9 Determinanty, soustavy rovnic

9.1 Určete následující determinanty

1. $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

2. $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ x-4 & y-3 \end{vmatrix}$

   ($D_2 = 0$ je přímka daná bodem $(4, 3)$ a směrovým vektorem $(2, -1)$)

3. $D_3 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ (charakteristický polynom matice z prvního bodu)

4. $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

5. $D_5 = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

6. $D_6 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix}$ (charakteristický polynom diagonální matice)

Řešení:

$$D_1 = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 6 + 4 = 10$$
$$D_2 = 2 \cdot (y - 3) - (-1) \cdot (x - 4) = 2y - 6 + x - 4 = x + 2y - 10$$
$$D_3 = (2 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) - (-1) \cdot 4 = \lambda^2 - 5\lambda + 10$$
$$D_4 = 12$$
$$D_5 = 7a + 5$$
$$D_6 = (2 - \lambda)(3 - \lambda)(7 - \lambda)$$

9.2 Soustava lineárních rovnic s jediným řešením

Vyřešte soustavu rovnic.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Soustava rovnic je asi nejdůležitější aplikace lineární algebry, ale v dnešním světě není důvod ji řešit ručně. Je však užitečné si alespoň základní manipulace vyzkoušet na jednoduchém příkladě. Tento moc času nezabere.

9.3 Soustava lineárních rovnic s nekonečně mnoha řešeními

Vyřešte soustavu rovnic.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soustava s nekonečně mnoha řešeními typicky vychází při hledání vlastních čísel matice. Na tomto příkladě si osaháme případ homogenní soustavy a jednoparametrického řešení, tj. případ, který při výpočtu vlastních vektorů vychází nejčastěji.