DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Definice: a) $\frac{dy}{dx} = \varphi(x,y)$ ... diferenciální rovnice (ODE)

b) $\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \varphi(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$ ... počáteční úloha (IVP) (diferenciální rovnice s počáteční podmínkou)

Věta: Má-li funkce $\varphi(x,y)$ ohraničenou parciální derivaci $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ v okolí počáteční podmínky, potom má počáteční úloha právě jedno řešení.

Př: $y' = y$ ... má řešení $y = e^x$

... má dokonce řešení $y = C \cdot e^x$, $C \in \mathbb{R}$

(později uvidíme, že VŠECHNA řešení jsou tohoto tvaru)

Př: $\left.\begin{array}{l} y' = y \\ y(x_0) = y_0 \\ x_0, y_0 \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$ ... má řešení $y = y_0 e^{x - x_0} = \frac{y_0}{e^{x_0}} e^x$

Toto řešení dostanu vhodnou volbou konstanty C v řešení minulého příkladu. Proto $y = C \cdot e^x$ zahrnuje všechny funkce splňující $y' = y$. Nazývá se <u>obecné řešení</u> rovnice $y' = y$.

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ODE

Definice derivace: $$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

aproximace derivace: $$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

Dif. rce: $$\boxed{\frac{dy}{dx} = \varphi(x,y)}$$

aproximace dif rce:

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \varphi(x,y)$$

$$y(x+h) - y(x) = \varphi(x,y) \cdot h$$

$$y(x+h) = y(x) + \varphi(x,y) \cdot h$$

Iterační schéma (Eulerova metoda)

$$\boxed{\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + \varphi(x_n, y_n) \cdot h \end{aligned}}$$

GRAFICKÝ VÝZNAM, SMĚROVÉ POLE

(viz prezentace)

TRANSFORMACE DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Buď y fce proměnné x. $k, k_1, k_2, y_0 \in \mathbb{R}$ konstanty

a) Z derivace součtu plyne

$$\frac{d(y \pm y_0)}{dx} = \frac{dy}{dx} \pm \frac{dy_0}{dx} = \frac{dy}{dx} \pm 0 = \frac{dy}{dx}.$$

b) Z derivace konstantního násobku plyne

$$\frac{d(ky)}{dx} = k \cdot \frac{dy}{dx}.$$

c) Z derivace složené funkce pro $X = kx$ plyne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dX} \cdot \frac{dX}{dx} = \frac{dy}{dX} \cdot k \qquad \text{j.} \quad \frac{dy}{dX} = \frac{dy}{d(kx)} = \frac{1}{k}\frac{dy}{dx}.$$

Celkem:

$$\frac{d(k_1 y + y_0)}{d(k_2 x)} = \frac{k_1}{k_2} \frac{dy}{dx}$$

Využití:

$$\frac{dy}{dx} = -k(y - y_0) \quad \ldots \text{ rovnice se \underline{DVĚMA} parametry}$$

$$\frac{d(y-y_0)}{dx} = -k(y-y_0)$$

$$\frac{1}{k} \frac{d(y-y_0)}{dx} = -(y-y_0)$$

$$\frac{d(y-y_0)}{d(kx)} = -(y-y_0)$$

a po substituci $y - y_0 = Y$, $kx = X$ dostáváme

$$\frac{dY}{dX} = -Y \quad \ldots \text{ rovnice \underline{BEZ} parametrů}$$

(mnohem pohodlnější pro další studium)

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $\frac{dy}{dx} = y' = f(y)$

- Je-li $f(y_0)=0$, je $y(x)=y_0$ konstantním řešením.

- $$\frac{dy}{dx} = k\cdot y \quad \Rightarrow \quad y = C\cdot e^{kx}$$
  $k\in\mathbb{R}$ .. neohraničené pro $k>0$, blíží se k nule pro $k<0$

  Konstantní řešení rovnice $y' = kx$ je $y=0$. Toto řešení je stabilní pro $k<0$ a nestabilní pro $k>0$.

- $\frac{dy}{dx} = f(y)$ a $f(y)=0$

  Lineární aproximace pravé strany: $f(y)\approx f(y_0) + f'(y_0)(y-y_0)$

  Aproximovaná rovnice: $\frac{dy}{dx} = f'(y_0)(y-y_0)$

  $$\frac{d(y-y_0)}{dx} = f'(y_0)(y-y_0)$$

  Po substituci $y-y_0 = Y$, $f'(y_0)=k$ dostaneme
  $\frac{dY}{dx} = kY$, stejnou rovnici jako v předchozím bodě.

Důsledek: Konstantní řešení $y(x)=y_0$ rovnice $\frac{dy}{dx} = f(y)$ existuje pokud platí $f(y_0)=0$. Toto řešení je stabilní, pokud $f'(y_0)<0$ a nestabilní pokud $f'(y_0)>0$.

Diferenciální rovnice $\frac{dy}{dx} = y' = f(x) \cdot g(y)$

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)}$$ … DR se separovanými proměnnými.

Postup řešení

(A) Je-li $g(y_0) = 0$, je $y = y_0$ konstantním řešením.

(B) Je-li $g(y) \neq 0$, řešíme následovně:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \qquad \Big| \cdot \frac{1}{g(y)} \cdot dx$$

$$\frac{1}{g(y)}\, dy = f(x) \cdot dx$$

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx + C}$$ … obecné řešení rovnice (*)

Př: $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{xy}$ tj. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{y^2-1}{y}$

(A) $\frac{y^2-1}{y} = 0$ pro $\underline{y = 1}$ a $\underline{y = -1}$

(B) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{y^2-1}{y}$

$$\frac{y}{y^2-1}\, dy = \frac{1}{x}\, dx$$

$$\int \text{—"—} = \int \text{—"—}$$

$$\frac{1}{2} \ln|y^2-1| = \ln|x| + c$$

Celkem: $\begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \\ \frac{1}{2}\ln|y^2-1| = \ln|x| + C \end{cases}$ $C \in \mathbb{R}$