliv kontextu, musíme posuzovat to, zda v daném bodě opravdu extrém je a jaký. Nejlépe tak, že současně určíme i intervaly monotonie. Za povšimnutí stojí, že při hledání bodů, kde jsou lokální extrémy, vlastně ani nemusíme znát původní funkci. Stačí nám o ní informace týkající se spojitosti a poté stačí znát derivaci. I s takovým případem se v praxi setkáváme.

Najděte lokální extrémy a intervaly monotonie následujících funkcí. Spolu s funkcí je zadána i její derivace.

(1) $y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$, $y' = \dfrac{1-x}{(x+1)^3}$

(2) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$, $y' = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

(3) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

(4) $y = (5-x)\sqrt{x}$, $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(5-3x)$

(5) $y = x^2 e^{-x}$, $y' = -(x-2)xe^{-x}$

(6) y je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{2\}$,
$y' = \dfrac{(x^2+3)(x^2-3)}{2-x}$

Řešení:

1. $y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$, $y' = \dfrac{1-x}{(x+1)^3}$

Nulové body derivace jsou řešení rovnice

$$1 - x = 0.$$

Tato rovnice má jediné řešení
$$x = 1.$$

Body nespojitosti derivace jsou řešení rovnice
$$(x+1)^3 = 0.$$

Tato rovnice má jediné řešení
$$x = -1.$$

Body nespojitosti a nulové body rozdělí reálnou osu na tři podintervaly.

- Interval $(-\infty, -1)$. Dosazením reprezentanta $x = -2$ z tohoto intervalu máme
$$y'(-2) = \frac{1-(-2)}{(-2+1)^3} < 0$$
a proto je derivace na tomto intervalu záporná a funkce klesá.
- Interval $(-1, 1)$. Dosazením reprezentanta $x = 0$ z tohoto intervalu máme
$$y'(0) = \frac{1-0}{(0+1)^3} > 0$$
a proto je derivace na tomto intervalu kladná a funkce roste.
- Interval $(1, \infty)$. Dosazením reprezentanta $x = 2$ z tohoto intervalu máme
$$y'(2) = \frac{1-2}{(2+1)^3} < 0$$
a proto je derivace na tomto intervalu záporná a funkce klesá.

V bodě $x = 1$ se monotonie funkce mění spojitě z klesající na rostoucí (nakreslete si schema) a funkce má lokální minimum.

V bodě $x = -1$ se monotonie funkce mění z rostoucí na klesající, ale lokální extrém zde není, protože funkce ani její derivace v tomto bodě nejsou definovány.

2. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$, $y' = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

Nulové body derivace jsou řešení rovnice
$$x(x+2) = 0.$$

Tato rovnice má dvě řešení
$$x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

Body nespojitosti derivace jsou řešení rovnice
$$(x+1)^2 = 0.$$

Tato rovnice má jediné řešení
$$x = -1.$$

Body nespojitosti a nulové body rozdělí reálnou osu na čtyři podintervaly.

- Interval $(-\infty, -2)$. Dosazením reprezentanta $x = -10$ z tohoto intervalu máme

$$y'(-10) = \frac{(-10)(-10+2)}{(\dots)^2} > 0$$

a proto je derivace na tomto intervalu kladná a funkce roste. Všimněte si, že jmenovatel je stále kladný a znaménko podílu nijak neovlivní.

- Interval $(-2, -1)$. Dosazením reprezentanta $x = -1.5$ z tohoto intervalu máme

$$y'(-1.5) = \frac{-1.5(-1.5+2)}{(\dots)^2} < 0$$

a proto je derivace na tomto intervalu záporná a funkce klesá.

- Interval $(-1, 0)$. Dosazením reprezentanta $x = -0.5$ z tohoto intervalu máme

$$y'(-0.5) = \frac{-0.5(-0.5+2)}{(\dots)^2} < 0$$

a proto je derivace na tomto intervalu záporná a funkce klesá.

- Interval $(0, \infty)$. Dosazením reprezentanta $x = 1$ z tohoto intervalu máme

$$y'(1) = \frac{1(1+2)}{(\dots)^2} > 0$$

a proto je derivace na tomto intervalu kladná a funkce roste.

V bodě $x = -2$ se monotonie funkce mění spojitě z rostoucí na klesající (nakreslete si schema) a funkce má v tomto bodě lokální maximum.

V bodě $x = 0$ se monotonie funkce mění spojitě z klesající na rostoucí (nakreslete si schema) a funkce má v tomto bodě lokální minimum.

V bodě $x = -1$ se monotonie funkce nemění. Navíc funkce v tomto bodě ani není definována a existenci lokálního extrému tedy ani neuvažujeme

3. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

Nulové body derivace jsou řešení rovnice

$$2x = 0.$$

Tato rovnice má jediné řešení

$$x = 0.$$

Body nespojitosti derivace jsou řešení rovnice

$$(x^2+1)^2 = 0.$$

Tato rovnice nemá v oboru reálných čísel žádné řešení.

Body nespojitosti nejsou a jeden nulový bod rozdělí reálnou osu na dva podintervaly. Z derivace je zřejmé, že derivace má stejné znaménko jako x, tj. derivace je záporná nalevo od nuly a kladná napravo od nuly. To znamená, že v nule se funkce mění z klesající na rostoucí a funkce má v tomto bodě lokální minimum.

4.2 Krabička z papíru

V každém rohu papíru A4 vystřihneme čtverec a zbylý papír podél stran poohýbáme nahoru, aby vznikla (až se to slepí) krabička bez horního víka. Jak velké čtverce musíme odstříhat, pokud chceme, aby výsledná krabička měla co největší objem?

Toto je klasický příklad přítomný snad v každé učebnici diferenciálního počtu. Zajímavý je tím, že A4 má ve výuce zpravidla každý před sebou a může si tipnout, jaký očekává výsledek a kolik maximální objem bude. Pro odhad objemu si můžeme představit třeba litrovou krabici mléka a porovnávat s tímto referenčním kvádrem.

Řešení: Papír A4 má rozměry $210 \times 297\,\mathrm{mm}$ a je-li vystřižený čtverec o straně x, má krabička rozměry $(210-2x)\times(297-2x)\times x$ a objem

$$V(x) = (210-2x)(297-2x)x = 4x^3 - 1014x^2 + 62370x.$$

Derivováním dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 12x^2 - 2028x + 62370$$

a nulové body derivace jsou řešeními rovnice

$$12x^2 - 2028x + 62370 = 0.$$

Tato rovnice má pro naši úlohu jediné smysluplné řešení $x = 40.4$ (další řešení $x = 128.5$ neodpovídá realizovatelnému výrobku). Optimální krabička vznikne vystřižením čtverců o stranách $40.4\,\mathrm{mm}$. Objem je

$$V(40.4) = 1.12\times 10^6\,\mathrm{mm}^3 = 1.12\,\mathrm{l}.$$

4.3 Plot ze tří stran pozemku

Chceme oplotit pozemek obdélníkového tvaru, jehož jedna strana je rovná přirozená hranice. Stavíme plot tedy jenom na zbylých třech stranách.

(1) Jaký tvar pozemku zvolit, pokud je dána délka pletiva a chceme mít plochu pozemku co největší?

(2) Jaký tvar pozemku zvolit, pokud je dána plocha pozemku a chceme mít co nejmenší spotřebu pletiva?

Než začnete řešit, tak si zkuste tipnout jestli optimální je čtverec nebo obdélník. Pokud obdélník, tak zda podél přirozené hranice nebo kolmo na ni. Také si zkuste tipnout, zda je řešení obou úloh stejné (tj. stejný tvar obdélníku, například stejný poměr stran). Úlohy řešte s co nejmenším množstvím parametrů. Uvažujte tedy, že máte jednu délkovou jednotku pletiva v prvním případě a že chcete oplotit pozemek o jednotkovém obsahu v případě druhém.

Řešení: Obsah obdélníka o stranách x a y je součin délek dvou sousedních stran

$$S = xy$$

délka plotu bude délka strany podél hranice (např x) a dvojnásobek délky strany kolmé na hranici (např. y)

$$L = x + 2y$$

Maximální plocha při daném obvodu. Měřeno v násobcích délky plotu je $L = 1$ a ze vztahu

$$x + 2y = 1$$

dostaneme

$$x = 1 - 2y.$$

Potom platí

$$S = xy = (1 - 2y)y = y - 2y^2.$$

Derivací obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y} = 1 - 4y$$

a derivace je rovna nule pro $y = \frac{1}{4}$, tedy kratší strana je čtvrtina celkové délky plotu. Na delší strana tedy zbude polovina (dvakrát odkrojím čtvrtinu) a obdélník má poměr stran $2 : 1$.

Minimální obvod při daném obsahu. Měřeno v jednotkách, ve kterých je obsah S roven jedné (tj. v násobcích délky strany čtverce o stejném obsahu jako náš obdélník) dostáváme ze vztahu

$$xy = 1$$

vztah

$$y = \frac{1}{x}.$$

Potom platí

$$L = x + 2y = x + \frac{2}{x} = x + 2x^{-1}$$

Derivací obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = 1 + 2(-1)x^{-2} = 1 - \frac{2}{x^2}$$

a derivace je rovna nule pro $x^2 = 2$, tj. pro $x = \sqrt{2}$ (uvažujeme jenom kladné hodnoty x). Ze vztahu $y = \frac{1}{x}$ dostáváme

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{2}$$

a kratší strana je polovinou délky delší strany. Jako v předchozím případě, obdélník má poměr stran $2 : 1$.

4.4 Optimální trám vyřezaný z kulatiny

Ukažte, že pro vyřezání nebo vytesání trámu o maximálním objemu z kulatiny válcového tvaru je nutné vyřezat trám se čtvercovým průřezem. Návod: Uvažujte válec, ze kterého chceme vyříznout hranol. Zvolte jako jednotku délky průměr kulatiny a hledejte maximum druhé mocniny obsahu průřezu. Zdůvodněte, že tento postup je korektní. Maximum paraboly najděte ze znalosti toho, že vrchol paraboly leží v polovině mezi kořeny.

Poté zopakujte předchozí úlohu pro maximum veličin bh^2 a bh^3, kde h je výška a b šířka průřezu trámu. V prvním případě maximalizujeme nosnost a ve druhém tuhost nosníku. Použijte stejný postup jako v minulé úloze, ale už nebude stačit najít vrchol paraboly. (Poznámka: Jedna z těchto funkcí se maximalizovala na přednášce a proto tento případ nemusíte dopočítávat.)

Tento příklad je zajímavý spíše z aplikačního hlediska: nejvíce dřeva neznamená největší nosnost a nosník, který nejvíce unese, vychází jinak, než nosník, který se nejméně prohýbá.

Řešení:

V jednotkách průměru platí $h^2 + b^2 = 1$ a mají se postupně maximalizovat funkce obsah $S = bh$, nosnost $N = bh^2$ a tuhost $T = bh^3$. Protože b se pomocí h vyjadřuje pomocí druhé odmocniny a naopak, bude výhodnější maximalizovat funkce, kde aspoň jedna mocnina je sudá. To je jenom u nosnosti, u obsahu a tuhosti si sudé mocniny vyrobíme umocněním na druhou a budeme dosazovat

$$b^2 = 1 - h^2,$$

tj.

$$S^2(h) = b^2h^2 = (1-h^2)h^2,$$
$$N(b) = b(1-b^2) = b - b^3,$$
$$T^2(h) = b^2h^6 = (1-h^2)h^6 = h^6 - h^8.$$

Postup je korektní, protože veličiny jsou kladné a funkce $y = x^2$ je pro kladné x rostoucí. Proto bude veličina maximální tam, kde je maximální její druhá mocnina.

Obsah: Funkce $f(h) = (1-h^2)h^2$ je parabola v proměnné h^2 a proto má maximum pro $h^2 = \frac{1}{2}$ a $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Druhý rozměr vychází

$$b = \sqrt{1-h^2} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a trám má v tomto případě (maximalizujeme objem) průřez čtverce.

Nosnost: Funkce $f(b) = b - b^3$ má derivaci $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}b} = 1 - 3b^2$ a derivace je pro $b > 0$ nulová, jestliže $b^2 = \frac{1}{3}$, tj. $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Druhý rozměr vychází

$$h = \sqrt{1-b^2} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

a trám má v tomto případě (maximalizujeme nosnost) průřez obdélníka s poměrem stran $h : b = \sqrt{2} : 1$.

Tuhost: Funkci $f(h) = h^6 - h^8$ jsme maximalizovali na přednášce a trám má v tomto případě průřez obdélníka s poměrem stran $\sqrt{3} : 1$. Vskutku. Funkce $f(h) = h^6 - h^8$ má derivaci $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h} = 6h^5 - 8h^7 = 2h^5(3-4h^2)$ a derivace je pro $h > 0$ nulová, jestliže $h^2 = \frac{3}{4}$, tj. $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Druhý rozměr vychází

$$b = \sqrt{1-h^2} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

a trám má v tomto případě průřez obdélníka s poměrem stran $h : b = \sqrt{3} : 1$.

4.5 Ryba migrující proti proudu

Ryba ve vodě vydává za časovou jednotku energii úměrnou třetí mocnině rychlosti vzhledem k vodě. Pro překonání určité vzdálenosti proti proudu o rychlosti v je proto potřeba energie

$$E = k\,\frac{1}{x}(x+v)^3,$$

kde x je rychlost ryby vzhledem ke břehu a $x + v$ rychlost vzhledem k vodě. Najděte pro rybu optimální cestovní rychlost při migraci na dlouhé vzdálenosti, tj. rychlost, při které je minimalizován nutný energetický výdaj.

Než začnete řešit, uvědomte si, že pokud měříme rychlosti v jednotkách rychlosti vody v řece, platí $v = 1$ a po vynechání konstanty k, která nemá vliv na polohu a kvalitu lokálních extrémů, hledáme lokální minimum funkce

$$\frac{(x+1)^3}{x}$$

(Podle Stewart, Day: Biocalculus. Calculus for the life siences.)

Řešení: Měřeno v násobcích rychlosti vody máme minimalizovat funkci

$$y = \frac{(x+1)^3}{x}.$$

Platí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3(x+1)^2\cdot 1\cdot x - (x+1)^3\cdot 1}{x^2} = \frac{(x+1)^2(3x-(x+1))}{x^2} = \frac{(x+1)^2(2x-1)}{x^2}$$

Derivace je rovna nule pro $x=-1$ (ryba plave rychlostí stejnou jako voda, ale po proudu) a $x=\frac{1}{2}$ (ryba plave proti proudu takovou rychlostí, že její rychlost vzhledem k břehu je poloviční ve srovnání s rychlostí vody v protiproudu). Smysluplné je pouze řešení $x=\frac{1}{2}$ tj polovina rychlosti proudu. Například v proudu o rychlosti $20\,\mathrm{km\,hod^{-1}}$ ryba plave tak, že vzhledem k nehybnému pozorovateli na břehu plave rychlostí $10\,\mathrm{km\,hod^{-1}}$. Ve vodě tedy plave rychlostí $30\,\mathrm{km\,hod^{-1}}$, proud $20\,\mathrm{km\,hod^{-1}}$ ji strhává zpět a výsledná rychlost je $10\,\mathrm{km\,hod^{-1}}$

Pozorování potvrdila, že migrující ryby "znají" řešení předchozího příkladu a proto plavou proti proudu rychlostí o polovinu větší než rychlost proudu. Vzhledem ke břehu je tedy jejich "cestovní rychlost proti proudu" poloviční jako je rychlost proudu. Mimo jiné, v rychlé vodě plavou rychle a v pomalejší pomaleji.

Příklad typu jaký jsme řešili u migrace ryb se ale ve skutečnosti často objevuje naopak. Například následovně.

- *Pozorujeme specifické chování ryb. Někdo si to toho nevšímá, někdo to bere jako fakt, ale někomu to vrtá hlavou. Proč to tak je? Asi si přirozeně minimalizují energii.*
- *Jakou musíme učinit hypotézu aby tato hypotéza vedla k pozorovanému jevu? Jaká musí být souvislost energie s rychlostí, aby minimalizace energie vedla k tomu, co pozorujeme?*
- *Po nalezení odpovědi na předchozí otázku je přirozené předpokládat, že jsme našli podstatu jevu. Tedy třeba, že energie je úměrná třetí mocnině rychlosti. V tomto smyslu matematika zviditelnila neviditelné.*
- *Někdy je potřeba při konfrontaci s jinými pozorováními hypotézu poopravit, zpřesnit nebo bohužel zamítnout. To však je přirozené při poznávání světa.*

5 Integrály I

5.1 Výpočet integrálu

Najděte následující integrály.

(1) $\int x^2+2x\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{x^2-1}{x}\,\mathrm{d}x$

(5) $\int e^x+e^{2x}\,\mathrm{d}x$

(6) $\int \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x$

(8) $\int \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$

(9) $\int \frac{1}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$

(10) $\int \frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^6}\,\mathrm{d}r$

(11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$

(12) $\int_0^1 (x-1)^3\,\mathrm{d}x$

(13) $\int_{-1}^1 3x^2+x^5\,\mathrm{d}x$

(14) $\int_0^{10} e^{-0.1t}\,\mathrm{d}t$

(15) $\int_{-a}^a u^3\,\mathrm{d}u$

Řešení:

Používáme vzorce $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$, $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x+c$, $\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax}+c$ a dále linearitu (integrál zachovává součet a konstantní násobek)

$$(1)\quad \int x^2+2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3+2\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{3}x^3+x^2+c$$

$$(2)\quad \int \sqrt{x}(x+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int x\sqrt{x}+\sqrt{x}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}}+x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^2+c$$

$$(3)\quad \int \frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$$

$$(4)\quad \int \frac{x^2-1}{x}\,\mathrm{d}x = \int x-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}-\ln|x|+C$$

$$(5)\quad \int e^x+e^{2x}\,\mathrm{d}x = e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

$$(6)\quad \int \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+C$$

$$(7)\quad \int \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(-1)x^{-1} = -\frac{1}{4x}+c$$

$$(8)\quad \int \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$$

$$(9)\quad \int \frac{1}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x+C$$

$$(10)\quad \int \frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^6}\,\mathrm{d}r = \int r^{-2}-r^{-6}\,\mathrm{d}r = (-1)r^{-1}+\frac{1}{5}r^{-5} = -\frac{1}{r}+\frac{1}{5r^5}+c$$

$$(11)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2}-\sin 0 = 1$$

$$(12)\quad \int_0^1 (x-1)^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}(x-1)^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}(1-1)^4-\frac{1}{4}(0-1)^4 = -\frac{1}{4}$$

$$(13)\quad \int_{-1}^1 3x^2+x^5\,\mathrm{d}x = \left[x^3+\frac{1}{6}x^6\right]_{-1}^1 = \left(1^3+\frac{1}{6}1^6\right)-\left((-1)^3+\frac{1}{6}(-1)^6\right) = 2$$

$$(14)\quad \int_0^{10} e^{-0.1t}\,\mathrm{d}t = \left[-10e^{-0.1t}\right]_0^{10} = -10e^{-0.1\times 10}-\left(-10e^{-0.1\times 0}\right) = -10e^{-1}+10$$

$$(15)\quad \int_{-a}^a u^3\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{4}u^4\right]_{-a}^a = \frac{1}{4}a^4-\frac{1}{4}(-a)^4 = 0$$

5.2 Vytékání oleje

Najděte slovní interpretaci integrálu

$$\int_0^{10} r(t)\mathrm{d}t,$$

kde $r(t)$ je rychlost s jakou vytéká olej z děravé nádrže (v litrech za hodinu) a t je čas v hodinách. Vypočtěte integrál pro $r(t) = 200-4t$.

Toto a další příklady jsou klasické aplikace integrálu, kdy integrálem rychlosti, s jakou se mění nějaká veličina, je změna této veličiny.

Řešení: Integrál udává objem oleje, který vyteče za prvních 10 hodin. Pro zadanou funkci dostáváme

$$\int_0^{10} r(t)\mathrm{d}t = \int_0^{10}(200-4t)\mathrm{d}t = \left[200t-2t^2\right]_0^{10} = 2000-200-(0-0) = 1800.$$

Za 10 hodin vyteče 1800 litrů oleje.

5.3 Populace včel

Populace včel o počáteční velikosti 100 včel se rozmnožuje rychlostí $r(t)$. Najděte slovní interpretaci výrazů

$$\int_0^{15} r(t)\mathrm{d}t,$$

a

$$100 + \int_0^{15} r(t)\mathrm{d}t.$$

Řešení: První integrál značí přírůstek populace včel za patnáct jednotek času, druhý integrál značí celkovou velikost populace včel po uplynutí patnácti jednotek času. (Jednotky času nejsou v zadání specifikovány.)

5.4 Napouštění nádrže

Chemikálie teče do nádrže rychlostí $180 + 3t$ litrů za minutu, kde $t \in [0, 60]$ je čas v minutách. Určete, kolik chemikálie nateče do nádrže během prvních 20 minut.

(Podle Stewart: Calculus.)

Řešení: Změna množství v nádrži je integrál rychlosti, tj.

$$\int_0^{20} (180 + 3t)\,\mathrm{d}t = 180 \times 20 + \left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^{20} = 4\,200\,\mathrm{l}.$$

5.5 Prasklá kanalizace

Prasklá kanalizace způsobila znečištění jezera v rekreační oblasti. Koncentrace bakterií $C(t)$ (v bakteriích na kubický centimetr, t je čas ve dnech) se po ošetření úniku pro $t \in [0, 6]$ vyvíjí rychlostí

$$C'(t) = 10^3(t - 7).$$

Jaká je změna koncentrace bakterií mezi čtvrtým a šestým dnem?

(Podle Mardsen, Weinstein: Calculus I.)

Řešení: Změna koncentrace je integrál z rychlosti s jakou se koncentrace mění, tj.

$$\int_4^{6} 10^3(t - 7)\,\mathrm{d}t = \left[10^3\left(\frac{1}{2}t^2 - 7t\right)\right]_4^6 = -4000$$

a koncentrace poklesne o 4000 jednotek (bakterií na kubický centimetr).

5.6 Rychlost učení

Nechť $W(t)$ je počet francouzských slovíček, které se naučíme po t minutách. Typicky může být (pro první dvě hodiny učení)

$$W(0) = 0 \quad \text{a} \quad W'(t) = \frac{4t}{100} - 3\left(\frac{t}{100}\right)^2.$$

Najděte pomocí integrálu funkci $W(t)$.

(Podle Mardsen, Weinstein: Calculus I.)

Řešení: Výsledná funkce integrálem rychlosti učení, tj.

$$W(t) = \int W'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t}{100} - 3\left(\frac{t}{100}\right)^2\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2}{100} - \frac{t^3}{10000} + C,$$

kde C je integrační konstanta. Protože musí platit $W(0) = 0$, je $C = 0$ a proto

$$W(t) = \frac{2t^2}{100} - \frac{t^3}{10000}.$$

Jiné řešení je pomocí určitého integrálu najít změnu a poté přičíst k počáteční hodnotě. Aby nedošlo ke kolizi mezi označením integrační proměnné t a mezi koncem časového intervalu, budeme tento konec časového intervalu označovat T. Tedy platí

$$w(T) = w(0) + \int_0^T w'(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^T \frac{4t}{100} - 3\left(\frac{t}{100}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{2T^2}{100} - \frac{T^3}{10000}.$$

Tedy

$$w(T) = \frac{2T^2}{100} - \frac{T^3}{10000}$$

a po přeznační proměnné máme stejný výsledek jako předešlým postupem.

5.7 Určení parametru tak, aby integrál měl zadanou hodnotu

V praktických úlohách je někdy situace, kdy integrujeme funkci s parametrem a hodnotu parametru je nutno doladit tak, aby integrál měl předem stanovenou hodnotu. Určete hodnotu reálného parametru a tak, aby byl integrál

$$\int_0^{10} a\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

roven hodnotě 2019.

Řešení:

$$\int_0^{10} a\sqrt{x} = \left[a\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{10} = \frac{2a}{3}(10)^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} 2019 &= \frac{2a}{3}(10)^{\frac{3}{2}} \\ a &= \frac{3}{2}2019(10)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

5.8 Práce na pružině

Síla působící na pružinu je úměrná deformaci pružiny. Natáhneme-li pružinu z rovnovážného stavu o hodnotu x, je nutno působit silou kx, kde k je konstanta (tuhost pružiny). Vypočtěte práci nutnou k natažení pružiny z nedeformovaného stavu o jednotkovou délku a poté o délku l.

Po obecném výpočtu vypočtěte práci pro pružinu o zadané tuhosti k a deformaci Δx. Výpočet proveďte určitým integrálem třikrát, postupně pro jednotku délky centimetr, decimetr a metr. Až po dokončení výpočtu převeďte na joule (newton krát metr).

$$k = 10\,\mathrm{N/cm} = 100\,\mathrm{N/dm} = 1000\,\mathrm{N/m}, \qquad \Delta x = 10\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{dm} = 0.1\,\mathrm{m}$$

Všimněte si, že v každém případě se integruje jiná funkce a v jiných mezích. Protože však všechny výpočty charakterizují stejnou situaci, výsledky jsou po převedení na stejné jednotky stejné, což je očekávané. Změna jednotek je speciální případ substituce, kdy proměnnou podle které integrujeme nahradíme proměnnou jinou. Tuto metodu si pro integrál představíme na přednášce.

Řešení:

Jednotková délka:

$$W = \int_0^1 F\,\mathrm{d}x = \int_0^1 kx\,\mathrm{d}x = \left[k\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}k - 0 = \frac{1}{2}k$$

Délka l:

$$W = \int_0^l F\,\mathrm{d}x = \int_0^l kx\,\mathrm{d}x = \left[k\frac{1}{2}x^2\right]_0^l = \frac{1}{2}kl^2 - 0 = \frac{1}{2}kl^2$$

Výpočet v centimetrech:

$$W = \int_0^{10} 10x\,\mathrm{d}x = \left[5x^2\right]_0^{10} = 5 \times 100 = 500\,\mathrm{Ncm} = 5\,\mathrm{Nm}$$

Výpočet v decimetrech:

$$W = \int_0^1 100x\,\mathrm{d}x = \left[50x^2\right]_0^1 = 50\,\mathrm{Ndm} = 5\,\mathrm{Nm}$$

Výpočet v metrech:

$$W = \int_0^{0.1} 1000x\,\mathrm{d}x = \left[500x^2\right]_0^{0.1} = 500 \times 0.01\,\mathrm{Nm} = 5\,\mathrm{Nm}$$

6 Integrály II

6.1 Výpočet integrálu substitucí

Najděte následující integrály integrováním substituční metodou.

(1) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int e^{-ax}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \sin x \cos^5 x\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int \cos x\sqrt{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$

6.2 Střední hodnota funkce

Určete střední hodnotu funkce na zadaném intervalu.

(1) funkce $\sqrt{x}$ na intervalu $[1, 4]$

(2) funkce $\sin x$ na intervalu $[0, \pi]$

(3) funkce $\sin x$ na intervalu $[0, 2\pi]$

(4) funkce ax^2 na intervalu $[0, 1]$

V posledním příkladě určete hodnotu konstanty a tak, aby střední hodnota byla rovna jedné.

6.3 Vedení tepla stěnou, lineární materiálové vztahy

Tok tepla v jedné dimenzi je dán Fourierovým zákonem

$$Q = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}.$$

Pro ustálené proudění je Q konstantní. Pro homogenní materiál s lineární odezvou je výše uvedený vztah přesně lineární, tj. k je konstanta. Určete tok tepla stěnou šířky d oddělující prostory o teplotě T_1 a T_2.

Řešení:

Vztah

$$Q = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

udává derivaci teploty podle polohy ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{Q}{k}$$

a integrací na intervalu $x \in [0, d]$ dostáváme

$$T(d) - T(0) = \int_0^d -\frac{Q}{k}\,\mathrm{d}x = -\frac{Q}{k}\int_0^d \mathrm{d}x = -\frac{Q}{k}d.$$

Pro $T(0) = T_1$ a $T(d) = T_2$ dostáváme

$$T_2 - T_1 = -\frac{Q}{k}d$$

a odsud

$$Q = k\frac{T_1 - T_2}{d}$$

6.4 Vedení tepla stěnou, nelineární materiálové vztahy

Zopakujte předchozí výpočet pro materiál s nelineární materiálovou odezvou, kdy Fourierův zákon není lineární, tj. k závisí na teplotě. Nejjednodušší zobecnění je případ, kdy $k(T)$ je lineární, tj. platí

$$k(T) = a + bT.$$

Použijte substituční metodu převádějící integrál $\displaystyle\int k(T(x))\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$ na integrál $\displaystyle\int k(T)\,\mathrm{d}T$. Použijte dále skutečnost, že střední hodnota lineární funkce je aritmetickým průměrem hodnot v krajních bodech intervalu.

Na tomto příkladě jsou zajímavé tři věci.

- *Odvodíme vzorec používaný při posuzování tepelných ztrát.*
- *Přirozeně vychází vzorec, který po zavedení střední hodnoty funkce $k(T)$ splývá se vzorcem z předchozího příkladu, odvozeného pro konstantní vodivost.*
- *Nejzajímavější je fakt, že jsme substituční metodou vypočítali integrál funkce, kterou vlastně vůbec neznáme. Vskutku, neznáme teplotní profil $T(x)$ ve stěně a tím pádem neznáme ani závislost vodivosti $k(T(x))$ na poloze a ani gradient teploty. Přesto se podařilo integrál vypočítat. Teplotní profil se naučíme hledat jako řešení rovnice vedení tepla.*

Řešení: Stejně jako v předchozím příkladě, máme

$$k(T)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -Q$$

a integrací na intervalu $[0, d]$ dostáváme

$$\int_0^d k(T)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -Qd$$

a po substituci a označení $T(0) = T_1$, $T(d) = T_2$

$$\int_{T_1}^{T_2} k(T)\,\mathrm{d}T = -Qd.$$

S využitím střední hodnoty dostáváme

$$(T_2 - T_1)\frac{k(T_1) + k(T_2)}{2} = -Qd$$

a po výpočtu

$$Q = \frac{k(T_1) + k(T_2)}{2}\frac{T_1 - T_2}{d}.$$

6.5 Střední hodnota funkce dané tabulkou

Určete střední hodnotu koeficientu tepelné vodivosti λ mědi na teplotním intervalu od 100 do 400 Kelvinů. Porovnejte výsledek s aritmetickým průměrem.

Pro výpočet na intervalu od 100 do 800 Kelvinů bychom museli integrovat na intervalu, na kterém nemáme rovnoměrně rozložené uzlové body. Navrhněte, jak v takovém případě postupovat a jak vypočítat $\int_{100}^{800} \lambda(T)\,\mathrm{d}T$

T [K]	λ [W/(m K)]
100	482
200	413
300	401
400	393
600	379
800	366

Zdroj: Cengel, Mass and heat transfer.

Řešení:

Integrál vypočteme lichoběžníkovým pravidlem

$$\int_{100}^{400} \lambda(T)\,\mathrm{d}T \approx \frac{100}{2}(482 + 2\times 413 + 2\times 401 + 393) = 125150$$

Střední hodnota na intervalu $[100, 400]$ je

$$\frac{1}{300}\int_{100}^{400} \lambda(T)\,\mathrm{d}T \approx 417$$

Aritmetický průměr je

$$\frac{482 + 413 + 401 + 393}{4} = 422.$$

Střední hodnota je vlastně (po dosazení lichoběžníkového pravidla)

$$\frac{482 + 2\times 413 + 2\times 401 + 393}{6}$$

a jedná se tedy o vážený průměr, kdy vnitřní body jsou započteny dvojnásobnou vahou.

Integrál na intervalu $[100, 800]$ vypočteme díky aditivitě vzhledem k integračnímu oboru

$$\int_{100}^{800} \lambda(T)\,\mathrm{d}T = \int_{100}^{400} \lambda(T)\,\mathrm{d}T + \int_{400}^{800} \lambda(T)\,\mathrm{d}T$$

a pro každý integrál máme data v ekvidistantních krocích a můžeme použít přímo lichoběžníkové pravidlo.

6.6 Růst populace a jejich přežívání

Populace živočišného druhu činí 5600 jedinců a tato populace roste rychlostí

$$R(t) = 720e^{0.1t}$$

jedinců za rok. (V tomto čísle je zahrnuta přirozená natalita, mortalita a povolený lov.) Vlivem znečištění životního prostředí se však jedinci dožívají kratšího věku, než je zahrnuto v popsaném modelu. Zlomek populace, který přežije časový interval délky t, je

$$S(t) = e^{-0.2t}.$$

Odhadněte počet živočichů za 10 let a odhadněte, jaký by tento počet byl, kdyby k žádnému znečištění nedocházelo, tj. kdyby bylo $S(t) = 1$.

Napište jenom příslušné integrály a okomentujte, jakými metodami bychom je počítali. Vlastní výpočet provádět nemusíte.

(Podle J. Stewart, T. Day: Biocalculus, Calculus for Life Sciences.)

Řešení: Nechť výchozí stav je rok $t = 0$.

Bez znečištění: Pokud je $N(t)$ počet jedinců po roce t, platí

$$N(10) = N(0) + \int_0^{10} R(t)\,\mathrm{d}t = 5600 + \int_0^{10} 720e^{0.1t}\,\mathrm{d}t = 5600 + \left[7200e^{0.1t}\right]_0^{10} \approx 18000,$$

kde integrál se dá vypočítat přímou integrací pomocí vzorce.

Se znečištěním: Jedinci, kteří jsou v populaci na začátku, musí přežít 10 let, to znamená, že se jejich počet sníží na $S(10)$-násobek. Jedinci, kteří se narodí v roce t musí přežít $10-t$ let a to znamená, že jejich počet se sníží na $S(10-t)$-násobek. Toto snížení musíme započítat do předchozího modelu bez znečištění a dostaneme

$$\begin{aligned} N(10) &= N(0)S(10) + \int_0^{10} R(t)S(10-t)\,\mathrm{d}t = \\ &= 5600e^{-2} + \int_0^{10} 720e^{0.1t}e^{-0.2(10-t)}\,\mathrm{d}t \\ &= 5600e^{-2} + 720e^{-2}\int_0^{10} e^{0.3t}\,\mathrm{d}t = \cdots = 7000, \end{aligned}$$

kde i tento integrál se dá vypočítat přímou integrací pomocí vzorce.

6.7 Rodičovské stromy

Při obnově lesů je nutné velké množství sadebního materiálu. Kromě školek hrají při obnově lesa důležitou roli rodičovské stromy. Plošná hustota semen (například v počtu semen na metr čtvereční) ve vzdálenosti r od stromu je dána funkcí

$$D(r) = D_0 e^{-r^2/a^2}.$$

Pro vhodnou volbu jednotek dosáhneme toho, že platí $a = 1$. Pracujme proto s funkcí

$$D(r) = D_0 e^{-r^2}.$$

Určete množství semen uvnitř kruhu o poloměru R.

Napište jenom příslušný integrál a okomentujte, jakou metodou bychom ho počítali. Vlastní výpočet provádět nemusíte.

(Volně přeformulováno podle L. Edestein–Keshet: Differential calculus for the life sciences. Strom na obrázku je rodičovský strom ekotypu Posázavského smrku ztepilého. Slouží k záchraně genových zdrojů lesních dřevin.)

Řešení: Množství semen na metr čtvereční závisí na vzdálenosti od stromu, je to tedy podobná úloha jako úloha s prouděním tekutiny potrubím v přednášce. Postupujeme analogicky, jenom místo rychlosti tekutiny máme hustotu semen. Množství je součin hustoty a obsahu, $N = S \cdot D$. Protože D není na celém obsahu konstantní, rozdělíme na části, kde konstantní je, a příspěvky sečteme, tj.

$$N = \sum_{kruh} D \cdot \Delta S.$$

Protože D je funkce r, potřebujeme sčítat (integrovat) přes r. Proto kruh dělíme na mezikruží a přes tato mezikruží sčítáme, tj.

$$N = \sum_{kruh} D \frac{\Delta S}{\Delta r} \Delta r.$$

Limitním přechodem uděláme skok v součtu nekonečně malý a součet přejde na integrál, podíl změn přejde na derivaci, tj. dostaneme

$$N = \int_{kruh} D \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} \,\mathrm{d}r.$$

Obsah $S = \pi r^2$ roste s poloměrem, $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r$. Po dosazení této derivace a po dosazení za D a vyjádření toho, co znamená integrál přes kruh o poloměru R získáme integrál

$$N = \int_0^R D_0 e^{-r^2} 2\pi r \,\mathrm{d}r,$$

který můžeme vypočítat pomocí substituce $-r^2 = t$.

7 Diferenciální rovnice

7.1 Řešení ODE a IVP

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^2$

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = te^y$

(3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{y}$

(4) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$

(5) $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = kr^3, \quad r(0) = r_0 > 0$

(6) $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2, \quad m(0) = 0$

(7) $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2, \quad m(0) = -2$

Umění najít řešení diferenciální rovnice je sympatické, není to však nic proti umění sestavit model (naučili jsme se již ve druhém týdnu, připomeneme si v následujícím modelu), umění posoudit jednoznačnost řešení (většina modelů se řeší numericky a musíme být přesvědčeni o smysluplnosti takové činnosti) a stabilitu řešení (řešení, která nejsou stabilní, jsou sice v souladu s přírodními zákony, ale pravděpodobnost jejich spontánního výskytu je nulová). Jednoznačnost a zjednodušenou verzi stability řešení (stabilita konstantních řešení) jsme viděli na přednášce a připomeneme v dalších příkladech.

Řešení:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \cdot y^2$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice
$$y^2 = 0,$$
tj. je jediné konstantní řešení
$$y = 0.$$
- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci
$$y^{-2}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x$$
a integrováním
$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t \cdot e^y$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice
$$e^y = 0.$$
Protože tato rovnice nemá řešení, zadaná diferenciální rovnice nemá konstantní řešení.
- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci
$$e^{-y}\mathrm{d}y = t\mathrm{d}t$$
a integrováním
$$-e^{-y} = \frac{1}{2}t^2 + C.$$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \cdot \sqrt{y}$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice
$$\sqrt{y} = 0,$$
tj. jediné řešení
$$y = 0.$$
- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci
$$\frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x$$
a integrováním
$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$

- Konstantní řešení
$$y = 0$$
(viz předchozí příklad) nesplňuje počáteční podmínku a proto jej nemusíme uvažovat
- Obecné řešení
$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$
dává po dosazení $x = 0$ a $y = 1$ rovnici
$$2\sqrt{1} = 0 + C.$$
Odsud dostáváme $C = 2$ a řešení zadané počáteční úlohy je
$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 2.$$

(5) $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = k \cdot r^3, \quad r(0) = r_0 > 0$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice
$$r^3 = 0,$$
tj. jediné konstantní řešení je
$$r = 0$$
a toto řešení nesplňuje počáteční podmínku.
- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci
$$r^{-3}\mathrm{d}r = k\mathrm{d}t$$
a integrováním
$$-\frac{1}{2}r^{-2} = kt + C.$$
Dosazením počáteční podmínky $t = 0$, $r = r_0$ dostáváme
$$-\frac{1}{2}r_0^{-2} = C.$$
Tím je dána konstanta C a po použití této konstanty v obecném řešení dostáváme řešení počáteční úlohy ve tvaru
$$-\frac{1}{2}r^{-2} = kt - \frac{1}{2}r_0^{-2}.$$

(6) $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2, \quad m(0) = 0$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice
$$m + 2 = 0,$$
tj.
$$m = -2$$
a toto řešení nesplňuje počáteční podmínku.
- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci
$$\frac{1}{m+2}\mathrm{d}m = dt$$
a integrováním
$$\ln|m + 2| = t + C.$$

Po dosazení počáteční podmínky $t = m = 0$ dostáváme

$$C = \ln 2$$

a počáteční úloha má řešení

$$\ln(m + 2) = t + \ln(2).$$

(Vzhledem k počáteční podmínce je m kladné a nemusíme psát absolutní hodnotu.)

(7) $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2, \quad m(0) = -2$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice
  $$m + 2 = 0,$$
  tj.
  $$m = -2.$$
  Toto řešení splňuje počáteční podmínku.
- Pravá strana má ohraničenou (dokonce konstantní) derivaci podle m. Proto je řešení každé počáteční úlohy určeno jednoznačně. Řešení z předchozího bodu je jediné a další nemusíme hledat.

7.2 Tloušťka ledu

Takzvaný Stefanův zákon (J. Stefan, Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere, 1891) vyjadřuje že tloušťka ledu na hladině moře roste ve stabilních podmínkách rychlostí nepřímo úměrnou této tloušťce. Zapište tento fakt pomocí vhodného matematického modelu a najděte řešení vzniklé diferenciální rovnice.

Řešení:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{k}{h}\\
h\,\mathrm{d}h &= k\,\mathrm{d}t\\
\int h\,\mathrm{d}h &= \int k\,\mathrm{d}t\\
\frac{h^2}{2} &= kt + C
\end{aligned}$$

7.3 Model vypouštění nádrže

Z fyziky je známo, že rychlost s jakou vytéká tekutina otvorem u dna nádoby je úměrná odmocnině výšky hladiny (protože se mění potenciální energie úměrná výšce na kinetickou energii úměrnou druhé mocnině rychlosti). Proto je i rychlost s jakou se zmenšuje objem vody v nádrži úměrná odmocnině výšky hladiny.

Ukažte, že matematickým popisem procesu je diferenciální rovnice. Napište rovnici pro výšku hladiny vody v nádrži jako funkci času. Uvažujte tři případy: nádrž **cylindrického tvaru** (válec postavený na podstavu), nádrž ve tvaru **kvádru** a nádrž ve tvaru **kužele** otočeného vrcholem dolů (trychtýř).

V tomto příkladě vystupuje derivace jak rychlost, ale po přepisu zadání do modelu máme v rovnici dvě různé veličiny, které se mění: objem vody a výšku hladiny. Musíme ještě najít a použít vztah mezi rychlostmi změn těchto veličin. Fyzikální zákon je formulován pro derivaci objemu a nás zajímá derivace výšky.

Řešení: Buď V objem vody a h výška hladiny od dna. Podle zadání ve všech případech platí

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -k_1\sqrt{h}$$

a musíme derivaci $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ vyjádřit pomocí $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$.

Pro cylindr, kvádr nebo jakoukoliv nádrž se svislými stěnami je objem úměrný výšce hladiny, $V = k_2 h$, a proto $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = k_2 \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$. Odsud

$$k_2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -k_1\sqrt{h},$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{k_1}{k_2}\sqrt{h}$$

a pro $k = \dfrac{k_1}{k_2}$ má model tvar

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{h}.$$

Pro kužel platí $V = k_3 h^3$ (díky podobnosti je objem přímo úměrný třetí mocnině libovolného délkového parametru) a proto $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = k_3 \times 3h^2 \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$. Odsud

$$3k_3 h^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -k_1\sqrt{h},$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{k_1}{3k_3} h^{-3/2}$$

a po přeznačení konstanty má model pro kuželovou nádrž tvar

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -kh^{-3/2}.$$

7.4 Problematika jednoznačnosti v modelu vypouštění nádrže

Ve cvičení 7.3 jsme odvodili rovnici

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{h}$$

popisující úbytek hladiny vody v nádrži tvaru kvádru, ze které vypouštíme vodu.

A) Zkontrolujte, že pro $h > 0$ má každá počáteční úloha jediné řešení. Interpretujte tento výsledek prakticky.

B) Pro $h = 0$ by řešení nemuselo být určeno jednoznačně. A opravdu není. Řešením je například $h(t) = 0$ nebo

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}k^2t^2 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

Zkontrolujte dosazením (pozor: pro $t < 0$ platí $\sqrt{t^2} = |t| = -t$) a rozmyslete, jestli nejednoznačnost je jenom matematický trik, nebo jestli má fyzikální interpretaci.

Řešení:

A) Nabídneme dvě varianty, pro argumentaci je možno použít kteroukoliv z nich.

- **Podle obecné věty o jednoznačnosti:** Stačí ověřit, že pravá strana má ohraničenou parciální derivaci podle h. Protože platí

$$\frac{\partial}{\partial h}(k\sqrt{h}) = k\frac{1}{2}h^{-1/2} = \frac{k}{2\sqrt{h}}$$

a tato derivace je definovaná a ohraničená v nějakém okolí libovolného bodu splňujícího $h > 0$. Podle věty o existenci a jednoznačnosti řešení obecné diferenciální rovnice má počáteční úloha právě jedno řešení.

- **Podle věty o jednoznačnosti pro rovnici se separovanými proměnnými:** Stačí ověřit, že část závislá na h je nenulová. Toto jistě platí, protože pro $h > 0$ je $\sqrt{h} \neq 0$.

Pokud je tedy v nádrži nějaká voda, je jednoznačně dáno, jak bude vytékat a je možné vypočítat, jaká bude v libovolném okamžiku hladina.

B) Pro $h = \frac{1}{4}k^2t^2$ a $t < 0$ dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4}k^2 \cdot 2t = \frac{1}{2}k^2t$$

$$-k\sqrt{h} = -k\sqrt{\frac{1}{4}k^2t^2} = -k\frac{1}{2}|k| \cdot |t| = -k\frac{1}{2}k(-t) = \frac{1}{2}k^2t$$

a obě strany rovnice jsou stejné. Pro $h = 0$ je dosazení triviální.

Je-li $h(t_0) = 0$, může to být proto, že voda v čase t_0 právě vytekla, nebo proto, že vytekla před hodinou nebo proto, že v nádrži nikdy voda nebyla. Proto je nejednoznačnost přirozená. Například $h(t) = 0$ je řešení odpovídající tomu, že voda v nádrži nikdy nebyla. Funkce $h(t) = \frac{1}{4}k^2t^2$ pro $t < 0$ odpovídá tomu, že pro $t < 0$ v nádrži voda byla a vytekla v čase $t = 0$.

7.5 Stavebniny vedle čebínského nádraží: model

Hromada sypkého materiálu má tvar kužele. Úhel u vrcholu je konstantní, daný mechanickými vlastnostmi materiálu a je nezávislý na objemu. Předpokládejme, že personál stavebnin přisypává na hromadu materiál konstantní rychlostí (v jednotkách objemu za jednotku času). Tato hromada je však v poměrně otevřené krajině a vítr rozfoukává materiál po okolí. Je rozumné předpokládat, že rozfoukávání (opět v jednotkách objemu za jednotku času) se děje rychlostí úměrnou povrchu návětrné strany pláště. Vyjádřete proces kvantitativně pomocí derivací. Napište rovnici pro derivaci objemu hromady podle času.

Toto je podobný model jako model vypouštění nádrže, ale kratší. Opět máme po přepisu zadání do matematického modelu dvě veličiny měnící se s časem v jedné rovnici. Derivace objemu, která nás zajímá, již v rovnici přítomna naštěstí je. Stačí vyjádřit obsah pomocí objemu, nejlépe pomocí rozměrové analýzy.

Řešení: Rychlost s jakou se mění objem je $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$, rychlost přisypávání označme R, povrch návětrné strany S. Podle zadání platí

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = R - k_0S.$$

Protože kužel má stále stejný tvar, objem jednoznačně determinuje rozměry, povrch kužele, nebo i povrch poloviny pláště, tj. povrch návětrné strany. Z rozměrové analýzy na základě Buckinghamova Pi-teorému z přednášky je zřejmé, že musí platit úměrnost mezi takovými mocninami těchto veličin, pro které jednotky "pasují", Existuje tedy konstanta taková, že

$$S = k_1V^{\frac{2}{3}}.$$

Spojením těchto dvou vztahů dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = R - k\,V^{\frac{2}{3}},$$

kde r a $k = k_0k_1$ jsou konstanty.

7.6 Stavebniny vedle čebínského nádraží: stabilita řešení

Hromada sypkého materiálu má tvar kužele. Úhel u vrcholu je konstantní, daný mechanickými vlastnostmi materiálu a je nezávislý na objemu. V předchozím příkladě jsme sestavili diferenciální rovnici popisující růst hromady ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = R - kV^{\frac{2}{3}},$$

kde R je rychlost přisypávání a k konstanta.

- Existuje konstantní řešení? Pokud ano, je stabilní nebo nestabilní? Zdůvodněte.
- Může hromada skončit i při neustálém přisypávání celá rozfoukaná?
- Mohou pracovníci navršit hromadu do libovolné výšky anebo pro velkou hromadu je již rozfoukávání rychlejší než přisypávání?

Řešení: Označme $f(V) = R - kV^{\frac{2}{3}}$. Konstantní řešení je řešením rovnice $f(V) = 0$, tj.

$$R - kV^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Odsud

$$V_0 = \left(\frac{R}{k}\right)^{3/2}.$$

Protože f klesá v bodě V_0, je toto řešení stabilní.

Protože $f(0) > 0$, malá hromada vždy roste a proto nemůže skončit celá rozfoukaná. Pro malý objem je přisypávání intenzivnější než rozfoukávání.

Protože f je pro velké V záporná, pro velkou hromadu objem ubývá (více se rozfouká než přisype) a hromadu není možné navršit libovolně velkou.

8 Matice

8.1 Násobení matic

Vynásobte matice A a B pro obě pořadí násobení.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vynásobte matice B a C pro obě pořadí násobení, je-li

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

V tomto příkladě si vyzkoušíme násobení matic a kromě toho uvidíme, že násobení diagonální maticí je v jistém smyslu jednoduché. Podle toho, v jakém pořadí násobíme matice, se diagonálními prvky se násobí řádky nebo sloupce druhé matice.

Řešení: S rozepsáním pomocí lineárních kombinací vektorů tvořených sloupci matice A dostáváme

$$2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$-2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\-1\\-6\end{pmatrix}$$

Odsud dostáváme

$$AB = \begin{pmatrix}4 & -3 & 13\\-1 & 2 & -1\\0 & 0 & -6\end{pmatrix}$$

Jinou metodou, s podrobným rozepsáním pomocí skalárního součinu řádků první matice a sloupců druhé matice dostáváme

$$\begin{aligned}AB &= \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & 0\\1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\-1 & 2 & -1\\0 & 1 & 3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1\times 2 - 2\times(-1) + 3\times 0 & 1\times(-2) - 2\times 2 + 3\times 1 & 1\times 2 - 2\times(-1) + 3\times 3\\0\times 2 + 1\times(-1) + 0\times 0 & 0\times(-2) + 1\times 2 + 0\times 1 & 0\times 2 + 1\times(-1) + 0\times 3\\1\times 2 + 2\times(-1) - 2\times 0 & 1\times(-2) + 2\times 2 - 2\times 1 & 1\times 2 + 2\times(-1) - 2\times 3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}4 & -3 & 13\\-1 & 2 & -1\\0 & 0 & -6\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Poté již stručněji (rozepište si sami)

$$BA = \begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\-2 & 2 & -1\\3 & 7 & -6\end{pmatrix} \quad BC = \begin{pmatrix}2 & -6 & 8\\-1 & 6 & -4\\0 & 3 & 12\end{pmatrix} \quad CB = \begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\-3 & 6 & -3\\0 & 4 & 12\end{pmatrix}.$$

V případě součinů s diagonální maticí se diagonálními prvky násobí odpovídající řádky nebo sloupce matice, podle toho, v jakém pořadí součin uvažujeme.

8.2 Soustava rovnic jako násobení matic

Zapište soustavu rovnic pomocí maticového násobení

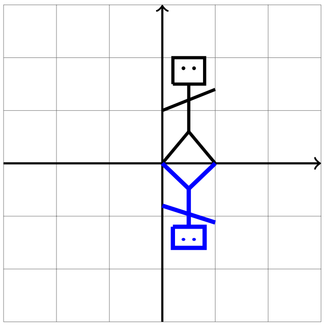
$$\begin{aligned}2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 12\\2x_1 + x_2 + x_3 &= 21\\-x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

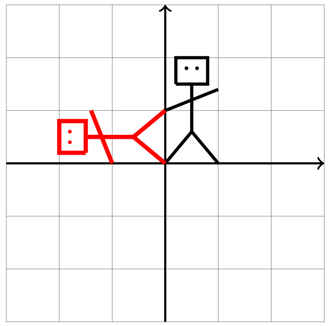
Řešení:

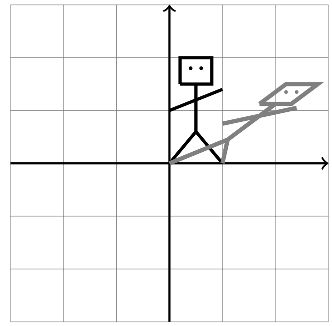
$$\begin{pmatrix}2 & -3 & 2\\2 & 1 & 1\\-1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\21\\0\end{pmatrix}$$

8.3 Timmyho transformace

Figurka na obrázku je Timmy ve třech situacích. Jednou se pozoruje svůj obraz ve vodě, jednou spadl na záda, a jednou vrhá stín. Vyjádřete pomocí matice transformaci, která vzor (černá malůvka) převádí na obraz (barevná malůvka).







Poznámka: Stačí si všímat, kam se zobrazují jednotkové vektory ve směru os, tj. kam se zobrazí Timmiho nakročená noha a Timyho ruka, která je natažená dozadu. Případné neceločíselné složky matice jenom odhadněte. *Podle LAFF Linear Algebra - Foundations to Frontiers (www.ulaff.net)*

Řešení:

Nakročená noha je v bodě $(1, 0)$ a tento bod se transformuje sám na sebe pro krajní obrázky a na bod $(0, 1)$ pro prostřední obrázek. Tím je dán první sloupec matice zobrazení. Ruka natažená dozadu je v bodě $(0, 1)$ a u modrého Timmyho se transformuje (odhadem) na $(0, -0.8)$, u červeného Timmyho na $(-1, 0)$ a u šedého Timmyho (odhadem) na $(1, 0.8)$. Matice jsou postupně

$$M_{\text{modrá}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{pmatrix}, \quad M_{\text{červená}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{\text{šedá}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

8.4 Matice rotace

Matice rotace o úhel θ v kladném smyslu je

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Násobením ověřte, že matice otočení o úhel $-\theta$ je k této matici inverzní.

Návod: Funkce kosinus je sudá funkce a funkce sinus je lichá funkce. Proto platí

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \text{a} \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta.$$

Matice rotace je důležitá v aplikacích zabývajících se deformacemi, protože umožní odfiltrovat tu část změny polohy referenčních bodů, která je způsobena rotací a nepřispívá tedy ke změně tvaru tělesa.

Řešení: Při zkratce $S = \sin\theta$ a $C = \cos\theta$ platí

$$R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix}$$

a potom

$$R_\theta R_{-\theta} = \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 + S^2 & CS - SC \\ SC - CS & S^2 + C^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde jsme využili identitu

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

8.5 Matice posunutí

Transformace pomocí násobení matic zachovává počátek a nemůže proto charakterizovat například posunutí roviny. Pokud chceme mít pomocí maticového násobení realizováno i posunutí, musíme zavést homogenní souřadnice a ztotožnit bod (x, y) s vektorem $(x, y, 1)^T$. Ukažte, že matice

$$P_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice posunutí o a doprava a b nahoru. Odhadněte, jak bude vypadat matice popisující opačnou transformaci a pro jedno nějaké pořadí součinu ověřte, že součin těchto matic je jednotková matice.

Řešení: Platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{pmatrix}$$

a vidíme, že k souřadnici x se přičítá a a k souřadnici y se přičítá b. Inverzní zobrazení bude posunutí o a doleva a o b dolů, tj.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přímým výpočtem vidíme, že platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.6 Matice, zachovávající význačné směry

Dřevo má tři výrazné směry a pokud máme možnost zvolit souřadnou soustavu tak, aby tyto směry byly dány vektory $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$ a $(0, 0, 1)^T$, formulace fyzikálních zákonů se zjednoduší. Nyní si ukážeme proč. Najděte

1. nejobecnější matici 3×3, která zachovává směr vektoru $(1, 0, 0)^T$,
2. nejobecnější symetrickou matici 3×3, která zachovává směr vektoru $(1, 0, 0)^T$,
3. nejobecnější symetrickou matici 3×3, která zachovává směr vektorů $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$.

V tomto příkladě uvidíme, že matice zachovávající směr os souřadnic jsou v určitém smyslu pěkné.

Řešení: ad 1.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}$$

a vektory $(1, 0, 0)^T$ a $(a, d, g)^T$ musí mít stejný směr. Proto $d = g = 0$ a nejobecnější matice s danou vlastností je matice, která ve druhém a třetím řádku začíná nulou.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}$$

ad 2. Jako minulý případ, ale aby byla matice symetrická, musí být také $b = c = 0$, a $h = f$ tj.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & f & i \end{pmatrix}.$$

ad 3. Jako minulý případ, ale ještě se musí zachovávat směry vektorů $(0, 1, 0)^T$ a $(0, 0, 1)^T$. Platí

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ f \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ i \end{pmatrix}$$

a aby vzor a obraz měly stejný směr, musí být $f = 0$. Nejobecnější symetrická matice, která zachovává směr všech tří základních bázových vektorů je matice, která má mimo hlavní diagonálu nuly.

8.7 Matice derivování

Ukažte, že matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ je matice derivování polynomů stupně nejvýše 2, pokud polynom $ax^2 + bx + c$ ztotožníme s vektorem $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Vysvětlete, jak bychom interpretovali matici A^2 a A^3 a tyto matice vypočtěte.

Návod: je možné ukázat buď pro obecný polynom $ax^2 + bx + c$, nebo samostatně pro polynomy x^2, x a 1 a poté si všimnout, že ostatní polynomy můžeme dostat lineárními kombinacemi a maticová násobení tyto lineární kombinace nepokazí díky tomu, že je distributivní a komutuje při násobení s konstantou. V tomto příkladě mimo jiné vidíme, že mocnina nenulové matice může být nula. To je efekt, který nemá obdobu u násobení reálných čísel.

Řešení: Polynom x^2 má derivaci $2x$, tj. v označení pomocí vektorů se musí vektor $(1, 0, 0)^T$ zobrazit na $(0, 2, 0)^T$. Toto snadno ukážeme, že platí, protože se vlastně jedná o první sloupec matice A. Podobně, polynom x má derivaci 1 a polynom 1 má derivaci 0, tj. v označení pomocí vektorů se musí vektory $(0, 1, 0)^T$ a $(0, 0, 1)^T$ zobrazit na $(0, 0, 1)^T$ a $(0, 0, 0)^T$. Opět vidíme snadno, že pro naši matici A platí (dostáváme vlastně druhý a třetí sloupec matice A).

Protože libovolný polynom druhého stupně dostaneme pomocí lineárních kombinací výše uvedených vektorů a protože tyto lineární kombinace zůstanou při maticovém násobení zachovány, je při výše definovaném zobrazení obrazem libovolného polynomu druhého stupně jeho derivace.

Pro obecný polynom $ax^2 + bx + c$ s derivací $2ax + b$ vidíme, že obrazem vektoru $(a, b, c)^T$ musí být $(0, 2a, b)^T$, což matice A opět (po krátkém výpočtu) splňuje.

Matice A^2 je druhá derivace a A^3 třetí derivace a mají tvar

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.8 Matice projekce

Matice $P = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$ reprezentuje kolmou projekci na přímku, která jde počátkem soustavy souřadnic a svírá s kladnou částí osy x úhel α.

1. Ukažte, že platí $P^2 = P$.
2. Ukažte, (nemusíte výpočtem, například graficky, nebo využitím toho, že každý bod přímky se zobrazí sám na sebe) že dva různé body se projekcí mohou zobrazit na stejný bod a proto není naděje na to mít inverzní zobrazení. Proto neexistuje inverzní matice.

Řešení: Pro $C = \cos\alpha$ a $S = \sin\alpha$ dostáváme

$$\begin{aligned} P^2 &= \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^4 + C^2S^2 & C^3S + CS^3 \\ C^3S + CS^3 & C^2S^2 + S^4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C^2(C^2+S^2) & CS(C^2+S^2) \\ CS(C^2+S^2) & S^2(C^2+S^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix} = P \end{aligned}$$

Evidentně jakýkoliv bod mimo přímku projekce a jeho obraz jsou dva různé body, které mají stejný obraz. Proto nemůže existovat inverzní zobrazení.

Pro determinant platí

$$|P| = \begin{vmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{vmatrix} = C^2S^2 - (CS)(CS) = C^2S^2 - C^2S^2 = 0$$

a tento výpočet potvrzuje, že neexistuje inverzní matice.

9 Determinanty, soustavy rovnic

9.1 Určete následující determinanty

1. $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$
2. $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ x-4 & y-3 \end{vmatrix}$

   ($D_2 = 0$ je přímka daná bodem $(4,3)$ a směrovým vektorem $(2,-1)$)
3. $D_3 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ (charakteristický polynom matice z prvního bodu)
4. $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
5. $D_5 = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
6. $D_6 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix}$ (charakteristický polynom diagonální matice)

Řešení:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 6 + 4 = 10 \\
D_2 &= 2 \cdot (y - 3) - (-1) \cdot (x - 4) = 2y - 6 + x - 4 = x + 2y - 10 \\
D_3 &= (2 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) - (-1) \cdot 4 = \lambda^2 - 5\lambda + 10 \\
D_4 &= 12 \\
D_5 &= 7a + 5 \\
D_6 &= (2 - \lambda)(3 - \lambda)(7 - \lambda)
\end{aligned}
$$

9.2 Soustava lineárních rovnic s jediným řešením

Vyřešte soustavu rovnic.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

Soustava rovnic je asi nejdůležitější aplikace lineární algebry, ale v dnešním světě není důvod ji řešit ručně. Je však užitečné si alespoň základní manipulace vyzkoušet na jednoduchém příkladě. Tento moc času nezabere.

9.3 Soustava lineárních rovnic s nekonečně mnoha řešeními

Vyřešte soustavu rovnic.

$$
\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Soustava s nekonečně mnoha řešeními typicky vychází při hledání vlastních čísel matice. Na tomto příkladě si osaháme případ homogenní soustavy a jednoparametrického řešení, tj. případ, který při výpočtu vlastních vektorů vychází nejčastěji.

10 Vlastní čísla a směry

10.1 Vektor, který není vlastním směrem

Ukažte, že vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ není vlastním směrem matice

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.
$$

Řešení: Pomocí maticového násobení vidíme, že platí

$$
A\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}.
$$

Výsledkem zobrazení vektoru pomocí matice je vektor který není násobkem původního vektoru (podle první komponenty by se muselo jednat o trojnásobek, ale to nekoresponduje s druhou komponentou) a proto se nejedná o vlastní vektor matice.

10.2 Vektor, který je vlastním směrem

Ukažte, že vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ je vlastním směrem matice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a určete příslušné vlastní číslo

Řešení: Pomocí maticového násobení vidíme, že platí

$$A\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Výsledkem zobrazení vektoru $\vec{a}$ pomocí matice je vektor $\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}$, který je šestinásobkem původního vektoru $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Protože je obraz násobkem vzoru, jedná se o vlastní vektor matice. Příslušné vlastní číslo je 6, protože se vektor zobrazuje na svůj šestinásobek.

10.3 Vlastní čísla a vektory matice 2×2

Najděte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a jim příslušné vlastní vektory.

Řešení:

Vlastní čísla jsou nulovými body determinantu

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda) - (2)(2) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3).$$

Vlastní číslo $\lambda_1 = 2$. Protože platí

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která má nekonečně mnoho řešení. Musíme najít alespoň jendo nenulové řešení. Pokud zapíšeme jako soustavu rovnic, dostáváme druhou rovnici ve tvaru

$$2x_1 - x_2 = 0$$

a první rovnice je jejím násobkem. Volbou $x_1 = 1$ dostáváme $x_2 = 2x_1 = 2$ a vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$ je $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tento vektor je dán jednoznačně až na nenulový konstantní násobek.

Vlastní číslo $\lambda_2 = -3$. Protože platí

$$A - (-3)I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která má nekonečně mnoho řešení. Musíme najít alespoň jendo nenulové řešení. Pokud zapíšeme jako soustavu rovnic, dostáváme první rovnici ve tvaru

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

a druhá rovnice je jejím násobkem. Volbou $x_2 = 1$ dostáváme $x_1 = -2x_2 = -2$ a vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = -3$ je $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tento vektor je dán jednoznačně až na nenulový konstantní násobek.

10.4 Transformace matice 2×2 na diagonální tvar

Uvažujme symetrickou matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Určete vlastní čísla a jednotkové vlastní vektory této matice.
2. Sestavte matici P tak, aby ve sloupcích obsahovala jednotkové vlastní vektory. Pokud je to možné, napište matici P tak, aby její determinant byl kladný.
3. Ověřte, že $P^T AP = D$ je diagonální matice.

Návod: Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

Řešení: Charakteristický polynom je

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2)$$

a vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 4$. Protože platí

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

je vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ_1 řešením soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

To je vlastně dvakrát zopakovaná rovnice

$$x_1 + x_2 = 0,$$

která má řešení například $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$. Protože délka vektoru $(1, -1)$ je $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, jednotkový vlastní vektor je $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$. Podobně by se dal najít jednotkový vlastní vektor příslušný druhé vlastní hodnotě, ale protože oba vektory musí být na sebe kolmé, stačí vzít jednotkový vektor, který je k e_1 kolmý, například $e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$. Matici P můžeme vzít s e_1 v prvním a e_2 druhém sloupci, tj.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Rychlý výpočet ukazuje, že matice P má determinant roven jedné. Kdyby vyšel roven minus jedné, stačí prohodit sloupce nebo jeden sloupec vynásobit faktorem -1.

Pokud ještě před násobením matic vytkneme opakující se faktor z obou matic, násobením dostáváme

$$
\begin{aligned}
P^TAP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Podle očekávání vyšla diagonální matice s vlastními hodnotami v hlavní diagonále.

10.5 Poměr délky vzoru a obrazu vektoru

Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

z minulého příkladu a vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

určete podíl délky obrazu $A\vec{u}$ a vzoru $\vec{u}$ při zobrazení pomocí matice A. Ověřte, že tento podíl leží mezi menší a větší vlastní hodnotou, které jsme vypočítali v předchozím příkladě.

Řešení:

Platí

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a výpočetem délek vektorů dostáváme

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

a

$$||A\vec{u}|| = \sqrt{(-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{26}.$$

Podíl délek je

$$\frac{||A\vec{u}||}{||\vec{u}||} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{5}} \approx 2.28$$

což je podle očekávání hodnota mezi menší a větší vlastní hodnotou, které vyšly v předchozím příkladě.

10.6 Transformace tenzoru pootočením

Uvažujme tyč ve směru osy x namáhanou v ose tahem, při kterém vzniká jednotkové tahové napětí. Tyč je slepena spojem, který svírá s kolmicí na osu úhel θ. (Nakreslete si obrázek.)

1. Ukažte, že pro nenulový úhel θ je normálové napětí ve spoji menší, než by odpovídalo normálovém napětí pro spoj kolmý na osu tyče.
2. Ukažte, že normálové napětí je klesající funkcí úhlu θ na intervalu od nuly do $\frac{\pi}{2}$.
3. Určete normálové a smykové napětí pro extrémní případ $\theta = \frac{\pi}{2}$ a popište, jak by takový spoj vypadal.

4. Určete smykové napětí ve spoji a určte, pro jakou hodnotu úhlu je smykové napětí největší.
5. Určete, jestli je v tomto případě z hlediska působícího napětí výhodnější udělat šikmý spoj po směru nebo proti směru hodinových ručiček.

Řešení:

V souřadné soustavě podle zadání je tah ve směru osy x roven jedné a další komponenty jsou nulové. Tedy $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Budeme otáčet proti směru hodinových ručiček, tj. o kladný úhel θ.

Dostáváme (při zkráceném označení $S = \sin\theta$ a $C = \cos\theta$)

$$\begin{aligned} R^{-1}\sigma R &= \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & -S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & -CS \\ -CS & S^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a normálová a smyková složka napětí jsou po řadě $\cos^2\theta$ a $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}\sin(2\theta)$.

Odsud již dostaneme odpovědi na všechny uvedené otázky.

10.7 Vlastní čísla a vektory matice 3×3.

V cvičení z minulého týdne jsme ukázali, že nejobecnější symetrická matice zachovávající směr vektoru $(1,0,0)^T$ má v prvním řádku a prvním sloupci jenom jeden nenulový prvek, prvek v hlavní diagonále.

Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

která je tohoto typu. Určete vlastní čísla a zbylé vlastní vektory matice.

Řešení: Podle zadání víme, že jeden z vlastních vektorů je $e_1 = (1,0,0)^T$ a protože se zobrazí na pětinásobek, je příslušná vlastní hodnota $\lambda_1 = 5$. Charakteristický polynom je

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} &= (5-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) - (5-\lambda) \times 2 \times 2 \\ &= (5-\lambda)\Big[(2-\lambda)(5-\lambda) - 4\Big] \\ &= (5-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6) = (5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-6) \end{aligned}$$

Další dvě vlastní hodnoty jsou $\lambda_2 = 1$ a $\lambda_3 = 6$

Uvažujme matici

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soustava

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

má řešení $x_1 = 0$ (plyne z první rovnice) a například $x_2 = 2$ a $x_3 = -1$ (plyne z druhé a třetí rovnice, které jsou jedna násobkem druhé). Vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě $\lambda_2 = 1$ je $e_2 = (0,2,-1)^T$.

Uvažujme matici

$$A - 6I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soustava

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

má řešení $x_1 = 0$ (plyne z první rovnice) a například $x_2 = 1$ a $x_3 = 2$ (plyne z druhé a třetí rovnice, které jsou jedna násobkem druhé). Vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě $\lambda_3 = 6$ je $e_3 = (0, 1, 2)^T$.

11 Parciální derivace, rovnice vedení tepla

11.1 Difuzní rovnice ve 2D

Rozepište difuzní rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \nabla \cdot (D \nabla u)$$

ve dvourozměrném případě do kartézských souřadnic za předpokladu, že souřadné osy jsou ve vlastních směrech difuzní matice.

Okomentujte, jak předpoklady o vlastnostech materiálu a o modelovaném procesu (stacionárnost, existence či neexistence zdrojů, homogenita materiálu, stejné chování v různých směrech apod.) ovlivní výslednou rovnici.

Poznámka: Difuzní rovnice dokáže například objasnit i to, proč jednotný mechanismus tvorby vzorů na srsti savců vede jednou k pruhům a jednou ke skvrnám na srsti. Dokážeme tak například lépe pochopit proces, jakým se geny přepisují do viditelných znaků. Podrobněji Murray: Mathematical biology nebo How the leopard gets its spots.

11.2 Stacionární vedení tepla, lineární materiál

Najděte rozložení teploty v homogenní stěně při stacionárním vedení tepla a v materiálu s lineární materiálovou odezvou (koeficient tepelné vodivosti je konstantní). Jinými slovy, najděte všechny funkce splňující

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$$

pro $T = T(x)$ a $k \in \mathbb{R}^+$.

Poznámka: Výsledek se dá použít i pro stěnu složenou z různých vrstev. Postupuje se tak, že se jednotlivé vrstvy nahradí ekvivalentními vrstvami z jednoho materiálu. Například vrstva z materiálu s polovičním koeficientem tepelné vodivosti se nahradí vrstvou, která je dvojnásobně silná.

Poznámka: Na stejnou úlohu se stejnou rovnicí a stejným řešením vede například ***proudění podzemní vody ve zvodni s napjatou hladinou*** *(představou může být podzemní voda protékající půdou a shora i zdola ohraničená nepropustnou vrstvou).*

Řešení:

Rovnici můžeme vydělit konstantou k

Po zintegrování dostáváme

$$\frac{\partial T}{\partial x} = C_1$$

a po dalším zintegrování

$$T = C_1 x + C_2.$$

Teplota se mění lineárně. Dvě konstanty se určí pomocí dvou teplot na hranicích stěny.

11.3 Stacionární vedení tepla, nelineární materiál

Najděte rozložení teploty v homogenní stěně při stacionárním vedení tepla a v materiálu s nelineární materiálovou odezvou (koeficient tepelné vodivosti není konstantní). Použijte lineární závislost koeficientu tepelné vodivosti na teplotě. Jinými slovy, najděte všechny funkce splňující

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$$

pro $T = T(x)$ a $k = a + bT$, $a, b \in \mathbb{R}$.

*Poznámka: Výpočet necháme kvalitativní abychom viděli, že **teplotní profil ve stěně není lineární**. Pro užitečnost v inženýrských aplikacích je vhodné přidat okrajové podmínky a vyjádřit řešení pomocí parametrů v těchto okrajových podmínkách. To jsou typicky teploty na jednotlivých stranách stěny.*

*Poznámka: Na stejnou úlohu se stejnou rovnicí a stejným řešením, pouze pro $a = 0$, vede například proudění **podzemní vody ve zvodni s volnou hladinou** (narozdíl od předchozího příkladu chybí horní nepropustná vrstva).*

Řešení: Po zintegrování dostáváme

$$(a + bT)\frac{\partial T}{\partial x} = C_1$$

a rovnici řešíme jako diferenciální rovnici se separovanými proměnnými. Odseparováním získáme

$$(a + bT)\mathrm{d}T = C_1 \mathrm{d}x$$

a po zintegrování

$$aT + \frac{1}{2}bT^2 = C_1 x + C_2.$$

Řešením je parabola otočená naležato. Dvě konstanty se určí pomocí teplot na hranicích stěny. Pro správný profil je nutné si vybrat správnou část paraboly tak, aby teplota zůstala mezi teplotami na krajích stěny.

11.4 Stacionární vedení tepla v žebru chladiče

Vyjímečně jsme nuceni do rovnice vedení tepla zahrnout i zdroje. Modelujte vedení tepla v žebru chladiče. Úlohu uvažujte jako jednorozměrnou, materiál homogenní izotropní s konstantní tepelnou vodivostí. Kolem chladiče proudí vzduch a teplotě T_0 a chladič ztrácí teplo rychlostí úměrnou rozdílu teploty žebra v daném místě a teploty okolního vzduchu. (Koeficient úměrnosti je dán koeficient přestupu tepla a šířkou žebra). Uvažujte stacionární děj.

Řešení:

$$0 = -h(T - T_0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)$$

Ke stejnému závěru je možné dojít i přesnou analýzou ve 3D, viz Cengel, Heat transfer, kapitola 3–6 Heat transfer from finned surfaces.

11.5 Výpočet parciálních derivací

a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2y + 2xy^3 + x + 1\right)$

b) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2y + 2xy^3 + x + 1\right)$

c) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(5x^4y^3 - 3xy^5 + x^2\right)$

d) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(5x^4y^3 - 3xy^5 + x^2\right)$

Řešení:

a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2y + 2xy^3 + x + 1\right) = 2x \cdot y + 2y^3 + 1 + 0 = 2xy + 2y^3 + 1$

b) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2y + 2xy^3 + x + 1\right) = x^2 + 2x \cdot 3y^2 + 0 + 0 = x^2 + 6xy^2$

c) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(5x^4y^3 - 3xy^5 + x^2\right) = 20x^3y^3 - 3y^5 + 2x$

d) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(5x^4y^3 - 3xy^5 + x^2\right) = 15x^4y^2 - 15xy^4 + 0 = 15x^4y^2 - 15xy^4$

11.6 Rovnice vedení tepla v dvourozměrném materiálu

Teplota ve dvourozměrné desce pro $0 \leq x \leq 10$ a $0 \leq y \leq 10$ zachycené v určitém okamžiku termokamerou je popsána rovnicí

$$T(x, y) = 2y^2 + x^3.$$

Rozměry jsou v centimetrech, teplota ve stupních Celsia. (Formálně to nevychází, ale ke každému členu můžeme dodat konstantu, která rozměr opraví tak, aby výsledek opravdu vycházel ve stupních Celsia. Pro jednoduchost tuto komplikaci vynecháme.)

1. Vypočtěte gradient ∇T a tok tepla $-\lambda \cdot \nabla T$. Součinitel tepelné vodivosti (pro jednoduchost s celými čísly a bez jednotky) je $\lambda = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Určete, zda na levém okraji desky ($x = 0$) teče teplo dovnitř desky nebo z desky ven.
3. Vypočtěte divergenci toku tepla, tj. $\nabla \cdot (-\lambda \cdot \nabla T)$.
4. V desce nejsou zdroje tepla. Ochlazuje se deska uprostřed, nebo otepluje?

Řešení:

Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 3x^2,$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = 4y.$$

Odsud dostáváme gradient

$$\nabla T = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 4y \end{pmatrix}$$

a to tepla

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T = -(3x^2)\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - 4y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15x^2 - 4y \\ -3x^2 - 8y \end{pmatrix}.$$

Pro $x = 0$ a $y > 0$ je první komponenta toku záporná a teplo teče doleva, tj. ven z desky. Divergence je

$$\nabla \cdot \vec{q} = \frac{\partial}{\partial x}(-15x^2 - 4y) + \frac{\partial}{\partial y}(-3x^2 - 8y) = -30x - 8.$$

Pro $x > 0$ je tato divergence záporná a tok tepla slábne. To znamená, že se deska ohřívá. V každém místě a tedy i uprostřed.

12 Dvojný integrál

12.1 Kvadratický moment pro obdélník

Vypočtěte integrál

$$\iint_\Omega y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

přes obdélník se stranami podél os, se středem v počátku a délkou stran a a b, tj. přes množinu Ω danou nerovnostmi

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} \leq & x \leq \frac{a}{2}, \\ -\frac{b}{2} \leq & y \leq \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Řešení:

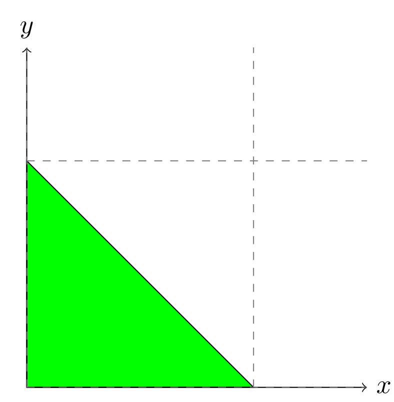
$$\iint_\Omega y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x \times \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \,\mathrm{d}y = a \times \left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = a \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{b^3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{b^3}{8}\right) = \frac{1}{12}ab^3$$

12.2 Těžiště trojúhelníku

Vypočtěte integrál

$$\iint_\Omega x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

přes trojúhelník Ω s vrcholy v bodech $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,1)$ a poté vydělením obsahem trojúhleníka najděte x-ovou polohu těžiště.



Řešení:

Rovnice přímky, ve které leží přepona trojúhelníka, je

$$y = 1 - x$$

a trojúhelník tedy je možno zapsat soustavou nerovností

$$\begin{aligned} 0 \leq & x \leq 1, \\ 0 \leq & y \leq 1 - x. \end{aligned}$$

Použitím těchto nerovností můžeme dvojný integrál transformovat na dvojnásobný a vypočítat.

$$
\begin{aligned}
\iint_\Omega x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 [xy]_0^{1-x} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x - x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

$$x_T = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

12.3 Velikost tlakové síly na hráz přehrady

Viz video ke cvičení a text k přednášce.

12.4 Působiště tlakové síly na hráz přehrady

Viz video ke cvičení a text k přednášce.

13 Shrnutí

Dle časových možností a průběhu semestru: shrnutí nebo opakování nebo výpočet ukázkové písemky nebo rezerva pro případ rektorského nebo děkanského volna, rezerva pro případ státních svátků apod.

14 Archiv

14.1 Pokles hladiny podzemní vody při ustáleném rovinném proudění

Stavovou veličinou pro popis podzemní vody je *piezometrická hladina* h měřená v metrech (hrubá představa může být hladina spodní vody nebo, v případě že je shora ohraničení nepropustnou vrstvou, tak hladina, kam by vystoupila voda ve vrtu). Prostor, kde voda teče, se nazývá *zvodeň* (aquifer). Proudění řídí *Darcyho zákon*, který vyjadřuje, že *filtrační rychlost* v_f podzemní vody je úměrná sklonu piezometrické hladiny, tj. rychlosti, s jakou klesá piezometrická hladina jako funkce x.

A) Zapište Darcyho zákon kvantitativně pomocí derivace piezometrické hladiny.

B) Tok je dán součinem filtrační rychlosti a obsahu plochy kolmo na rychlost. Uvažujte obdélníkovou plochu $h \times 1$, která je na výšku přes celou zvodnělou vrstvu h a na šířku má jednotkovou délku. Vynásobte její obsah filtrační rychlostí a dostanete *průtok na jednotku šířky*, označovaný q. Pro ustálené proudění je q konstantní.

C) Výsledný vztah z předchozího bodu chápejte jako diferenciální rovnici s neznámou funkcí h jako funkcí x a řešením rovnice najdete křivku snížení hladiny podzemní vody v podélném profilu.

(*Podle Dana Říhová a Jana Marková, Poznámky k přednáškám z Hydrauliky, přednáška č. 9.*)

Řešení:

A)

$$v_f = -k\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$$

B)

$$q = -kh\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$$

C)

$$q\,\mathrm{d}x = -kh\,\mathrm{d}h$$
$$\int q\,\mathrm{d}x = -k\int h\,\mathrm{d}h$$
$$qx = -\frac{k}{2}h^2 + C$$

V souřadnicích, kdy osa x směřuje doprava a h nahoru, se jedná se o parabolu "otočenou vrcholem směrem doprava".

14.2 Studna s volnou hladinou

Uvažujme diferenciální rovnici

$$q = -kh\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \tag{*}$$

odvozenou v 14.1 B. Tentokrát budeme studovat studnu s volnou hladinou[1] Je-li studna čerpána konstantní rychlostí Q, je tok na jednotku délky na kružnici o poloměru x roven $q = -\dfrac{Q}{2\pi x}$ (voda teče dovnitř, tj. ve směru ve kterém klesá x). Dosaďte tento vztah do rovnice (*) a rovnici vyřešte s počáteční podmínkou $h(R) = H$, kde H odpovídá hladině vody ve studni a R je poloměr studny (na obrázku h_w a r_w). Dostanete rovnici *snížení hladiny v okolí studny* čerpané rychlostí Q (depresní křivka). (*Volně podle Dana Říhová a Jana Marková, Poznámky k přednáškám z Hydrauliky, přednáška č. 9. Analogickým způsobem se počítají tepelné ztráty při prostupu tepla válcovou stěnou (viz* `https://youtu.be/rvyogmaUmUQ`*).*)

Řešení:

$$-\frac{Q}{2\pi x} = -kh\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{Q}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}x}{x} = k\int h\,\mathrm{d}h$$
$$\frac{Q}{2\pi}\ln x = k\,\frac{h^2}{2} + c$$
$$\text{obecné řešení: } \frac{Q}{\pi}\ln x = k\,h^2 + C$$
$$\text{z počáteční podmínky: } \frac{Q}{\pi}\ln R = k\,H^2 + C$$
$$C = \frac{Q}{\pi}\ln R - k\,H^2$$
$$\text{po dosazení do obecného řešení: } \frac{Q}{\pi}\ln x = k\,h^2 + \frac{Q}{\pi}\ln R - k\,H^2$$
$$\text{po úpravě: } \frac{Q}{k\pi}\ln\frac{x}{R} = h^2 - H^2$$

Tento vztah umožňuje například navrhnout průměr studny, odhadnout vydatnost studny, nebo pomocí odčerpávaného vrtu a menších pomocných vrtů sledujících pokles hladiny v okolí odčerpávaného vrtu stanovit filtrační součinitel k. Využití vzorce

$$\frac{Q}{k\pi}\ln\frac{x}{R} = h^2 - H^2$$

[1] Zjednodušeně, voda ve studni je na úrovni hladiny podzemní vody. Studna nevznikla navrtáním nepropustné vrstvy, kdy by byla voda natlakovaná a vystoupila do výšky odpovídající tomuto tlaku.

je však mnohem rozmanitější, umožňuje vypočítat poměry ve stavebních jámách a v jejich okolí. To je užitečné například při odhadu, kolik vody se hromadí ve výkopu. Další využití je, že dokážeme odhadnout vliv stavební jámy na hydrologické poměry v okolí a tyto poměry dokážeme měnit a přizpůsobovat našim potřebám. Častou aplikací je například hydraulická clona (soustava prvků rozmístěných a provozovaných tak, aby nedocházelo k šíření kontaminace z chemické výroby do vodárensky využívaných vod).

14.3 Rychlost klesání kluzáku

Teplota klesá s výškou o $2°$C na kilometr. Pilot kluzáku vidí, že teplota v okolí jeho kluzáku roste rychlostí 10^{-3}°C/s. Vyjádřete tato pozorování pomocí derivací a určete, jak rychle ztrácí kluzák výšku. Návod: Uvažujte složenou funkci $T(h(t))$ a hledejte její derivaci podle času.

Tento příklad ukazuje, že pravidlo pro derivaci složené funkce je logické. V tomto případě vlastně přepočítává klesání z jednotek stupně Celsia za sekundu na jednotky kilometr výšky za sekundu. Můžete si to zkusit na prstech nebo pomocí trojčlenky a dojdete k tomu stejnému, k čemu pomocí derivace funkce. Při měnících se rychlostech výpočet pomocí trojčlenky použitelný není, pravidlo pro derivaci složené funkce je však k dispozici vždy.

Řešení: Je-li h výška, T teplota a t čas, můžeme zadání přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}h} = -2°\mathrm{C/km}, \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 10^{-3}°\mathrm{C/s}, \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = ?.$$

Vzorec pro derivaci složené funkce $T(h(t))$ dává

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}h} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

a odsud

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}h}}$$

a numericky

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{10^{-3}}{2} = -5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{km\,s^{-1}} = -0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Kluzák klesá rychlostí půl metru za sekundu. To odpovídá i "selskému rozumu", kdy uvažujeme tak, že jeden stupeň Celsia odpovídá půl kilometru, tj. 500 metrů. Za jednu sekundu klesne teplota podle zadání o 10^{-3}°C, což je tisícina z jednoho stupně a tomu odpovídá tisícina z 500 metrů, tedy půl metru. Příklady, které si můžeme alespoň orientačně zkontrolovat výpočtem založeným na "selské logice" jsou obzvlášť cenné, protože nám dávají jistotu nutnou při použití v aplikacích, kde úvaha na provedení výpočtu bez derivací není reálná.

14.4 Změna tlaku a lupání v uších

V dopravním prostředku, který se pohybuje do kopce nebo z kopce, se mění tlak. Tím vznikne tlakový rozdíl mezi vnějším tlakem a tlakem ve středním uchu. Vyrovnání tlaku při rychlé změně se projeví lupnutím v uších. Lupnutí tedy nastane, pokud je derivace $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ velká. (Velká v absolutní hodnotě, tj. numericky hodně kladná nebo hodně záporná.) Tuto veličinu však je těžké měřit. Umíme měřit změnu nadmořské výšky u a víme, jak se tlak p mění s nadmořskou výškou. Nechť například $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u} = -0.12\,\mathrm{g\,cm^{-2}m^{-1}}$ (údaj meteorologů) a vezměme $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Okomentujte význam toho, že derivace jsou záporné a určete rychlost, s jakou rychlostí se mění tlak vzduchu.

Toto je jenom jednodušší obměna příkladu s kluzákem.

Řešení: Derivace jsou záporné, protože tlak s rostoucí výškou klesá a nadmořská výška klesá s časem (vozidlo jede z kopce). Pomocí derivace složené funkce platí

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -0.12\,\mathrm{g\,cm^{-2}m^{-1}} \times (-3\,\mathrm{m\,s^{-1}}) = 0.36\,\mathrm{g\,cm^{-2}s^{-1}}.$$

Tlak roste rychlostí 0.36 gramů na centimetr čtvereční za sekundu.

14.5 Kužel s předepsaným tvarem

Kužel má poměr poloměru podstavy r, výšky h a délky strany s ve tvaru

$$r : h : s = 3 : 4 : 5.$$

Kužel může měnit velikost, ale tento poměr zůstává zachován. (To odpovídá například skladování sypkého materiálu na hromadě nebo skladování tekutiny v trychtýřovitém zásobníku.) Objem a povrch pláště jsou $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ a $S = \pi r s$. Z úvah o podobnosti na přednášce víme, že vzorce pro objem a obsah musí být pro vhodné konstanty a, b, c tvaru

$$V = ar^3,\ S = br^2,\ S = cV^{2/3}.$$

Potvrďte tyto obecné závěry pro náš konkrétní případ přímým výpočtem a použitím uvedených vzorců a poté vypočtěte a podejte interpretaci derivací

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r},\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}.$$

Na tomto příkladě si ověříme platnost pouček, které jsme si na přednášce zmínilo o objemech a površích těles, které jsou si navzájem podobné, tj. vznikají jenom vhodným zvětšením nebo zmenšením stejného referenčního objektu.

Řešení: Ze zadání víme, že platí $s = \dfrac{5}{3}r$ a $h = \dfrac{4}{3}r$ a přímým dosazením vidíme

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{4}{3} r = \frac{4}{9}\pi r^3$$

a

$$S = \pi r \frac{5}{3} r = \frac{5}{3}\pi r^2.$$

Derivováním dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{4}{3}\pi r^2$$

a

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = \frac{10}{3}\pi r.$$

Tyto derivace vyjadřují změnu objemu a povrchu pláště kužele, pokud se kužel zvětší tak, že poloměr podstavy vzroste o jednotku.

Z rovnice pro objem dostáváme

$$r = \left(\frac{9}{4\pi}\right)^{1/3} V^{1/3}$$

a po dosazení

$$S = \frac{5}{3}\pi r^2 = \frac{5}{3}\pi \left(\frac{9}{4\pi}\right)^{2/3} V^{2/3} = 5\pi^{1/3} \left(\frac{3}{16}\right)^{1/3} V^{2/3}$$

14.6 Chemická směs

Chemikálii rozpouštíme v nádrži tak, že do nádrže pumpujeme vodu a směs odčerpáváme. Objem směsi roste podle vztahu $20 + 2t$. Množství chemikálie y klesá rychlostí, která je úměrná y a nepřímo úměrná objemu roztoku v nádrži. Vyjádřete proces kvantitativně pomocí derivací.

Řešení:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky\frac{1}{20 + 2t}$$

14.7 Vysílač Kojál

Moravský vysílač Kojál nedaleko Vyškova je třetí nejvyšší stavbou v ČR a má přibližně tvar hranolu o výšce 340 metrů. (Jeho dvojče, vysílač Krašov je ještě o dva metry vyšší a od roku 2018 tvoří i hlavní součást největších slunečních hodin na světě. Nejvyšší stavbou v ČR je vysílač Liblice B s 355 metry.)

Odhadněte hmotnost vzduchového sloupce, který by zaujímal místo vysílače. Pro tyto potřeby budeme vysílač uvažovat jako hranol. Půdorys odhadneme jako rovnostranný trojúhelník o straně tři metry, což je poměrně realistický model (`http://www.dxradio.cz/jidxc/kojal.htm`). Hustota vzduchu se mění s výškou h (v metrech) podle vzorce

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\rho_0 g h/p_0},$$

kde $\rho_0 = 1.225\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ je hustota vzduchu u země, $p_0 = 101325\,\mathrm{Pa}$ normální tlak vzduchu a $g = 9.81\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$ je tíhové zrychlení (podle Wikipedie). Porovnejte výsledek s výsledkem, který byste dostali, kdybyste ignorovali změnu hustoty s výškou a použili pro hustotu konstantu ρ_0.

Řešení: Hmotnost m je dána vztahem $m = \rho V$, kde ρ je hustota a $V = Sh$ objem hranolu o podstavě S a výšce h. Odsud

$$m = Sh\rho.$$

Protože ρ se mění s výškou, musíme uvažovat jednotlivé vrstvy o výšce Δh samostatně, tj.

$$\Delta m = S\rho\Delta h$$

a posečítat integrálem od země po výšku vysílače $H = 340$.

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^H S\rho \,\mathrm{d}h \\
&= \int_0^H S\rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}} \,\mathrm{d}h \\
&= S\rho_0 \left[-\frac{p_0}{\rho_0 g} e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}} \right]_0^H \\
&= S\rho_0 \left[-\frac{p_0}{\rho_0 g} e^{-\frac{\rho_0 g H}{p_0}} + \frac{p_0}{\rho_0 g} \right] \\
&= \frac{Sp_0}{g} \left[1 - e^{-\frac{\rho_0 g H}{p_0}} \right]
\end{aligned}$$

Protože podstava je rovnostranný trojúhelník, platí $S = \frac{1}{2}\sin(60^\circ)a^2 = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, kde $a = 3\,\mathrm{m}$ je délka strany. Pro zadané hodnoty vychází

$$m = 1590.85\,\mathrm{kg}$$

Pokud by se hustota neměnila s výškou a použili bychom hustotu u země, měli bychom

$$m = SH\rho_0 = 1623.14\,\mathrm{kg}.$$

Pro zajímavost, pokud bychom pro výpočet použili bychom hustotu uprostřed, měli bychom

$$m = SH\rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g H}{2p_0}} = 1590.75\,\mathrm{kg}$$

a pokud bychom použili průměr hustoty vzduchu u země a na vrcholku, dostali bychom

$$m = SH\frac{1}{2}\left(\rho_0 + \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g H}{p_0}}\right) = 1591.07\,\mathrm{kg}.$$

Pokud by závislost hustoty na výšce byla lineární, musely by dva poslední výpočty vycházet stejně, což není náš případ.

14.8 Hmotnost dřeva s proměnnou vlhkostí.

Součástí mola je dřevěný svislý metrový trám konstantního průřezu. Blízkost hladiny, vlhkost, občasné zašplouchání nebo zanesení kapek vody větrem, vynoření při odlivu a další efekty způsobily, že směrem dolů roste vlhkost a tedy i hustota dřeva. Předpokládejme, že hustota v bodě h (měřeno shora dolů) je dána funkcí

$$\rho(h) = \rho_0(1 + kh),$$

kde ρ_0 je hustota dřeva nahoře (nejdál od hladiny, kde je trám nejsušší) a k je konstanta úměrnosti související s hustotou vody a s tím, jak směrem dolů narůstá vlhkost. Potřebujeme odhadnout hmotnost trámu bez zásahu do mola, tj. nemůžeme vážit na vahách. Určete hmotnost trámu výpočtem.

Napište jenom příslušný integrál a okomentujte, jakou metodou bychom ho počítali. Vlastní výpočet provádět nemusíte. Všimněte si, že úloha je v podstatě stejná jako úloha o vysílači Kojál z minulého cvičení, ale vzhledem k jinému tvaru funkce popisující hustotu tentokrát integrujeme lineární funkci. Pro výpočet integrálu lineární funkce je možné využít střední hodnotu, která je průměrem funkční hodnoty na začátku a na konci oboru integrace (viz přednáška).

14.9 Mrkev a vitamín A

Mrkev má tvar rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky

$$f(x) = \sqrt{14 - x}$$

okolo osy x na intervalu $[0, 12]$, kde x je v centimetrech. Koncentrace vitamínu A se mění podle vztahu

$$c(x) = \frac{1}{12} e^{-x/12} \,\mathrm{mg\,cm^{-3}}.$$

Jaký je objem mrkve, obsah vitamínu A a průměrná koncentrace vitamínu A v mrkvi?

Napište jenom potřebné integrály a vztahy, integrály nepočítejte.

(Volně přeformulováno podle University of British Columbia, Sessional Examinations April 2009.)

Řešení: Pro konstantní f by mrkev byla ve tvaru válce o poloměru f a objem by byl $V = \pi f^2 h$, kde h je výška válce (délka mrkve). Pokud se f mění s x, musíme místo součinu uvažovat integrál a dostáváme

$$V = \int_0^{12} \pi f^2(x) \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{12} 14 - x \,\mathrm{d}x.$$

Pokud by koncentrace byla konstantní, stačí pro výpočet množství vitamínu A vynásobit objem koncentrací. Protože se koncentrace mění, musíme ji do součinu započítat ještě před integrací, tj.

$$m = \int_0^{12} \pi c(x) f^2(x) \,\mathrm{d}x = \pi \frac{1}{12} \int_0^{12} (14 - x) e^{-x/12} \,\mathrm{d}x.$$

Průměrná koncentrace je hmotnost dělená objemem a stačí tedy vypočtené hodnoty vydělit.

14.10 Pesticidy a játra býložravců

Přibližná hodnota C koncentrace jistého pesticidu v játrech býložravců (měřená v mikrogramech pesticidu na gram jater) v čase T po zanesení tohoto pesticidu do životního prostředí je dána vztahem

$$C = e^{-0.25T} \int_0^T 0.32 e^{-0.64t} \,\mathrm{d}t.$$

Vypočtěte hodnotu C jako funkci T a ukažte, že maximální hodnota C je přibližně po dvou letech.

(Podle J. Berry, A. Norcliffe, S. Humble: Introductory mathematics through science applications.)

Řešení:

$$C = e^{-0.25T}\left[-\frac{0.32}{0.64}e^{-0.64t}\right]_0^T = \cdots = \frac{1}{2}e^{-0.25T} - \frac{1}{2}e^{-0.89T}$$

Odsud

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T} = \frac{1}{2}(-0.25)e^{-0.25T} - \frac{1}{2}(-0.89)e^{-0.89T}$$

a maximum je pokud je derivace nulová, tj. pokud

$$\frac{1}{2}(-0.25)e^{-0.25T} - \frac{1}{2}(-0.89)e^{-0.89T} = 0.$$

Odsud dále dostáváme

$$e^{0.64T} = \frac{0.89}{0.25}$$

a pomocí inverzní funkce

$$0.64T = \ln\frac{89}{25}$$

a

$$T = \frac{1}{0.64}\ln\frac{89}{25} \approx 1.98.$$

14.11 Růst buňky

Buňka ve tvaru koule o poloměru r získává živiny rychlostí úměrnou povrchu a spotřebovává živiny rychlostí úměrnou objemu. Získávání živin a spotřeba živin jsou tedy úměrné po řadě r^2 a r^3. Předpokládejme, že rychlost, s jakou roste objem s časem, je úměrná rozdílu mezi příjmem a výdejem. Sestavte diferenciální rovnici pro poloměr buňky, najděte její konstantní řešení a posuďte jeho stabilitu.

Podobnou úvahu lze provést i pro jiné živé organismy a odsud plynou omezení daná efektivitou stavby těla. Například buňky větší než 1 mm *se nevyskytují příliš často. Volně podle L. Edelstein-Keshet: Differential Calculus for the Life Sciences.*

Řešení:

Budeme používat kladné konstanty úměrnosti a součin několika konstant budeme vždy přeznačovat jako novou konstantu, aby výsledná rovnice byla co nejjednodušší.

Podle zadání a se zohledněním tvaru koule (objem úměrný třetí mocnině poloměru a povrch úměrný druhé mocnině poloměru) platí

$$\begin{aligned} \text{příjem} &= k_1 S = \alpha r^2, \\ \text{výdej} &= k_2 V = \beta r^3, \\ \text{rychlost růstu objemu} &= k_3(\text{příjem} - \text{výdej}) = k_3(\alpha r^2 - \beta r^3) = r^2(A - Br), \end{aligned}$$

kde $A = k_3\alpha$, $B = k_3\beta$, $\alpha = 4\pi k_1$, …jsou konstanty.

Podle zadání platí

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = r^2(A - Br).$$

Pro objem $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ platí $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ a po dosazení do předchozí rovnice

$$4\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = r^2(A - Br).$$

Po vydělení rovnice výrazem r^2, osamostatnění výrazu $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ a přeznačení konstant dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = A_0 - B_0 r.$$

Tato rovnice má jediné konstantní řešení pro $r = \frac{A_0}{B_0}$. Protože platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(A_0 - B_0 r) = -B_0 < 0,$$

je toto řešení stabilní. Pokud buňka přesáhne tuto hodnotu, je výdej větší než příjem a buňka neudrží vyrovnanou bilanci.

14.12 Konstitutivní vztahy při konstantních parametrech

Roura je dlouhá $L = 5\,\mathrm{m}$, má průměr $d = 0.8\,\mathrm{m}$ a je zanesená pískem. Koeficient filtrace z Darcyho zákona

$$q = -K\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}$$

má hodnotu $K = 3\,\mathrm{m/den}$, kde q je tok na metr čtvereční a $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}$ hydraulický gradient (rozdíl výšek při atmosférickém tlaku, nebo odpovídající rozdíl tlaků, vztažený na jednotku vodorovné délky). Jedna strana roury je o $h = 1.6\,\mathrm{m}$ výše než druhá a roura je na obou koncích zaplavená vodou po horní okraj. Vypočtěte tok vody rourou. Zkrácení vodorovné vzdálenosti konců při šikmém položení roury neuvažujte. (*Podle Charles Fitts, Groundwater Science.*)

V tomto příkladě přepočítáváme na základě materiálových vlastností rozdíl výšek na tok vody. Snadnost příkladu tkví v tom, že podél celé roury předpokládáme konstantní fyzikální charakteristiky a proto například hydraulický gradient počítáme z celé délky roury. V obecném případě musíme mít informaci ne o průměrných změnách hydraulické výšky, ale o změnách okamžitých. Proto je podíl nutno nahradit derivací (v jednorozměrném případě) nebo gradientem (ve vícerozměrném případě). Stejně se pracuje s Fickovým zákonem pro pohyb vody ve dřevě, roli písku hraje dřevo a roli rozdílu výšek hraje rozdíl koncentrací. Analogický je i Fourierův zákon, ale místo vody teče teplo a namísto rozdílu výšek pracujeme s rozdílem teplot.

Řešení: Tok (Q) určíme vynásobením toku jednotkovou plochou (q) s obsahem průřezu roury ($S = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$). Hydraulický gradient určíme z rozdílu výšek a vodorovné vzdálenosti, tj. $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = \frac{h}{L}$. Odsud pro velikost toku dostáváme

$$|Q| = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 K\ \frac{h}{L} = 0.48\,\mathrm{m}^3/\mathrm{den}.$$

14.13 Divergence v 1D a snížení průtoku při kapkové závlaze

Při kapkové závlaze uvažujme trubici, která má podél své délky otvory a těmito otvory uniká voda k rostlinám. Víme že na úseku 15 metrů se sníží průtok z 20 litrů za minutu na 19 litrů za minutu. Předpokládejme, že otvory pro zavlažování jsou rovnoměrně rozloženy podél celé délky. Jaká je lineární hustota zdrojů podél trubice? Předpokládejte rovnoměrné rozložení zdrojů.

Tento příklad ukazuje na velmi jednoduchém příkladě, že změna v toku souvisí se zdroji. Pokles toku signalizuje, že voda někam mizí, což je v tomto případě žádoucí jev. Ztráta na průtoku je vlastně záporně vzatá divergence. V odvození rovnice kontinuity postupujeme stejně jako v tomto případě, jenom uvažujeme proměnné parametry (derivace místo podílu), trojrozměrný prostor (tři směry místo jednoho) a možnost, že změna toku může kromě zdrojů a spotřebičů být způsobena i akumulací.

Řešení: Na úseku 15 m se "ztratí" litr vody za minutu a tento litr se spotřebuje ve spotřebiči, tj. ve zdroji se zápornou vydatností. Vydatnost zdrojů je

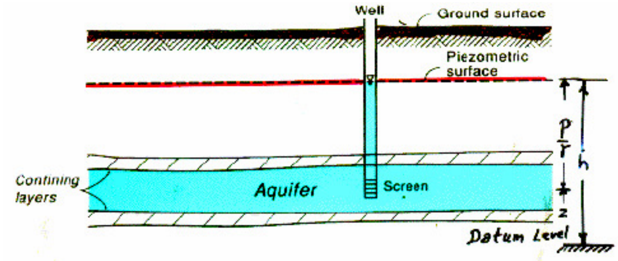
$$\sigma = -\frac{1\,\mathrm{l/min}}{15\,\mathrm{m}} = -0.067\,\mathrm{l}\,\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{min}^{-1}.$$

14.14 Rovnice podzemní vody

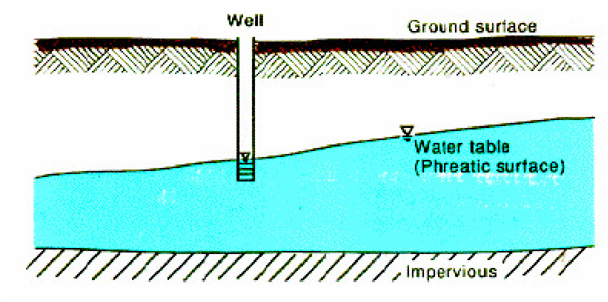
Stavovou veličinou pro popis podzemní vody je *piezometrická hladina* h měřená v metrech (hrubá představa může být hladina spodní vody nebo, v případě že je shora ohraničení nepropustnou vrstvou, tak hladina, kam by vystoupila voda ve vrtu). Prostor, kde voda teče, se nazývá *zvodeň* (aquifer). Tok podzemní vody ve dvoudimenzionální horizontální zvodni, kdy zanedbáváme vertikální tok, popisuje *průtok na jednotku šířky* $\vec{q}$, který má směr toku a velikost vyjadřuje v metrech krychlových na metr za den, kolik vody proteče za jednotku času jednotkovou délkou kolmo na směr toku.

Zdroj obrázků: Jacob Bear, https://www.interpore.org/

Řez zvodní s napjatou hladinou (výška zavodněné části je dána vzdáleností mezi nepropustnými vrstvami).



Řez zvodní s volnou hladinou (výška zavodněné části je rovna rozdílu mezi piezometrickou výškou a dolní nepropustnou vrstvou).



Zapište pomocí vhodných veličin, operátorů a rovnic následující vztahy, zákony nebo pozorování, odpovězte na otázky a splňte úkoly.

A) *Darcyho zákon vyjádřený pro celou zvodeň (od povrchu k nepropustnému podloží)*: Průtok na jednotku šířky, $\vec{q}$, má v izotropním prostředí směr maximálního poklesu piezometrické hladiny a co do velikosti je úměrný tomuto poklesu. Koeficient úměrnosti se nazývá koeficient průtočnosti nebo transmisivita a označuje se T.

B) Jak zpravidla modifikujeme předchozí odpověď, pokud zvodeň není izotropní a má v různých směrech různé vlastnosti?

C) Často pracujeme s veličinou *filtrační rychlost* $\vec{v}_f$, která udává, jaký objem proteče jednotkovou plochou kolmo na směr proudění za jednotku času. Jaký bude vztah mezi $\vec{v}_f$ a $\vec{q}$? Uvažujte pouze speciální případ, kdy je $\vec{v}_f$ konstantní v celé tloušťce zvodnělé vrstvy b. (Tloušťka zvodnělé vrstvy b je u proudění s volnou hladinou rovna vzdálenosti piezometrické hladiny od dolní nepropustné vrstvy a u proudění mezi nepropustnými vrstvami rovna vzdálenosti těchto vrstev.)

D) *Zákon zachování pro vodu*: Množství vody v daném místě (v metrech krychlových vody na metr čtvereční povrchu zvodně) označte v. Rychlost s jakou se kumuluje voda v daném místě v kubických metrech (vody) na čtvereční metr (povrchu zvodně) za den, tj. derivace v podle času, je součtem

- vydatnosti zdrojů v tomto místě (σ, v kubických metrech vody na metr čtvereční povrchu zvodně za den, může se jednat například o zasakování srážek) a
- rychlosti, s jakou v daném místě klesá tok $\vec{q}$.

Vyjádřete tento zákon kvantitativně pomocí vhodné rovnice.

E) Objem vody v podzemí souvisí s hladinou podzemní vody. *Zásobnost* S_s udává, jaký objem vody se uvolní na metru čtverečním povrchu zvodně, pokud se piezometrická hladina v tomto místě sníží o jednotku. U zvodně s volnou hladinou je tato veličina dána zejména pórovitostí půdy nebo horniny, u zvodně s napjatou hladinou souvisí se stlačitelností a proto je v tomto případě zásobnost velmi malá. Jaká je jednotka takto definované zásobnosti a jak souvisí rychlost s jakou roste objem vody v daném místě zvodně s rychlostí, s jakou roste piezometrická hladina v tomto místě?

F) Předchozí odpovědi spojte do rovnice podzemní vody v anizotropním prostředí.

Podle Jacob Bear, Modeling Groundwater Flow and Pollution a Charles Fitts, Groundwater Science.

Řešení:

A) $\vec{q} = -T\nabla h$ kde T je koeficient průtočnosti a $-\nabla h$ je vektor mířící ve směru nejrychlejšího poklesu piezometrické hladiny h a vyjadřující rychlost tohoto poklesu.

B) T je 2×2 matice

C) $\vec{q} = b\vec{v}_f$

D) $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \sigma - \operatorname{div} \vec{q}$

E) Zásobnost je vlastně změna objemu (vody) na jednotkovou plochu (zvodně) vyvolaná jednotkovou změnou délky (změna piezometrické hladiny), tj. derivace v podle h a jednotkově vychází bez rozměru. Platí tedy

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}h} = S_s$$

kde v je objem vody na metr čtvereční povrchu zvodně v daném místě. Po vynásobení rychlostí s jakou se mění piezometrická výška dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = S_s\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

a po využití derivace složené funkce

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = S_s\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

Toto se děje v libovolném místě zvodně. Protože v a h jsou i funkcemi proměnných x a y a protože souřadnice x a y jsou nezávislé na čase, stačí pro korektní zápis použít parciální derivace namísto obyčejné derivace, tj.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = S_s\,\frac{\partial h}{\partial t}.$$

F)

$$S_s\frac{\partial h}{\partial t} = \sigma - \operatorname{div}(-T\nabla h)$$

tj.

$$S_s\frac{\partial h}{\partial t} = \sigma + \operatorname{div}(T\nabla h)$$

14.15 Rovinné proudění podzemní vody podruhé

Prozkoumáme podruhé rovinné proudění, kterému jsme se věnovali v příkladě 14.1.

A) Rovnici podzemní vody ve 2D rozepište do složek. Uvažujte pro jednoduchost izotropní prostředí (transmisivita je skalární veličina, tj. ne matice a voda teče ve směru spádu piezometrické hladiny).

B) Napište rovnici z předchozího bodu pro *stacionární* případ *bez zdrojů* a pro případ, že funkce h nezávisí na y. Uvažujte homogenní prostředí a zvodeň s volnou hladinou a vodorovnou dolní nepropustnou vrstvou, kde volíme nulovou hladinu h (tj. transmisivita je tvaru

$$T = kh,$$

kde k je reálné číslo, ne funkce proměnných x a y)

C) Ukážeme, že rovnice se dá vyřešit i bez znalosti řešení diferenciálních rovnic. Upravte vztah z předchozího bodu použitím zřejmé identity $(h^2)' = 2hh'$ pro h jako funkci proměnné x, kde čárka značí derivaci podle x. Výsledkem bude podmínka, kterou musí splňovat funkce h^2 a odsud již najdete hledanou křivku snížení piezometrické hladiny. (Pokud je h závislé jenom na x, plocha ohraničující zvodnělou vrstvu se z bočního pohledu promítne do křivky.)

Řešení:

A)

$$S_s \frac{\partial h}{\partial t} = \sigma + \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

B) Protože máme uvažovat stacionární případ, funkce h nezávisí na t. Podle předpokladu h nemá záviset ani na y. Proto platí $h = h(x)$, tj. derivace h podle t a podle y jsou nulové. Protože nemáme uvažovat zdroje, je σ také nulové. Protože máme uvažovat homogenní případ a $T = kh$, můžeme konstantu k a dát před derivaci. Rovnice má tvar

$$0 = k\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)$$

anebo (využitím stručnějšího zápisu pro derivace funkce jedné proměnné)

$$0 = k(hh')'.$$

C) Dostáváme $hh' = \frac{1}{2}(h^2)'$ a po dosazení

$$0 = k\left(\frac{1}{2}(h^2)'\right)'.$$

Po vydělení rovnice konstantou k a vynásobení faktorem 2 dostaneme

$$0 = (h^2)''.$$

Druhá derivace funkce h^2 tedy musí být nula. Proto je h^2 nutně lineární funkcí proměnné x, tj. existují konstanty C_1 a C_2 tak, že platí

$$h^2 = C_1 x + C_2.$$

Křivka odpovídá výsledku příkladu 14.1, kde je

$$h^2 = \frac{-2q}{k}x + \text{const.}$$

14.16 O Otesánkovi.

Otesánek se vykrmil do tvaru koule o průměru 2,4 m a dále baští. Jeho objem roste konstantní rychlostí 0,002m^3/hod. Jak tato úloha souvisí s derivacemi a jak rychle roste průměr koule (Otesánka)?

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3$$

14.17 Dlouhý a Bystrozraký.

Dlouhý má na ramenou Bystrozrakého ve výšce 4 metry. Bystrozraký hledá princeznu a vzdálenost, na kterou vidí, je dána vzorcem pro vzdálenost k horizontu, tj.

$$H = k\sqrt{h},$$

kde H je vzdálenost k horizontu v kilometrech, h je výška pozorovatele nad povrchem v metrech a k je konstanta. Dlouhý roste rychlostí 0,1 ms^{-1}. Jak tato úloha souvisí s derivacemi a jak rychle roste vzdálenost na kterou Bystrozraký vidí?

14.18 Nábytek bez atestu

Formaldehyd se z dřevěného výrobku v malé nevětrané místnosti uvolňuje jenom do dosažení určité rovnovážné koncentrace. Rychlost, s jakou přibývá množství formaldehydu ve vzduchu v místnosti, je úměrná množství, která do této rovnovážné koncentrace chybí. Zapište tento proces pomocí vhodného matematického modelu (diferenciální rovnice).

14.19 Kontaminovaný salát

Bakterie na kontaminovaném salátu se množí rychlostí

$$2e^{0.1t} \text{ milionů bakterií/den},$$

kde t je čas ve dnech. Pokud je to možné, určete, o kolik se změní množství bakterií za čtyři dny. Pokud není dost informací, vysvětlete, jaké další informace potřebujeme.

14.20 Nádrž na zavlažování

Nádrž má tvar válce a je do poloviny naplněna vodou. Máme tři různé úlohy.

(A) Do nádrže teče voda konstantní rychlostí. Rychlost, s jakou roste hladina, je konstantní.

(B) Dírou ve dně vytéká voda. Rychlost, s jakou klesá hladina, je úměrná odmocnině z výšky hladiny.

(C) Z nádrže vytéká dírou ve dně voda (tj. stejná situace jako v předchozím modelu) a navíc konstantní rychlostí odebíráme vodu na zavlažování.

Každý děj zapište pomocí vhodného matematického modelu. Zajímá nás hloubka vody v nádrži. Výška nádrže nás nelimituje (nádrž v úloze A nepřeteče).

14.21 Vlčí mák

Vlčí mák je oblíbený letní plevel s obrovskou nadprodukcí semen. Předpokládejme, že rychlost s jakou roste populace vlčího máku je úměrná velikosti populace. Vyjádřete tento růst pomocí vhodné diferenciální rovnice.

14.22 Ošoupané medaile

Dana Zátopková vozila svoji zlatou medaili po besídkách a nechávala ji zde kolovat mezi diváky. Tím se medaile otírala a ztrácela hmotnost. Pokusíme se popsat tento děj. Předpokládejme, že s odstupem od olympiády intenzita besídek slábne a rychlost otírání se snižuje. Jaký bude úbytek zlata na medaili za první rok, pokud předpokládáme, že rychlost s jakou se mění hmotnost m medaile je $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t+1}$ mikrogramů za týden?

14.23 Brýle

1. Nechť $\varphi = f(a)$ je funkce, která udává jak závisí počet dioptrií φ pro korekci krátkozrakosti na vzdálenosti a (v metrech), na kterou ještě oko vidí ostře. V jakých jednotkách bude vyjádřena derivace $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}a}$ a jaká bude slovní interpretace této derivace?

2. Funkce z předchozího bodu je $\varphi = -\frac{1}{a}$. Nechť $a = 10\,\mathrm{m}$ a nechť se a zkracuje rychlostí 0.1 metru za rok. Napište, jak souvisí rychlost s jakou se mění a s rychlostí, s jakou se mění φ a pro daný případ určete, jak rychle se mění počet dioptrií nutných pro korekci této vady?

14.24 Rychlost zvuku ve dřevě

Rychlost zvuku v pevné látce je dána vzorcem $c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$ kde c je rychlost zvuku v metrech za sekundu, E Yougův modul pružnosti v pascalech a ϱ hustota v kilogramech na metr krychlový. U dřeva předpokládejme, že v závislosti na vlhkosti se ϱ může měnit a E je konstantní. Určete derivaci $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\varrho}$. Pokud například pro břízu $\rho = 640\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ je tato derivace číselně rovna hodnotě -3.3, doplňte jednotku a napište slovní interpretaci této derivace.

14.25 Růst ryb

Na rozdíl od jiných živočichů jsou malé ryby jsou přibližně zmenšeniny velkých ryb a proto je u nich hmotnost přibližně úměrná třetí mocnině délky. Najděte souvislost mezi rychlostí s jakou roste hmotnost kapra a rychlostí, s jakou roste délka kapra.

14.26 Termohrnek z rozemleté televize

Termohrnek bez atestu, vyrobený z rozemletého plastu ze staré elektroniky, uvolňuje do nápoje zdravotně závadné materiály. Například zpomalovače hoření, BFR. Předpokládejme, že tempo se kterým se BFR vylučuje do nápoje se snižuje s rostoucí kontaminací nápoje a s klesající teplotou nápoje, tj. klesá v čase. Vhodným modelem může být například

$$r(t) = (10 - 2t)\,\mu\mathrm{g/hod},$$

kde $r(t)$ je rychlost vylučování BFR do nápoje v čase t v mikrogramech za hodinu a t je čas v hodinách. Vypočtěte, jaké množství BFR se do nápoje uvolní za první hodinu a porovnejte s hodnotou, která se uvolní za druhou hodinu.

14.27 Padání sněhu s proměnnou intenzitou

O půlnoci začal padat sníh rychlostí 6 centimetrů za hodinu. Intenzita slábla a v poledne přestalo sněžit. V tomto období je možné modelovat rychlost padání sněhu funkcí $r(t)$, která splňuje $r(0) = 6$ a $r(12) = 0$, kde t je počet hodin od půlnoci v hodinách a r je rychlost v centimetrech za hodinu. Kolik sněhu napadalo?

Zapište obecně a poté pro nejjednodušší funkci, která splňuje uvedené požadavky, pro funkci

$$r(t) = 6 - \frac{1}{2}t.$$

(Slunce nesvítilo a bylo pořád pod nulou.)

14.28 Vyzařování tepla

1. Vyzařování ve wattech na metr čtvereční je dáno Stefanovým-Bolzmanovým zákonem

$$Q = \sigma T^4,$$

kde T je teplota (v Kelvinech), σ konstanta a Q vyzářený výkon ve wattech na metr čtvereční. Vypočtěte derivaci

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}.$$

2. Derivace z předchozího bodu pro $T = 300K$ je číselně rovna 6.12. Doplňte jednotku a napište slovní interpretaci této derivace.

Poznámka: Termodynamická teplota v Kelvinech je teplota ve stupních Celsia zmenšená o hodnotu 273.15.

14.29 Odvození rovnice vedení tepla v 1D

Pokračujeme v úloze s vedením tepla v 1D. S využitím výsledků této úlohy zapište kvantitativně následující zákony.

a) Tok tepla (směrem doprava) je úměrný rychlosti, s jakou klesá teplota (směrem doprava).

b) Rychlost, s jakou v daném bodě ubývá tok tepla jako funkce polohy je úměrná rychlosti, s jakou roste teplota v daném bodě, jako funkce času, tj. teplo které "ztratíme" na toku tepla se projeví odpovídajícím zvýšením teploty.

Poté oba zákony spojte do jednoho vztahu a odvodíte rovnici vedení tepla v 1D. Ukažte, že pokud bude tyč homogenní, po nastolení rovnováhy bude teplota lineární funkcí polohy.

Řešení:

a) To, že tok tepla (směrem doprava) je úměrný rychlosti, s jakou klesá teplota (směrem doprava) vyjádříme rovnicí

$$q = -k_1 \frac{\partial T}{\partial x}$$

kde k_1 je konstanta úměrnosti a $-\frac{\partial T}{\partial x}$ udává, jak klesá teplota směrem doprava.

b) To, že rychlost, s jakou v daném bodě ubývá tok tepla jako funkce polohy je úměrná rychlosti, s jakou roste teplota v daném bodě, jako funkce času, tj. teplo které "ztratíme" na toku tepla se projeví zvýšením teploty, vyjádříme rovnicí

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = k_2 \frac{\partial T}{\partial t},$$

kde k_2 je konstanta úměrnosti a $\frac{\partial T}{\partial t}$ udává, jak roste teplota jako funkce času.

Spojením dostaneme

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-k_1\frac{\partial T}{\partial x}\right)=k_2\frac{\partial T}{\partial t},$$

a po úpravě

$$k_2\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1\frac{\partial T}{\partial x}\right).$$

Častěji se tato rovnice píše ve tvaru

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1\frac{\partial T}{\partial x}\right),$$

protože konstantu k_2 můžeme vyjádřit pomocí fyzikálních charakteristik hustota ρ a měrná tepelná kapacita c.

V rovnovážném stavu je derivace podle času nulová a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1\frac{\partial T}{\partial x}\right)=0$$

a pro homogenní tyč je k_1 konstanta a proto

$$k_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)=0.$$

Druhá derivace podle x je tedy nulová, což znamená, že T je vzhledem k x lineární.

14.30 Kapka vody I

Předpokládejme, že kapka vody má kulovitý tvar a při dešti roste tak, že objem jako funkce času se zvětšuje rychlostí úměrnou povrchu. (Kondenzace vodních par probíhá na povrchu a výsledek této kondenzace, voda, zvětšuje objem.) Přepište tento scénář do matematického modelu a všechny závislé proměnné vyjádřete pomocí objemu.

Klasický případ, kdy v zadání figuruje rychlost s jakou se mění objem, tj. derivace objemu, a tento vztah zformulujeme matematicky. Protože tato formulace obsahuje povrch koule, je nutné tento povrch přepočítat na objem.

Řešení: Je-li V objem a S povrch koule, je $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ rychlost s jakou roste objem koule a přepisem zadání do kvantitativních vztahů dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=k_1S,$$

kde k je konstanta úměrnosti. Protože díky podobnosti pro kouli platí $S=k_2V^{2/3}$ kde k_2 je vhodná konstanta, dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=k_1k_2V^{2/3}.$$

Spojením obou konstant do jediné $k=k_1k_2$ obdržíme výsledný model

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=kV^{2/3}.$$

14.31 Kapka vody II

Předpokládejme jako v předchozím příkladě, že kapka vody má kulovitý tvar a při dešti roste tak, že objem jako funkce času se zvětšuje rychlostí úměrnou povrchu. Ukažte, že poloměr jako funkce času roste konstantní rychlostí.

Klasický případ, kdy v zadání figuruje rychlost s jakou se mění objem, tj. derivace objemu, ale protože nás zajímá jiná veličina, musíme ještě najít vztah mezi rychlostí, s jakou roste objem, a rychlostí, s jakou roste poloměr.

Řešení: Je-li $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ objem kulovité kapky, platí (derivováním)

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

a (přepisem zadání do řeči derivací a s využitím vzorce pro povrch koule)

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = k\ 4\pi r^2,$$

kde k je konstanta úměrnosti. Odsud

$$4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = k\ 4\pi r^2$$

a

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = k.$$

Napravo je konstanta, poloměr tedy roste konstantní rychlostí.

14.32 Výpočet π

Pro $n \neq -1$ vypočtěte integrály

$$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka: Vzorec pro součet geometrické řady s kvocientem $-x^2$ je

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

po integrování (a po zapojení teorie nekonečných řad, která ospravedlní integrování člen po členu a to, že v horní mezi je $x = 1$, přestože řada pro $x = 1$ nekonverguje) dává

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^6\,\mathrm{d}x + \cdots.$$

Po zintegrování vlevo dostaneme veličinu obsahující π a vpravo součet racionálních čísel. Tím je možné odhadnout hodnotu π. Tato technika, používaná v jistých obměnách v 17. a 18. století, je mnohem efektivnější pro výpočet π, než starší metoda pravidelných mnohoúhelníků vepsaných do kružnice. Dnes máme k dispozici řady, které k hodnotě π konvergují mnohem rychleji.

Řešení:

Platí

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$$

a

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Proto integrováním vztahu

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

dostaneme

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

a vyjádření π pomocí řady je

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots.$$

Čím více členů započítáme, tím je aproximace čísla π přesnější.

14.33 Tlak v pneumatice

Tlakem v pneumatice rozumíme ve skutečnosti přetlak vůči atmosférickému tlaku. Poškozená pneumatika ztrácí vzduch tak, že množství vzduchu v pneumatice klesá rychlostí, která je úměrná tomuto tlaku. Tlak v pneumatice a množství vzduchu v pneumatice jsou také navzájem úměrné. Napište matematický model popisující pokles tlaku v čase.

Řešení:

Je-li m hmotnost vzduchu v pneumatice a p tlak, z úměrnosti mezi oběma veličinami plyne

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = k_1 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}.$$

Podle zadání platí

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -k_2 p.$$

Odsud

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -kp,$$

kde k je konstanta, která vznikne sloučením konstant k_1 a k_2.

14.34 Kvadratický moment kruhu

14.35 Stacionární vedení tepla ve válcovém prostředí

14.36 Chemická reakce

Při chemické reakci se spotřebovává enzym tak, že spolu za přítomnosti katalyzátoru reagují dvě molekuly tohoto enzymu. V důsledku toho rychlost s jakou se snižuje množství enzymu je úměrná druhé mocnině koncentrace a tedy i druhé mocnině množství tohoto enyzmu. Napište diferenciální rovnici popisující tento děj.

14.37 Ondatra

V roce 1905 vysadil na svém panství hrabě Colloredo-Mansfeld několik párů ondatry, které dovezl z Ameriky. Ondatra se díky absenci přirozených nepřátel rychle rozšířila po celé Evropě. Předpokládejme, že oblast zasažená rozšířením ondatry má tvar kruhu o poloměru 230 km a tento poloměr roste rychlostí 30 km/rok. Jak rychle roste plocha kruhu? Jak rychle roste obvod kruhu?

14.38 Akumulátor

Teplota studeného akumulátoru přeneseného do místnosti o pokojové teplotě roste rychlostí

$$\frac{1}{2}e^{-t}\ {}^{\circ}\mathrm{C/hod}$$

kde t je čas v hodinách. Najděte změnu teploty akumulátoru za prvních pět hodin.

14.39 Kmen stromu

Kmen můžeme v určitých částech stromu primitivně modelovat válcem. Uvažujme délkový metr kmene, tj. válec o výšce 1m a poloměru r. Hmotnost válce je

$$m = V\rho = \pi\rho r^2,$$

kde $\rho = 700\text{kg/m}^3$ je hustota dřeva. Poloměr kmene roste rychlostí 0,01 m/rok. Najděte vztah mezi rychlostí růstu poloměru válce a rychlostí růstu hmotnosti válce. Určete rychlost s jakou roste hmotnost v okamžiku, kdy poloměr kmene je $r = 0{,}20\,\text{m}$.