Rovnice kontinuity ~~&~~ spol.

30.4.2019

1

Připomenutí: Derivace

Parciální derivace, gradient

Vektorové pole, stavová veličina, konstitutivní zákony

Obecný tvar konstitutivního zákona (odezva materiálu na vnější podnět)

$$\boxed{\vec{F} = -k \cdot \nabla \varphi}$$

φ ... stavová veličina ~~(~~

$\nabla\varphi$ ... gradient stavové veličiny (vnější podnět)

k ... matice (symetrická) nebo skalár

$\vec{F}$ ... tok vektorového pole

a) $k \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{F}$ a $\nabla\varphi$ jsou rovnoběžné (izotropní materiál)

b) $k = \begin{pmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F}$ a $\nabla\varphi$ jsou rovnoběžné jenom tehdy, pokud mají směr jedné z os (ortotropní materiál)

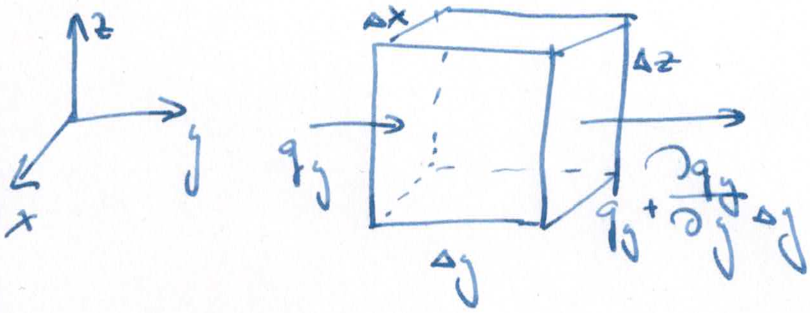
c) $k = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} \end{pmatrix} \Rightarrow$ izotropní materiál.

$\vec{F}$ a $\nabla\varphi$ jsou ~~...~~ rovnoběžné, pokud $\nabla\varphi$ má směr vlastního vektoru matice k

Konstitutivní zákony v praxi: (viz přednáška)

Fickův zákon, Darcyho zákon, Fourierův zákon

Divergence vektorového pole



Tok dovnitř: $-q_y \, \Delta x \Delta z$

Tok ven: $\left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}\Delta y\right) \Delta x \Delta z$

Celkem: $\frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$

Celkem na jednotku objemu: $\frac{\partial q_y}{\partial y}$
$(V = \Delta x \Delta y \Delta z)$

Podobně ve směru osy x: $\frac{\partial q_x}{\partial x}$

Podobně ve směru osy z: $\frac{\partial q_z}{\partial x}$

Celkově pro tok vektorového pole $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{q} = \nabla \vec{q} := \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}}$$

Divergence vektorového pole $\vec{q}$, udává přenos toku z tohoto místa nad tokem do tohoto místa

Výpočet gradientu a divergence

Př: Nechť $\vec{F} = \nabla\varphi$. Najděte $\operatorname{div}\vec{F}$, tj. $\operatorname{div}(\nabla\varphi)$.

Řešení: $\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^T = \vec{F}$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Př: Nechť $D = \begin{pmatrix} D_x & 0 & 0 \\ 0 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_z \end{pmatrix}$, $\vec{F} = -D\nabla\varphi$. Najděte $\operatorname{div}\vec{F}$.

Řešení

$\nabla\varphi$ jako v minulém případě

$$\vec{F} = -D\nabla\varphi = -\begin{pmatrix} D_x & 0 & 0 \\ 0 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} D_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ D_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ D_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

Je-li navíc $D_x \in \mathbb{R}$, $D_y \in \mathbb{R}$, $D_z \in \mathbb{R}$ (homogenní materiál)

dostáváme $\operatorname{div}\vec{F} = -D_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - D_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - D_z\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$.

Je-li navíc $D_x = D_y = D_z = D \in \mathbb{R}$ (homogenní izotropní mat.)

dostáváme $\operatorname{div}\vec{F} = -D\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)$.

Rovnice kontinuity

Rychlost změny množství stavové veličiny	=	Vydatnost zdrojů	−	Tok přes hranici směrem ven.

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \sigma - \operatorname{div} \vec{j}}$$

ϱ ... stavová veličina v podrobnostním objemu
σ ... vydatnost zdrojů —"—
$\vec{j}$ ... tok přenášející stavovou veličinu

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = \sigma}$$

Př: Vedení tepla: $\sigma = 0$ (nejsou zdroje), stavovou veličinou je teplota T, ta je svázána s teplem vztahem $\Delta T = \rho \cdot c \cdot \Delta Q$ (ρ.. hustota, c.. měrná tepelná kapacita). Konstitutivním zákonem je Fourierův zákon $\vec{q} = -D \nabla T$.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0$$

$$\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(D \nabla T) = 0$$

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(D \nabla T)}$$

Rovnice vedení tepla ve 2D

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(D \nabla T)$$

kde $\nabla T = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix}$ a $\operatorname{div}\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$

1) Obecný případ $D = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$D \nabla T = \begin{pmatrix} D_{xx}\frac{\partial T}{\partial x} + D_{xy}\frac{\partial T}{\partial y} \\ D_{xy}\frac{\partial T}{\partial x} + D_{yy}\frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}(D\nabla T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xy}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{xy}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

Rovnice:

$$\boxed{\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xy}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{xy}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}\right)}$$

2) Ortotropní případ s osami v anatomických směrech dřeva

$D_{xy} = 0$

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}\right)}$$

3) Homogenní případ, $D_{xx} \in \mathbb{R}$, $D_{yy} \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = D_{xx}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + D_{yy}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}$$

4) Homogenní izotropní případ $D_{xx} = D_{yy} = D \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)} =: D \nabla^2 T$$