3 Výpočet derivací, lineární aproximace

3.1 Výpočet derivace součinu a podílu

Určete derivace následujících funkcí, kde $a, b, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $f(x) = x \ln x$
2. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{ax+b}$
4. $f(t) = \dfrac{t}{t^2+6}$
5. $f(x) = \dfrac{ax^2}{x^2+1}$
6. $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$
7. $f(x) = \dfrac{ax}{(x-1)^2}$

Řešení:

1. $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x\dfrac{1}{x} = 1 + \ln x$
2. $f'(x) = \sqrt{x^2+a} + x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
3. $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (ax+b) - x \cdot a}{(ax+b)^2} = \dfrac{b}{(ax+b)^2}$

4. $f'(t) = \dfrac{(t^2+6) - t2t}{(t^2+6)^2} = \dfrac{6-t^2}{(t^2+6)^2}$

5. $f'(x) = \dfrac{2ax(x^2+1) - ax^2 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2ax}{(x^2+1)^2}$

6. $f'(x) = \dfrac{6x^2(x^2+1) - 2x^3 2x}{(x^2+1)^2}$

7. $f'(x) = \dfrac{a(x-1)^2 - ax2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{a(x-1) - ax2}{(x-1)^3} = \cdots$

3.2 Základní lineární aproximace

Najděte lineární aproximace funkcí $\sin x$, $\cos x$ a $(1+x)^n$ v okolí nuly. Tím dokážete platnost následujících přibližných vzorců platných pro x blízko nuly.

$$\sin x \approx x$$
$$\cos x \approx 1$$
$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

První dvě aproximace využijeme později pro odvození tvaru matice malých rotací, což je důležité při studiu deformace materiálů. Poslední můžeme využít například pro to, abychom z relativistického vzorce pro celkovou energii extrahovali část závislou na rychlosti, tj. kinetickou energii (na přednášce).

Řešení:

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

a) $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0,$
$f(0) = \sin 0 = 0,$
$f'(x) = (\sin(x))' = \cos x,$

$f'(0) = \cos(0) = 1$

$$\sin(x) \approx 0 + 1 \cdot (x - 0) = x$$

b) $f(x) = \cos x,\ x_0 = 0,$
$f(0) = \cos 0 = 1,$
$f'(x) = (\cos(x))' = -\sin x,$
$f'(0) = -\sin(0) = 0$

$$\cos(x) \approx 1 + 0 \cdot (x - 0) = 1$$

c) $f(x) = (1 + x)^n,\ x_0 = 0,$
$f(0) = (1 + 0)^n = 1,$
$f'(x) = ((1 + x)^n)' = n(1 + x)^{n-1},$
$f'(0) = n(1 + 0)^{n-1} = n$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n \cdot (x - 0) = 1 + nx$$

3.3 Lineární aproximace

Veličina y je funkce proměnné x. Najděte její lineární aproximaci v okolí zadaného bodu.

1) $y = xe^x$ v okolí bodu $x = 0$

2) $y = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ v okolí bodu $x = 0$

3) $y = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ v okolí bodu $x = K$

4) $y = \sqrt{x}$ v okolí bodu $x = 1$

5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ v okolí bodu $x = 1$

Ve druhém a třetím příkladě aproximujeme funkci modelující růst populace v prostředí s nosnou kapacitou K. Aproximace v okolí bodu $x = 0$ odpovídá velmi malé populaci. Proto se konstanta úměrnosti ze získané lineární aproximace nazývá invazní parametr*.*

Řešení:

1) $f(x) = xe^x$, $x_0 = 0$,
$f(0) = 0e^0 = 0$,
$f'(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x$,
$f'(0) = e^0 + 0e^0 = e^0 = 1$

$$xe^x \approx 0 + 1 \cdot (x - 0) = x$$

2) $f(x) = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$, $x_0 = 0$,
$f(0) = r0\left(1 - \dfrac{0}{K}\right) = 0$,
$f'(x) = \left(rx - r\dfrac{1}{K}x^2\right)' = r - \dfrac{2r}{K}x$,
$f'(0) = r - \dfrac{2r}{K} \cdot 0 = r$

$$rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \approx 0 + r(x - 0) = rx$$

3) $f(x) = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$, $x_0 = K$,
$f(K) = rK\left(1 - \dfrac{K}{K}\right) = rK(1 - 1) = 0$,

$$f'(x) = \left(rx - r\frac{1}{K}x^2\right)' = r - \frac{2r}{K}x,$$
$$f'(K) = r - \frac{2r}{K} \cdot K = r - 2r = -r$$

$$rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \approx 0 - r(x-K) = -r(x-K) = r(K-x)$$

Poslední aproximaci je možno přepsat do tvaru

$$rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \approx rK\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

4) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$,
$f(1) = \sqrt{1} = 1$,
$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$,
$f'(1) = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{x} \approx 1 + \frac{1}{2}(x-1)$$

5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$,
$f(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$,

$$f'(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}},$$

$$f'(1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \approx 1 - \frac{1}{2}(x-1)$$

3.4 Kinetika chemických reakcích pro malé koncentrace

Rychlost mnoha chemických reakcí je dána vzorcem

$$f(x) = \frac{ax}{b+x}, \tag{1}$$

kde x je koncentrace substrátu a a, b jsou parametry (konstanty). Tento vzorec se nazývá kinetika Michaelise a Mentenové. Ukažte, že platí

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{ab}{(b+x)^2}.$$

Použijte tento výpočet k lineární aproximaci funkce (1) pro malá x.

Řešení:

Přímým dosazením dostáváme $f(0) = \dfrac{a0}{b+0} = 0$, $f'(0) = \dfrac{ab}{(b+0)^2} = \dfrac{ab}{b^2} = \dfrac{a}{b}$ a odsud

$$\frac{ax}{b+x} \approx 0 + \frac{a}{b}(x-0) = \frac{a}{b}x.$$

3.5 Lineární aproximace kvalifikovaným odhadem

Pokud je v součinu výraz, který je blízký nule, ovlivní tento výraz výsledný součin více, než zbylé součinitele. Postavíme toto pozorování na solidnější základy.

Ukažte, že pokud platí $f(x) = g(x)h(x)$ a $g(x_0) = 0 \neq h(x_0)$, má lineární aproximace funkce g tvar

$$g(x) \approx g'(x_0)(x - x_0)$$

a lineární aproximace funkce f tvar

$$f(x) \approx \Big[g'(x_0)(x - x_0)\Big]h(x_0),$$

kde v hranaté závorce je lineární aproximace funkce g a tato aproximace je vynásobena hodnotou funkce h v bodě x_0.

Situace je jednoduchá zejména v případě, kdy funkce g je lineární a je sama svojí lineární aproximací. Ukažte, že s uvedenou výbavou je možno napsat lineární aproximace prvních tří funkcí z příkladu 3.3 přímo a bez výpočtu. Ukažte, že výpočet není nutný a výsledek se dá kvalifikovaně odhadnout i v předchozím příkladě s kinetikou Michaelise a Mentenové. Pro tyto účely použijte triviální identitu

$$\frac{ax}{b + x} = x \cdot \frac{a}{b + x}.$$

Řešení:

Obecný vzorec je
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vztah
$$g(x) \approx g'(x_0)(x - x_0)$$
z něj plyne okamžitě použitím funkce g a podmínky $g(x_0) = 0$.

Pro funkci $f(x) = g(x)h(x)$ v našem případě máme
$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0)h(x_0) = 0 \cdot h(x_0) = 0 \\ f'(x_0) &= g'(x_0)h(x_0) + g(x_0)h'(x_0) = g'(x_0)h(x_0) + 0 \cdot h'(x_0) = g'(x_0)h(x_0) \end{aligned}$$
a přímým dosazením
$$f(x) \approx 0 + g'(x_0)h(x_0)(x - x_0) = \Big[g'(x_0)(x - x_0)\Big]h(x_0)$$

1. Funkce $f(x) = xe^x$ má v $x = 0$ první součinitel nulový a druhý součinitel nenulový a platí $e^0 = 1$. V okolí $x = 0$ je první součinitel lineární. Proto v okolí $x = 0$ platí
$$xe^x \approx xe^0 = x \cdot 1 = x.$$

2. Funkce $f(x) = rx\left(1-\frac{x}{K}\right)$ má v $x=0$ první součinitel rx nulový a druhý součinitel $\left(1-\frac{x}{K}\right)$ nenulový a platí $\left(1-\frac{0}{K}\right) = 1$. V okolí $x=0$ je první součinitel lineární a v okolí $x=0$ platí

$$rx\left(1-\frac{x}{K}\right) \approx rx\left(1-\frac{0}{K}\right) = rx.$$

3. Funkce $f(x) = rx\left(1-\frac{x}{K}\right)$ má v bodě $x=K$ první součinitel rx nenulový roven rK a druhý součinitel $\left(1-\frac{x}{K}\right)$ nulový. Druhý součinitel je lineární. Proto v okolí $x=K$ platí

$$rx\left(1-\frac{x}{K}\right) \approx rK\left(1-\frac{x}{K}\right) = r(K-x).$$

4. Funkce $f(x) = x\frac{a}{b+x}$ má v bodě $x=0$ první součinitel x nulový a druhý součinitel $\frac{a}{b+x}$ nenulový a roven $\frac{a}{b}$. První součinitel je lineární. Proto v okolí $x=0$ platí

$$x\frac{a}{b+x} \approx x\frac{a}{b}.$$

3.6 Numerické derivování a závislost tepelné vodivosti mědi na teplotě

Tabulka udává závislost koeficientu tepelné vodivosti mědi na teplotě, $\lambda = \lambda(T)$. Odhadněte pomocí centrální diference derivaci funkce λ pro $T = 400K$ (cca 127°C). Určete i fyzikální jednotku derivace $\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T}$ a slovní interpretaci vypočtené hodnoty.

Poznámka: Teplota v Kelvinech (termodynamická teplota) je teplota ve stupních Celsia posunutá tak, aby teplota −273,15°C odpovídala 0 K. Dílky a tedy i změny teploty jsou na obou stupnicích identické.

Zdroj: pixabay.com

T [K]	λ [W/(m K)]
200	413
400	393
600	379
800	366

Zdroj: Cengel, Mass and heat transfer.

Řešení:

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T}(400) \approx \frac{(379-413)\mathrm{W}/(\mathrm{m\,K})}{2\cdot 200\mathrm{K}} = -0.085\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-2}}$$

Při teplotě $T = 400K$ hodnota koeficientu tepelné vodivosti s rostoucí teplotou klesá. S každým stupněm Celsia (s každým Kelvinem) nad danou teplotu klesne koeficient tepelné vodivosti o $0.085\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$.

Pokusíme se trošku slovně ilustrovat, co nám vlastně vyšlo. Při teplotě $400\,\mathrm{K}$ a teplotním gradientu jeden stupeň Celsia na metr délky prochází mědí tepelný výkon 393 wattů na metr čtvereční, tj. za sekundu se plochou metru čtverečního přenese 393 joulů. S každým stupněm Celsia navíc tato hodnota malinko poklesne: o 0.085 joulu. Odsud je patrné, že při změně teploty řádově o desítky stupňů se koeficent změní o malé jednotky procent a v těchto situacích nebude závislost na teplotě významná.

3.7 Iterační metoda

Úlohy s tepelnou bilancí (např. osluněná stěna) často vedou na rovnice obsahující čtvrtou mocninu a první mocninu neznámé veličiny. Toto je dáno tím, že vyzařování tepla souvisí podle Stefanova-Bolzmannova zákona se čtvrtou mocninou teploty a přenos tepla prouděním nebo vedením souvisí s první mocninou teploty. Koeficient u první mocniny bývá větší než u čtvrté mocniny, protože konstanta ze Stefanova-Bolzmannova zákona je velmi malá. Typickým představitelem by mohla být rovnice

Zdroj: pixabay.com

$$x^4 - 8x + 6 = 0.$$

Napište iterační vzorec pro řešení této rovnice Newtonovou metodou a proveďte několik iterací s vhodnou celočíselnou počáteční aproximací. Poté porovnejte s postupem, kdy v rovnici osamostatníte x z lineární části a z takové rovnice sestavíte iterační vzorec.

Řešení:

Newtonova metoda: $f(x) = x^4 - 8x + 6$, $f'(x) = 4x^3 - 8$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 8x_n + 6}{4x_n^3 - 8}$$

$x_0 = 1$,
$x_1 = 0.75$,
$x_2 = 0.800123762376238$,
$x_3 = 0.801613150991155$,
$x_4 = 0.801614587354561$.

Ad hoc iterace:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 6}{8}$$

$x_0 = 1$,
$x_1 = 0.875000000000000$,
$x_2 = 0.823272705078125$,
$x_3 = 0.807422868167514$,
$x_4 = 0.803126865733812$,
$x_5 = 0.802005182967586$,
$x_6 = 0.801715260030858$