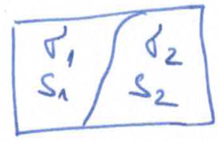
Dvojný integrál

Motivace a) Hmotnost (m) obsah (S) a plošná hustota (ρ) homogenní ($\rho = \text{konst}!$) desky.

$$m = S \cdot \rho$$

b) Hmotnost desky složené ze dvou homogenních částí (ρ_1, ρ_2, S_1, S_2).



$$m = \rho_1 S_1 + \rho_2 S_2$$

Analogicky libovolný konečný počet částí.

c) Hmotnost desky z materiálu s obecnou plošnou hustotou $\rho(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$m = \iint_M \rho(x,y)\, dx\, dy \qquad \left(\text{též } \iint_M \rho\, dS \text{ nebo } \iint_M \rho\, dA\right)$$

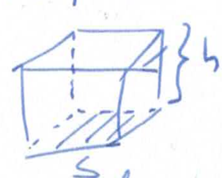
Kde se používá (obecné schema)

1. Studujeme aditivní veličinu, rozloženou na části roviny a charakterizovanou plošnou hustotou.
2. V případě konstantní hustoty rozložení počítáme příslušnou aditivní veličinu součinem.

Př 1: tok potrubím

$Q = S \cdot v$

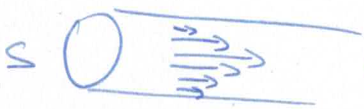
Př 2: objem



$V = S \cdot h$

3. V případě nekonstantního rozložení dvojným integrálem.

Př 1: tok potrubím



$$Q = \iint_S v\, dx\, dy$$

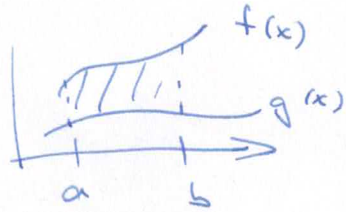
Př 2: objem

$$V = \iint_S h\, dx\, dy$$

Výpočet dvojného integrálu

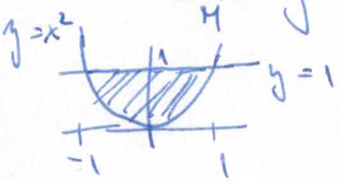
Převádíme na dvojný v závislosti na tom, přes jakou množinu se integruje.

1



$$\boxed{\begin{array}{l} M:\quad a \le x \le b\ ,\quad g(x) \le y \le f(x) \\ \displaystyle\iint_M \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \varphi(x,y)\,dy\;dx \end{array}}$$

Př:



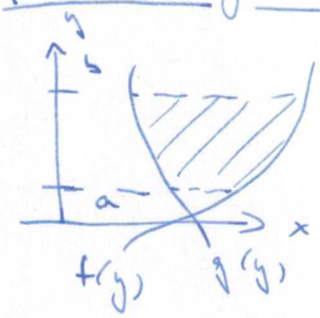
$$\iint_M y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} y\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{1} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^4\right] dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{10}x^5\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right) = 1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

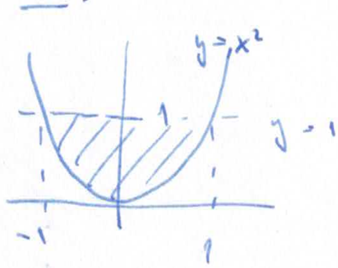
2

$$\boxed{M:\quad a \le y \le b\ ,\quad g(y) \le x \le f(y)}$$



$$\boxed{\iint_M \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{g(y)}^{f(y)} \varphi(x,y)\,dx\;dy}$$

Př:



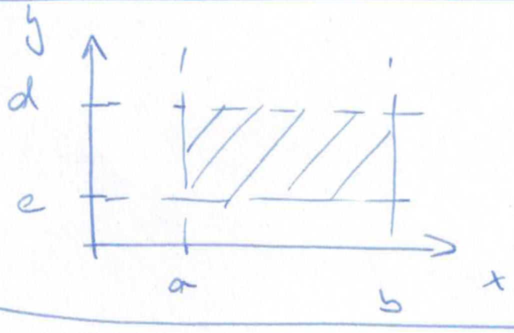
$$\iint_M y\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} y\,dx\,dy = \int_0^1 y \cdot 2\sqrt{y}\,dy =$$

$$= \int_0^1 2y^{3/2}\,dy = \left[2\,\frac{2}{5}\,y^{5/2}\right]_0^1 = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{4}{5}$$

(Stejný integrál a stejný výsledek jako v předchozím případě, ale pro jiné pořadí integrace)

Výpočet dvojného integrálu přes obdélníkovou množinu

$$\boxed{M: \quad a \le x \le b \;, \quad c \le y \le d}$$



Přímo můžeme aplikovat variantu ① i ②.

$$\iint_M \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_c^d \int_a^b \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

Je-li navíc $\varphi(x,y) = f(x)\,g(y)$, platí

$$\iint_M f(x)g(y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x)\cdot g(y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_a^b f(x)\cdot \int_c^d g(y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_c^d g(y)\,dy$$

tj.

$$\boxed{\iint_M f(x)g(y)\,dx\,dy = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_c^d g(y)\,dy}$$

Využití dvojného integrálu

1) $\iint_M dx\,dy = meas(M)$ ... obsah množiny M

2) $\dfrac{\iint_M f(x,y)\,dx\,dy}{meas(M)}$ ... střední hodnota funkce $f(x,y)$ na množině M

Např. střední hodnota rychlosti při proudění viskózní kapaliny, protože rychlost ubývá kvadraticky směrem od středu.

3) $\dfrac{\iint_M x\,\sigma(x,y)\,dx\,dy}{\iint_M \sigma(x,y)\,dx\,dy}$ nebo (homogenní množina) $\dfrac{\iint_M x\,dx\,dy}{\iint_M dx\,dy}$

x-ová poloha těžiště množiny M. Analogicky y-ová poloha těžiště. Pro homogenní oblast jde vlastně o střední hodnotu funkce x na množině M.

4) $\iint_M y^2\,dx\,dy$ ... kvadratický moment množiny M

Veličina důležitá při posuzování tuhosti nosníku o průřezu M.

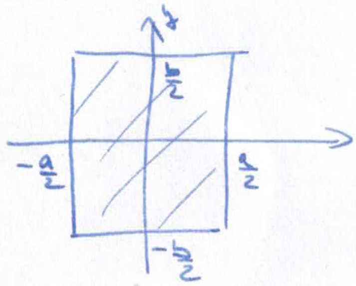
Kvadratický moment vzhledem k ose

$$I_x := \iint_M y^2\,dx\,dy \quad \dots \text{ kvadratický moment vzhledem k ose } x$$

Obecně: $I = \iint_M r^2\,dx\,dy$ kde r je vzdálenost od osy otáčení

Tato veličina vystupuje v tuhosti nosníků.

Př: Nosník o rozměrech $a \times b$, osa procházející těžištěm.



$M: \quad -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}$

$$\iint_M y^2\,dx\,dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2\,dy = a \cdot \left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = a \cdot \left[\frac{1}{3}\frac{b^3}{8} - \frac{1}{3}\left(-\frac{b^3}{8}\right)\right] =$$

$$= a \cdot \frac{1}{3} b^3 \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] = a \cdot \frac{1}{3} b^3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} a b^3$$

Př:

A

Nosník $a = b = 1$

$S = a \cdot b = 1$

$I = \frac{1}{12}$

B

Nosník $a = b = \sqrt{2}$

$S = a \cdot b = 2$

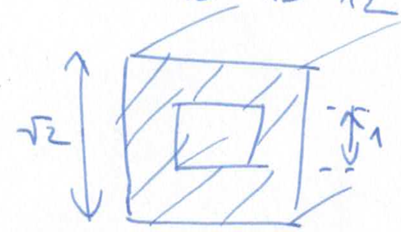
$I = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^3 = \frac{4}{12}$

C

Nosník B \ A

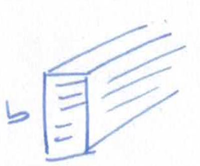
$S = 2 - 1 = 1$

$I = \frac{4}{12} - \frac{1}{12} = \frac{3}{12}$



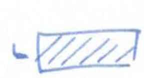
Nosník C je stejně těžký jako A, ale třikrát tužší!

Př:



$a = 1$
$b = 2$ $\Rightarrow I = \frac{8}{12}$

versus

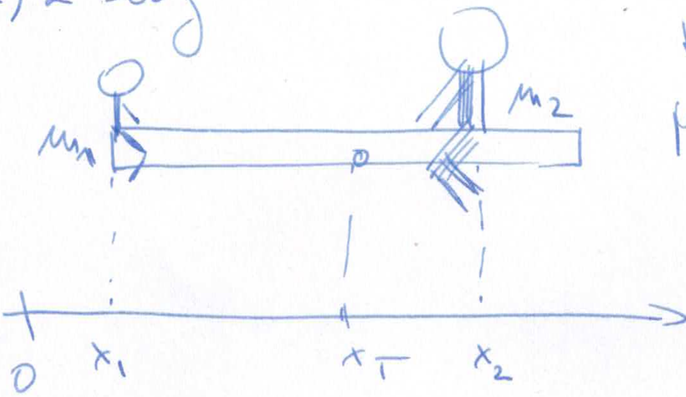


$a = 2$
$b = 1$ $\Rightarrow I = \frac{2}{12}$

Nosník „nastojato" je $\Rightarrow$ 4-krát tužší!

Těžiště

a) 2 body



Houpačka „funguje dobře" pokud těžiště je v ose otáčení, tj.

$$(m_1+m_2)\,x_T = m_1x_1 + m_2x_2$$

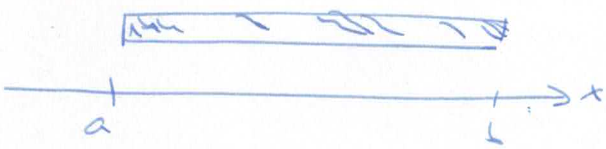
$$x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2}$$

b) konečný počet bodů

$$x_T \sum_i m_i = \sum_i m_i x_i \Rightarrow x_T = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}$$

c) hmotnost rozložená v přímce, lineární hustota $\tau(x)$

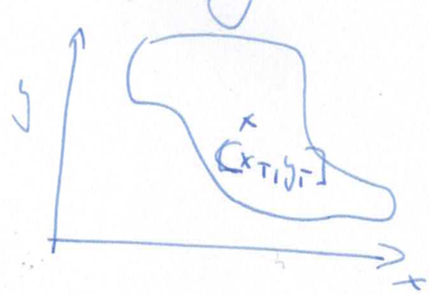
$$x_T = \frac{\int_a^b x\,\tau(x)\,dx}{m}$$, kde $m = \int_a^b \tau(x)\,dx$ hmotnost



d) hmotnost rozložená v množině, která je částí roviny

$$x_T = \frac{\iint_M x\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{m},$$

$$y_T = \frac{\iint_M y\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{m},$$



kde $m = \iint_M \rho(x,y)\,dx\,dy$ je hmotnost.

Steinerova věta

y_0 … y-ová souřadnice těžiště

$$I_T = \iint_M (y-y_0)^2 \, dx\,dy$$ … kvadratický moment vzhledem k ose procházející těžištěm // s x

$$I = \iint_M y^2 \, dx\,dy$$ … kvadratický moment vzhledem k ose x.

$$I_T = \iint_M (y-y_0)^2 \, dx\,dy = \iint_M y^2 - 2y\,y_0 + y_0^2 \, dx\,dy =$$

$$= \iint_M y^2 \, dx\,dy - 2y_0 \iint_M y \, dx\,dy + y_0^2 \iint_M dx\,dy =$$

$$= I - 2y_0 \cdot y_0 \cdot S + y_0^2 S =$$

$$= I - y_0^2 S$$

$$I = I_T + y_0^2 S$$ kde S je obsah množiny

kvadratický moment ~~Moment setrvačnosti~~ vzhledem k ose procházející těžištěm je menší než moment vzhledem k jiné rovnoběžné ose

Podobně pro moment setrvačnosti:

$$J = J_T + y_0^2 \cdot m$$

$$J = \iint_M \sigma y^2 \, dx\,dy \qquad J_T = \iint_M \sigma \, (y-y_0)^2 \, dx\,dy$$

$$y_0 = \frac{\iint_M \sigma \cdot y \, dx\,dy}{\iint_M \sigma \, dx\,dy}$$