Přibližné řešení rovnic Newtonovou metodou

Vstup: Funkce $f(x)$ a počáteční odhad x_0 řešení rovnice

$$f(x) = 0 . \qquad (*)$$

Výstup: Aproximace řešení rovnice $(*)$.

Myšlenka: Funkci $f(x)$ aproximujeme lineární funkcí a nulový bod této aproximace bude zlepšením dosavadního odhadu řešení.

Implementace:

x_0 ... počáteční odhad

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .... lin. aproximace

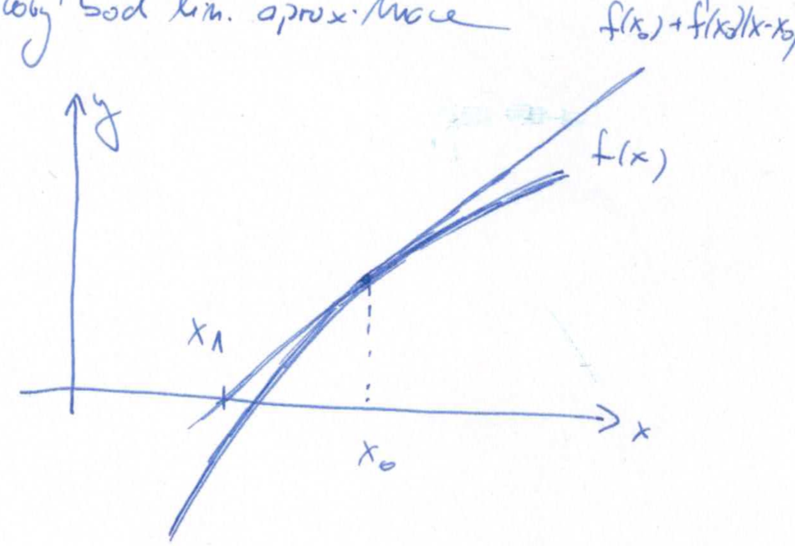
$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$ .. nulový bod lin. aproximace

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\vdots$$



$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Metoda nemusí konvergovat, ale pokud konverguje, každý krok přibližně zdvojnásobí počet míst, která máme správně.

Př: $\cos x = x$, $x_0 = 0,5$

$f(x) = x - \cos x$, $f'(x) = 1 + \sin x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x - \cos x}{1 + \sin x} \Rightarrow$$

$x_0 = 0,5$
$x_1 = 0,75522$
$x_2 = 0,73914$
$x_3 = 0,7390851339$
$x_4 = 0,739085133215161$
$x_5 =$ -"-

Převod diferenciální rovnice na bezrozměrný tvar

Model: Ochlazování tělesa o teplotě T_0 v prostředí o konstantní teplotě T_∞ se řídí počáteční úlohou (podle Newtonova zákona ochlazování)

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-T_\infty) \quad , \quad T(0)=T_0 \qquad (*)$$

Eliminace parametrů:

a) $$\frac{d(T-T_\infty)}{dt} = -k(T-T_\infty) \quad , \quad T(0)-T(\infty) = T_0 - T_\infty$$

b) $$\frac{d\,\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}}{dt} = -k\,\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty} \quad , \quad \frac{T(0)-T(\infty)}{T_0-T_\infty} = 1$$

Zavedeme-li bezrozměrnou teplotu $\vartheta = \frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}$, úloha se transformuje na

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -k\vartheta \quad , \quad \vartheta(0)=1$$

c) $$\frac{d\vartheta}{d(kt)} = -\vartheta \quad , \quad \vartheta(0)=1$$

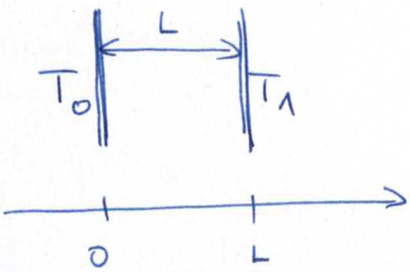
Zavedeme-li bezrozměrný čas $\tau = k.t$, úloha se transformuje na

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = -\vartheta \; , \quad \vartheta(0)=1. \qquad (**)$$

Závěr: Vhodnou substitucí se podařilo úlohu $(*)$ se třemi parametry T_0, T_∞, k upravit na úlohu $(**)$, která parametry neobsahuje a je vhodnější pro numerické experimenty.

$[\vartheta] = \frac{°C}{°C} = 1 \qquad [\tau] = s^{-1}.s = 1$ .... nové veličiny nemají fyz. jednotku odsud název „bezrozměrné"

Nondimenzionalizace parc. dif. rovnice vedení tepla



Rovnice vedení tepla $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

$T = T(x,t)$ ... teplota ρ ... hustota

t ... čas c ... měrná tep. kapacita

D ... difuzní koeficient

Úloha: (úplná formulace úlohy pro rovnici vedení tepla.)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$ ... rovnice

$T(0,t) = T_0$ ... teplota na levém okraji

$T(L,t) = T_1$ ... teplota na pravém okraji

$T(x,0) = f(x)$ ... počáteční rozložení teploty

$$\xi = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$$ ... bezrozměrná teplota $T = T_0 \Rightarrow \xi = 0$, $T = T_1 \Rightarrow \xi = 1$

$$\mu = \frac{x}{L}$$ ... bezrozměrná vzdálenost $x = 0 \Rightarrow \mu = 0$, $x = L \Rightarrow \mu = 1$

V nových proměnných:

$T \to \xi$

$x \to \mu$

$$\rho c \frac{\partial \xi}{\partial t} = D \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mu^2}$$

$\xi(0,t) = 0$

$\xi(1,t) = 1$ $\xi = \xi(\mu, t)$

$\xi(\mu,0) = f_\xi(\mu)$

$$\tau = \frac{Dt}{\rho c L^2}$$ ... bezrozměrný čas (Fourierovo číslo)

Finální tvar úlohy: (Neobsahuje parametry T_0, T_1, L, ρ, c, D.)

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mu^2}$$ ← Rovnice

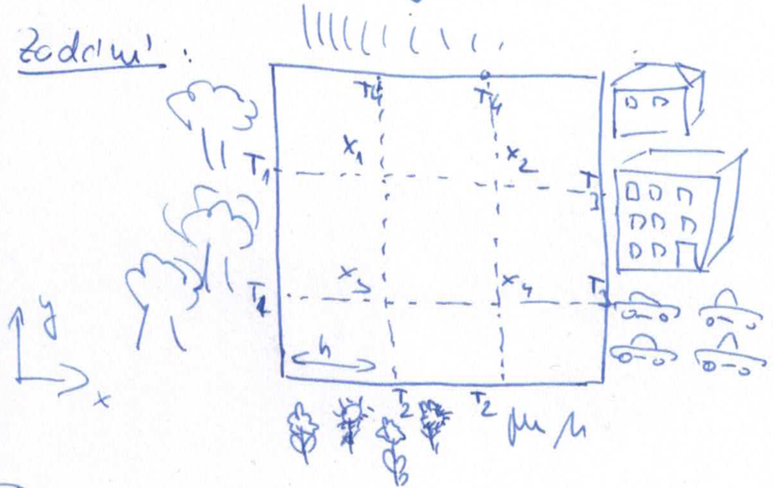
$\xi(0,\tau) = 0$, $\xi(1,\tau) = 1$ ← Podmínky na okrajích

$\xi(\mu,0) = f_\xi(\mu)$ ← Počáteční podmínka

Podobně ale pro vlhkost viz skriptum Horáček P: Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva

Metoda konečných diferencí pro rovnici vedení tepla ve 2D

Zadání:



Rovnice vedení tepla ve stacionárním homogenním případě ve 2D je

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 .$$

Diskretizace s ekvidistantním krokem

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)h^2 \dots$$ Taylorův polynom v bodě $x+h$

$$f(x-h) \approx f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)h^2 \dots\dots$$ –"– v bodě $x-h$

$$f(x+h) + f(x-h) \approx \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) f''(x)h^2 + 2f(x)$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left[f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \right]$$ ... aproximace $f''(x)$

Podobně pro parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}\left[f(x+h,y) + f(x-h,y) - 2f(x,y) \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}\left[f(x,y+h) + f(x,y-h) - 2f(x,y) \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}\left[f(x+h,y) + f(x,y+h) + f(x,y-h) + f(x-h,y) - 4f(x,y) \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \iff [\dots] = 0 \iff f(x,y) = \frac{f(x+h,y) + f(x,y+h) + f(x,y-h) + f(x-h,y)}{4}$$

tj. funkční hodnota je průměrem okolních čtyř uzlových bodů. Tuto úlohu jsme řešili jako motivační úlohu pro soustavu lineárních rovnic v lineární algebře.

NIKDY

neprogramujte sami
numerickou metodu.

VŽDY

raději použijte hotovou knihovnu
nebo proceduru naprogramovanou
specialistou.