Průběh funkce

Umění kreslení grafu

Petr Liška

Mendelova univerzita

23.4.2019

Co už známe

1. ze samotného předpisu funkce

$$y = f(x)$$

   umíme zjistit definiční obor, průsečíky s osami a znaménko funkce
2. víme jak pomocí první derivace zjistit, kde je funkce rostoucí nebo klesající, a umíme najít lokální extrémy

Jak derivace ovlivňuje tvar grafu?

Definice

Leží-li graf funkce f nad každou svojí tečnou v libovolném bodě intervalu I, tj. platí-li

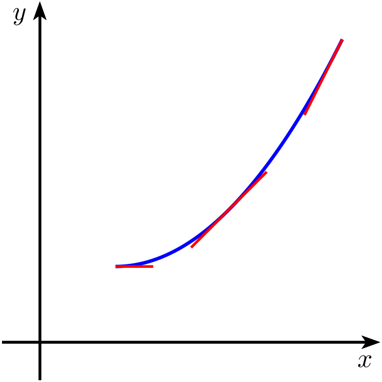
$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{pro} \quad x, x_0 \in I,$$

řekneme, že funkce je *konvexní* na intervalu I.

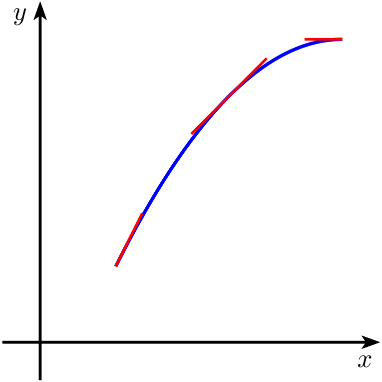
Leží-li graf funkce f pod každou svojí tečnou v libovolném bodě intervalu I, tj. platí-li

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{pro} \quad x, x_0 \in I,$$

řekneme, že funkce je *konkávní* na intervalu I.



konvexní = nad tečnou



konkávní = pod tečnou

Věta

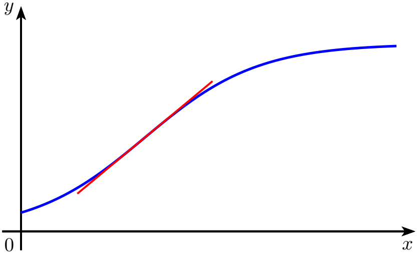
Nechť I je otevřený interval a f má druhou derivaci na I.

a) Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konvexní na I.

b) Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konkávní na I.

Definice

Řekneme, že x_0 je *inflexním bodem* funkce f, jestliže je f v x_0 spojitá a jestliže je vlevo od bodu x_0 konkávní a vpravo od tohoto bodu je konvexní, anebo naopak.



Věta

a) *Nechť x_0 je inflexní bod a nechť existuje $f''(x_0)$. Pak $f''(x_0) = 0$.*

b) *Nechť $f''(x_0) = 0$, v levém okolí bodu x_0 platí $f''(x) < 0$ a v pravém okolí bodu x_0 platí $f''(x) > 0$, nebo naopak. Pak je x_0 inflexním bodem funkce f.*

Poznámka - druhá derivace a extrémy

Věta

Nechť je funkce f spojitá v okolí bodu x_0.

a) Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$, potom funkce f má lokální minimum v bodě x_0.

b) Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) < 0$, potom funkce f má lokální maximum v bodě x_0.

Například část a) je pravdivá, protože $f''(x_0) > 0$ znamená, že f je konvexní v okolí bodu c, čili, že leží nad svojí tečnou. Ale jelikož $f'(x_0) = 0$ je tato tečna přímka rovnoběžná s osou x. Funkce f má tedy v tomto bodě lokální minimum.

Příklad

Určete intervaly, ve kterých je funkce

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

konvexní/konkávní, případně určete její inflexní body.

Příklad

Nosník o délce L je na obou koncích umístěn do betonových stěn a je rovnoměrně zatěžován silou W. V takovém případě je prohnutí nosníku popsáno funkcí

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2,$$

kde E je Youngův model pružnosti a I je moment setrvačnosti průřezu nosníku. Popište prohnutí nosníku.

Jak se funkce chová v nekonečnu aneb zase limita

Skoro definice

Funkce $y = f(x)$ má v bodě ∞ limitu L, jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně velké. Zapisujeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Funkce $y = f(x)$ má v bodě ∞ limitu ∞, jestliže hodnoty funkce $f(x)$ můžeme udělat libovolně velké tak, že vezmeme dostatečně velké hodnoty x. Zapisujeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Podobně můžeme popsat i limity, kde by bylo $-\infty$.

Chovaní funkce v okolí bodů, kde neexistuje

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu zleva rovnu L, píšeme

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L,$$

jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x menší než x_0 a dostatečně blízké hodnotě x_0.

Podobně můžeme popsat limitu zprava i příslušné nevlastní limity.

Věta

Platí $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *právě tehdy, když*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L\,.$$

Užitečný nástroj - L'Hospitalovo pravidlo

Věta

Buď $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Nechť je splněna jedna z podmínek*

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *, pak existuje také* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Využitím různých triků se na tyto dva případy dají převést i ostatní tzv. *neurčité výrazy*

$$\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^0, \qquad 1^\infty.$$

Příklad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Příklad

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}, \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x}{(x-2)^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

Přímka $x = x_0$ se nazývá *asymptotou bez směrnice* funkce f, jestliže má f v x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

Vyšetření průběhu funkce

1. Stanovíme definiční obor $D(f)$. Určíme nulové body a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná. Případně zda je funkce f sudá, lichá nebo periodická.
2. Vypočítáme f' a podle jejího znaménka určíme:

   intervaly, kde je f rostoucí (z podmínky $f' > 0$),
   intervaly, kde je f klesající (z podmínky $f' < 0$),
   lokální extrémy (podle změny znaménka f').
3. Vypočítáme f'' a podle jejího znaménka určíme:

   intervaly, kde je f konvexní (z podmínky $f'' > 0$),
   intervaly, kde je f konkávní (z podmínky $f'' < 0$),
   inflexní body (podle změny znaménka f'').
4. Určíme chování funkce f v nekonečnu a v bodech, kde neexistuje.
5. Nakreslíme graf funkce.

Příklad

Vyšetřete průběh funkce

$$y = \frac{4}{x^2 - 4}$$

víte-li, že

$$y' = -\frac{8x}{(x^2 - 4)^2}, \qquad y'' = \frac{24x^2 + 32}{(x^2 - 4)^3}.$$

Příklad

Vyšetřete průběh funkce

$$y = x\mathrm{e}^x$$

víte-li, že

$$y' = (x + 1)\mathrm{e}^x, \qquad y'' = (x + 2)\mathrm{e}^x.$$