VLASTNOSTI INTEGRÁLU

- Z minulé přednášky víme, že je lineární, tj. zachovává součet a násobení konstantou.

- Monotonie

Věta: Je-li $f(x) \geq g(x)$ pro $x \in [a,b]$, potom
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Důsledek: Integrál nezáporné funkce je nezáporný.

- Aditivita vzhledem k mezím

Věta: Platí
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(Plyne ze vztahu
$$F(b) - F(a) = \left[F(c) - F(a)\right] + \left[F(b) - F(c)\right]$$
)

Střední hodnota

Hodnota, kterou když nahradíme integrovanou funkci, integrál se nezmění.

Pro $\mu \in \mathbb{R}$ (číslo) platí

$$\int_a^b \mu \, dx = \mu \int_a^b 1 \, dx = \mu (b-a).$$

Má-li platit

$$\int_a^b \mu \, dx = \int_a^b f(x) \, dx ,$$

musí být

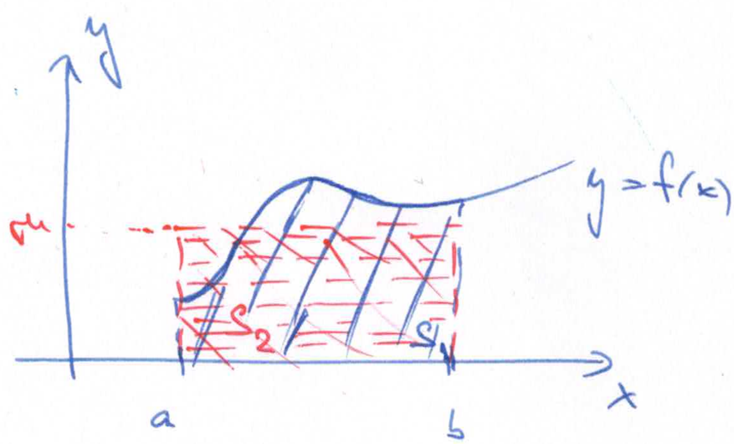
$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

a) Graficky:

$$S_1 = \int_a^b f(x) \, dx$$

$$S_2 = \mu (b-a)$$

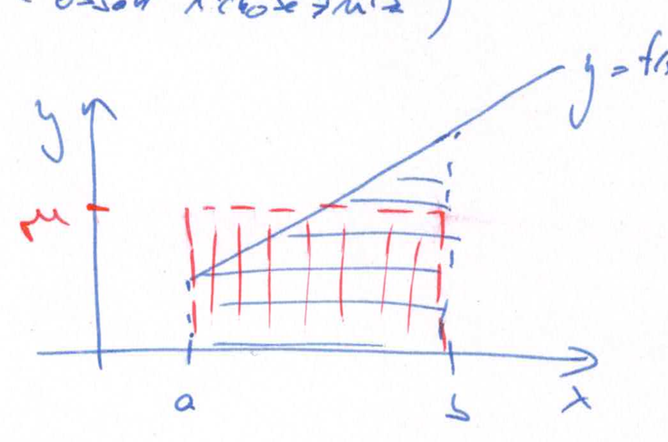
$$S_1 = S_2$$



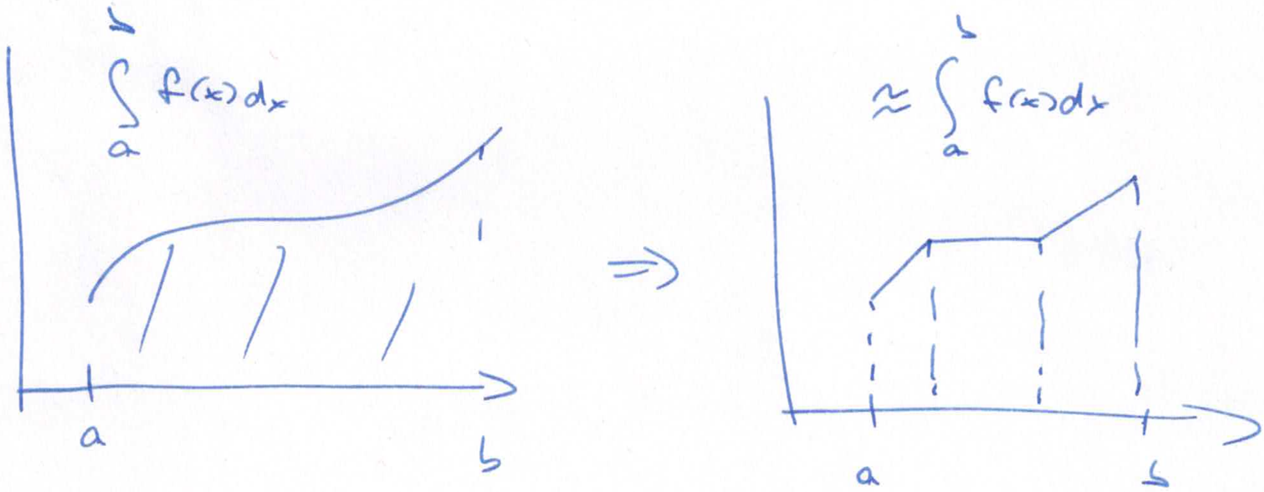
b) Pro lineární funkci:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \frac{f(b) + f(a)}{2} (b-a) \quad \text{(obsah lichoběžníka)}$$

Střední hodnota je pro lineární funkci průměrem počáteční a koncové funkční hodnoty



NUMERICKÁ APROXIMACE



Spočívá v nahrazení funkce f jednodušší funkcí

- po částech lineární funkce
  - nerovnoměrné dělení ⇒ intuitivně pomocí geometrické představy
  - rovnoměrné dělení ⇒ lichoběžníkové pravidlo
- něco lepšího (např. Simpsonovo pravidlo)

INTEGRACE METODOU PER PARTES

Metoda odvozená z derivace součinu. Nechť u, v jsou funkce.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$uv' = (uv)' - u'v$$

$$\int uv'\,dx = u\cdot v - \int u'v\,dx$$

$$\int_a^b uv'\,dx = \left[u\cdot v\right]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$$

Použití metody má smysl, pokud je integrál $\int uv'\,dx$ pohodlnější pro integraci než $\int u'v\,dx$.

Typické situace pro integrování P.P.:

a) $\int x\sin x\,dx$, $\int x\cdot\cos x\,dx$, $\int x\cdot e^x\,dx$

b) $\int P(x)\sin x\,dx$, $\int P(x)\cos x\,dx$, $\int P(x)\,e^x\,dx$ ...
je-li $P(x)$ polynom, použijeme metodu opakovaně

c) $\int x^k\cdot\ln x\,dx$

Př 1: $\int xe^x\,dx$ $\boxed{\begin{array}{ll} u=x & u'=1 \\ v'=e^x & v=e^x \end{array}}$ $= xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx = \underline{xe^x - e^x + C}$

Př 2: $\int x\cdot\ln x\,dx = \int 1\cdot\ln x\,dx$ $\boxed{\begin{array}{ll} u=\ln x & u'=\frac{1}{x} \\ v'=1 & v=x \end{array}}$ $= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= x\cdot\ln x - \int 1\,dx = \underline{x\cdot\ln x - x + C}$

INTEGRACE SUBSTITUČNÍ METODOU

Metoda odvozená z derivace složené funkce

$$[u(v(x))]' = u'(v(x))\, v'(x)$$

$$u(v(x)) = \int u'(v(x))\, v'(x)\, dx \qquad (*)$$

Označme $u'(x) = f(x)$, tj. $u(x) = \int f(x)\, dx$.

Je-li $v(x) = t$, je $u(v(x)) = u(t) = \int f(t)\, dt$.

Přeznačme $v(x)$ na $\varphi(x)$. Potom $(*)$ má tvar

$$\int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt \qquad (**)$$

kde napravo položme $t = \varphi(x)$.

Př 1: $\int x e^{x^2} dx \quad \boxed{\begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \frac{1}{2} dt \end{array}} = \frac{1}{2}\int e^t\, dt = \frac{1}{2} e^t = \underline{\frac{1}{2} e^{x^2} + C}$

Př 2: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \boxed{\begin{array}{c} f(x) = t \\ f'(x)\,dx = dt \end{array}} = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| = \underline{\ln|f(x)| + C}$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

- Vzorec $(**)$ se používá zleva doprava i zprava doleva.
- Formálně při substituci $\varphi(x) = t$ platí $\varphi'(x)\, dx = dt$.
- Varianta pro určitý integrál je

$$\int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = \boxed{\begin{array}{l} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\,dx = dt \\ x = a \Rightarrow t = \varphi(a) \\ x = b \Rightarrow t = \varphi(b) \end{array}} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt,$$

tj. transformuji x i meze.

INTEGRÁL JAKO FUNKCE HORNÍ MEZE

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad (*)$$

Funkce $F(x)$ má tyto vlastnosti:

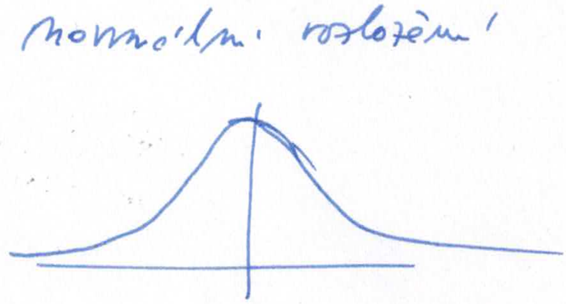
1) je definována tam, kde existuje $\int_a^x f(t)\,dt$
2) je-li f spojitá, má F derivaci a platí

$$F'(x) = f(x)$$

Věta: Je-li f spojitá na intervalu I obsahujícím bod a, je vztahem $(*)$ definovaná funkce, která má vlastnost $F'(x) = f(x)$, tj. je primitivní funkcí k funkci $f(x)$.

Důsledek: Každá spojitá funkce má primitivní funkci. Každá spojitá funkce má neurčitý integrál.

Poznámka: Funkce $y = e^{-x^2}$ popisuje normální rozložení pravděpodobnosti. Primitivní funkce je například



$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

(častěji se používá $\int_{-\infty}^x e^{-t^2}\,dt$, ale s tím neumíme pracovat a liší se jen aditivní konstantou.)