1 Výpočet derivací

Derivaci budeme chápat jako zobrazení, které funkci přiřadí jinou funkci. Proč je tak nesmírně užitečná zjistíme v následujících týdnech.

Základní vzorce.

$$(c)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c) = 0$$

$$(x^n)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$$

$$(\cos x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Zde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta a zbytek jsou vzorce, které platí vždy, když je výraz napravo definovaný.

Triky, které se často hodí.

(A) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

(B) $\sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$

(C) $\dfrac{1}{x^k} = x^{-k}$

(D) $\dfrac{f(x)}{c} = \dfrac{1}{c} f(x)$

(E) $\dfrac{c}{f(x)} = c f^{-1}(x)$

(F) $a^x = e^{x \ln a}$

(G) $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

(H) $\sqrt{x}(x+1) = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$

(I) $\dfrac{x^3 + 4}{x^2} = x + 4x^{-2}$

Derivování a operace mezi funkcemi

Nechť f, g jsou funkce a $c \in \mathbb{R}$ konstanta. Platí

$$
\begin{aligned}
[cf]' &= cf', \\
[f \pm g]' &= f' \pm g', \\
[fg]' &= f'g + fg', \\
\left[\frac{f}{g}\right]' &= \frac{f'g - g'f}{g^2}, \\
\big[f(g(x))\big]' &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = f'(g(x))g'(x)
\end{aligned}
$$

1.1 Výpočet derivace

Určete derivace následujících funkcí, kde $a, b, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $f(x) = x^6 + \dfrac{1}{x^6}$
2. $f(x) = x^2 + 2x + 6$
3. $f(r) = r^3 + 2r^2 - 1$
4. $f(x) = 3x\sqrt{x} + 9x^5$
5. $f(x) = 1 - e^{bx}$
6. $f(x) = (x^2 - 1)^4$
7. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{ax^2}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{(x+6)^2}$
9. $f(x) = \dfrac{a}{(\mu x + b)^2}$

Řešení:

1. $f'(x) = 6x^5 - \dfrac{6}{x^7}$
2. $f'(x) = 2x + 2$
3. $f'(r) = 3r^2 + 4r$
4. $f'(x) = (3x^{3/2} + 9x^5)' = \dfrac{9}{2}\sqrt{x} + 45x^4$
5. $f'(x) = -be^{bx}$
6. $f'(x) = 4(x^2 - 1)^3 2x = 8x(x^2 - 1)^3$
7. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{ax^2} 2ax$

8. $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+6)^3}$

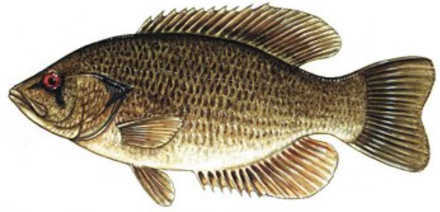
9. $f'(x) = \dfrac{-2a\mu}{(\mu x + b)^3}$

1.2 Růst ryby

Biologové navrhli funkci

$$l = 0.03937t^3 - 0.945t^2 + 10.033t + 3.073$$

jako model délky jistého druhu ryby, kde l je délka ryby v centimetrech, a t je věk v letech. Vypočtěte derivaci $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$. Určete jednotku této derivace a slovní interpretaci hodnoty derivace v bodě $t = 12$.



Zdroj: wikimedia.org

Upraveno podle Stewart, Day: Biocalculus. Calculus for the life siences. V tomto příkladě se setkáváme s klasickou interpretací derivace jako rychlosti změny, tj. hodnoty o kterou se změní závislá veličina, když se nezávislá veličina změní o jednotku.

Řešení: $\left[\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right]$ = cm/rok, tj. centimetr za rok. Platí

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 3 \cdot 0.03937t^2 - 2 \cdot 0.945t + 10.033 = 0.11811t^2 - 1.89t + 10.033$$

a pro $t = 12\,\text{let}$ dostáváme

$$\left.\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right|_{t=12} = 4.4\,\text{cm/rok}.$$

Dvanáctiletá ryba roste rychlostí přibližně 4.4 centimetrů za rok, tj. mezi dvanáctým a třináctým rokem vyroste přibližně o 4.4 centimetru.

1.3 Bazální metabolismus

Zdroj: pixabay.com

Bazální metabolismus M (ve wattech) souvisí s hmotností W vztahem

$$M = AW^n,$$

kde n je pro mnoho živočišných druhů blízké číslu 0.75 a A je konstanta, která je specifická pro daný druh a v rámci daného druhu klesá s věkem. Určete derivaci

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}W}$$

a určete i fyzikální jednotku a slovní interpretaci této derivace.

Zpracováno podle Monteith, Unsworth: Principles of Environmental Physics. Tady je opět klasická interpretace derivace jako rychlosti změny. Rychlost změny ale nemusí být jenom klasické chápání rychlosti jako závislosti na čase. Derivace vyjadřuje, jak závislá veličina reaguje na změny nezávislé veličiny. Pro pochopení, co derivace vyjadřuje, hraje velkou roli i jednotka této derivace. Označení je ponecháno z původní literatury, mimo jiné M není hmotnost a W není watt. Vztah je v literatuře znám jako Kleiberův zákon. Vysvětluje se pomocí něj rozdílná délka života různých živočišných druhů.

Řešení: $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}W} = nAW^{n-1}$ podle pravidla pro derivaci konstantního násobku a pro derivaci mocniny. Jednotka je watt na kilogram, tj. $\left[\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}W}\right] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}$. Derivace udává rychlost, s jakou se projeví změna hmotnosti na bazálním metabolismu. Je to nárůst bazálního metabolismu způsobený nárůstem hmotnosti a přepočtený na jednotkovou změnu hmotnosti. Přibližně také změna bazálního metabolismu ve wattech při změně hmotnosti o kilogram u velkých živočichů nebo v miliwatech při změně hmotnosti o gram u drobných živočichů. Například u malých ptáčků nemá smysl uvažovat nárůst hmotnosti o kilogram a pro interpretaci raději přejdeme k jednotkám tisíckrát menším.

1.4 Mezní náklady (marginal cost)

Náklady na produkci x letadel za rok jsou (v milionech Euro) dány funkcí

$$C(x) = 6 + \sqrt{4x + 4}, \qquad 0 \leq x \leq 30.$$

Platí $C'(15) = 0.25$. Určete, jakou tato derivace má slovní interpretaci a určete i jednotku této derivace.

Zdroj: wikimedia.org

Toto je jedna z nejrozšířenější aplikací derivací mimo přírodní vědy. Zajímáme se o to, jak rychle rostou ekonomické veličiny, protože ekonomika je za vším. Veličiny, které v ekonomii získáváme derivováním, obsahují zpravidla slovo "mezní", nebo též "marginální". Podle Wikipedie nastupující technická revoluce nazývaná Průmysl 4.0 přinese výrobu s velmi malými mezními náklady. Tedy derivace nákladů na výrobu podle množství vyrobeného zboží bude malá. To odpovídá představě výroby v robotizovaných halách, kde hlavním nákladem je vybudování výrobního zařízení.

Řešení: Jednotka derivace $C'(x)$ je milion Euro/kus, resp. milion Euro/letadlo, resp. milion Euro, podle toho, jak nazveme jednotky v nichž měříme počet letadel.

Derivace $C'(15)$ vyjadřuje rychlost, s jakou rostou náklady při produkci 15 letadel. Je to cena vztažená na jednotkový přírůstek, tj. jedná se vlastně o cenu výroby šestnáctého letadla. Šestnácté letadlo má výrobní náklady 0.25 milionů euro.

1.5 Vzdálenost k horizontu

Vzdálenost k horizontu pro pozorovatele ve výšce h nad Zemí je dána funkcí $H = \sqrt{2Rh}$, kde $R = 6.371 \times 10^6\,\mathrm{m}$ je poloměr Země (`https://aty.sdsu.edu/explain/atmos_refr/horizon.html`). Po dosazení a vydělení faktorem 1000, aby H vycházelo v kilometrech, dostáváme vzorec

$$H = 3.57\sqrt{h},$$

kde h je v metrech a H v kilometrech. Určete hodnotu této derivace $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}h}$ pro $h = 5\,\mathrm{m}$ (včetně jednotky) a slovní interpretaci této derivace.

Zdroj: pixabay.com

Někdy je rozměr veličiny derivované stejný, jako rozměr veličiny, podle které se derivuje. Potom je derivace vlastně bez rozměru. Někdy je však vhodné pro srozumitelnější interpretaci jednotky nevykrátit, obzvlášť v případě jako je tento, kdy se obě délky udávají v jiných jednotkách (metry versus kilometry).

Řešení: Pro $H = 3.57\sqrt{h}$ platí

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}h} = \frac{1}{2} \times 3.57 \times \frac{1}{\sqrt{h}}$$

a numericky

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}h}(5) = \frac{3.57}{2\sqrt{5}} \approx 0.7983\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{m}} \approx 0.8\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{m}}.$$

Vzdálenost k horizontu pro pozorovatele ve výšce 5 metrů roste rychlostí 0.8 kilometru na každý metr výšky navíc. Toto je interpretace pro praktické využití. Kromě toho se jednotky dají upravit a ve skutečnosti derivace žádný fyzikální rozměr nemá

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}h}(5) = 0.7983 \times \frac{1000\,\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = 798$$

a každá změna výšky pozorovatele se na vzdálenosti k horizontu projeví svým 800-násobkem.

1.6 Rychlost s jakou roste obsahu kruhu

Váté písky je bezlesý pruh podél železniční trati nedaleko Bzence, kde je extrémní sucho (Moravská Sahara). V dřívějších dobách byly v pruhu podél železnice velmi časté požáry kvůli provozu parních vlaků. Předpokládejme, že požár se v této vysušené oblasti šíří ve tvaru kruhu. V určitém okamžiku je poloměr 50 metrů a roste rychlostí 1.5 metrů za minutu. Zapište zadání pomocí derivací a určete jak rychle roste plocha zasažená ohněm.

Zdroj: J. Kameníček, brnensky.denik.cz

V tomto příkladě se učíme, že ze znalosti vztahů mezi veličinami můžeme odvodit vztah, mezi rychlostmi změn, tj. do statických vzorců můžeme dodat dynamiku vývoje. V praxi někdy jde příklad tohoto typu obejít úvahou: teď je poloměr 50 metrů, tomu odpovídá jakási plocha, za minutu bude poloměr 51.5 metru, tomu odpovídá opět jakási plocha a provnáním s plochou původní snadno zjistím přírůstek. To pro nás může být kontrola, že aparát funguje. Pro nás je teď důležité naučit se tento aparát na malých věcech, abyste mohli později dělat věci velké.

Řešení: Ze zadání: $r = 50\,\mathrm{m}$, $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 1.5\,\mathrm{m\,min^{-1}}$. Zajímá nás $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$.

Výpočet: Derivováním vztahu

$$S = \pi r^2$$

podle r získáváme

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r.$$

Derivováním podle t dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2\pi r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

a numericky

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 2\pi \times 50 \times 1.5 \approx 471\,\mathrm{m^2\,min^{-1}}.$$

1.7 Sůl nad zlato

V pohádce *Sůl nad zlato* sype Maruška z bezedné slánky sůl na hromadu soli ve tvaru kužele, který roste tak, že objem je v každém okamžiku svázán s výškou vzorcem

$$V = \frac{1}{4}h^3.$$

Výška je 0.5 metru a vydatnost solničky 10 litrů (tj. 0.01 krychlových metrů) soli za minutu. Určete, jak rychle roste hromada soli do výšky.

Zdroj: pixabay.com

Řešení:

Podle zadání je $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0.01$ krychlových metrů za minutu, $h = 0.5$ metru a chceme znát $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$. Derivováním dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{4}h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

Odsud
$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\frac{1}{h^2}$$
a po dosazení
$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3} \times 0.01 \times \frac{1}{0.5^2}\,\mathrm{m\,min^{-1}} = 0.053\,\mathrm{m\,min^{-1}}.$$
Hromada roste do výšky rychlostí 5.3 centimetru za minutu.

1.8 Rychlost s jakou roste obsahu kruhu II

Město má přibližně tvar kruhu o poloměru 10 km a žije v něm 300 000 obyvatel. Jak rychle musí růst poloměr kruhu (velikost města), pokud počet obyvatel roste rychlostí 10 000 obyvatel za rok a chceme udržet stejnou hustotu osídlení?

Zdroj: http://mp.mestokyjov.cz/

Toto je mírná modifikace příkladu s požárem. Protože město má konstantní hustotu osídlení, jsou počet obyvatel i rozloha přímo úměrné a je to podobné, jako bychom jednu veličinu vyjadřovali ve dvou různých jednotkách.

Řešení: Ze zadání: $r = 10\,\mathrm{km}$, $N = 300\,000$, $\sigma = \frac{N}{\pi r^2}$ je hustota osídlení a ta je konstantní, $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 10\,000\,\mathrm{rok}^{-1}$. Zajímá nás $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$.

Výpočet: Pro počet obyvatel platí $N = \sigma\pi r^2$ a derivováním

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sigma\pi 2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

Odsud

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi r\sigma}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$$

a protože $\pi r\sigma = \dfrac{N}{r}$, máme

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{2N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{10}{2\times 300\,000}\times 10\,000 = 0.166\,\mathrm{km\,rok^{-1}} \approx 170\,\mathrm{m\,rok^{-1}}$$

Existuje ještě poněkud přímočařejší, ale na provedení mírně náročnější postup, protože je nutné derivovat podíl funkcí. Zderivujeme přímo definiční vztah pro hustotu osídlení $\sigma = \dfrac{N}{\pi r^2}$ podle času. Vlevo je derivace konstanty, tj. nula, vpravo derivace podílu. Proto

$$0 = \frac{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\pi r^2 - N2\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}}{(\pi r^2)^2}$$

a odsud

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\pi r^2 - N2\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Nyní osamostatníme derivaci poloměru a dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\pi r^2 = N2\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\frac{r}{2N}$$

a výsledek je stejný jako v předchozím postupu.