NEURČITÝ INTEGRÁL

Motivace: a) Známe směr křivky (tečny). Jaká je křivka?

b) Známe rychlost s jakou se mění veličina f. Jaká je f?

Definice: Řekneme, že F je primitivní k funkci f na intervalu I, pokud platí $F' = f$ na I. Množina všech primitivních funkcí k f se nazývá neurčitý integrál a značí $\int f(x)\,dx$

Věta: Primitivní funkce je daná (až na aditivní konstantu) jednoznačně.

Příklad: • Funkce x^2 má primitivní funkce např. $\frac{1}{3}x^3$ a $\frac{1}{3}x^3 + \pi$

• $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}$

Vzorce: Viz vzorce pro derivace.

Věta (linearita)

$$\int f + g\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$$

$$\int c\cdot f\,dx = c\cdot\int f\,dx \qquad c \in \mathbb{R}, \quad f,g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

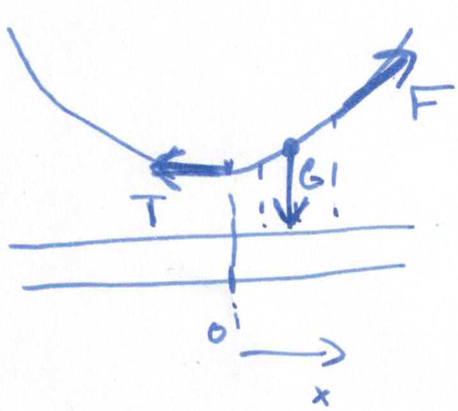
Příklad 1: Teplota klesá rychlostí $\frac{dT}{dt} = -0{,}1\,e^{-t}$ °C/hod.

Teplota jako funkce času je daná integrálem

$$T = \int -0{,}1\,e^{-t}\,dt = +0{,}1\,e^{-t} + C.$$

Hodnota C souvisí s počáteční teplotou.

Příklad 2: Zavěšený most (suspension bridge)



$G = mg = T\cdot x\cdot g$

$$y' = \frac{G}{T} = \frac{T\cdot g}{T}\,x$$

$$y = \frac{1}{2}x^2\,\frac{T\cdot g}{T} + C$$

… lano má tvar paraboly

Určitý integrál (NEWTON)

- Modifikace neurčitého integrálu. Rychlost změny nepoužijeme k hledání funkce která změnu způsobila, ale k nalezení pouze změny na určitém intervalu.

- Definice: $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$ kde $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$.

- Příklad 3: Teplota klesá rychlostí $\frac{dT}{dt} = -0{,}1\, e^{-t}$ °C/hod.

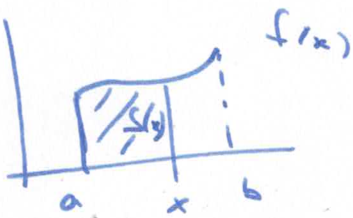
  O kolik klesne za průměrný den?

$$\Delta T = \int_0^{24} -0{,}1\, e^{-t}\, dt = \left[0{,}1\, e^{-t}\right]_0^{24} = 0{,}1\, e^{-24} - 0{,}1 \cdot e^{0}$$

- Vlast.: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

$$\int_a^b f+g\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g\,dx, \quad \int_a^b c\,f\,dx = c\int_a^b f\,dx$$

- Příklad 4:



$$\frac{dS}{dx} = f(x)$$

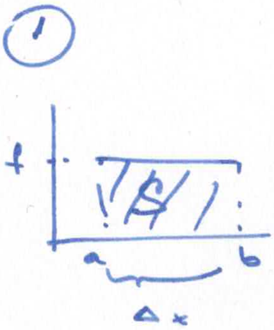
$$S = \int_a^b f\,dx$$

.. obsah obrazce $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$

(křivočarý lichoběžník)

Určitý integrál (RIEMANN)

1

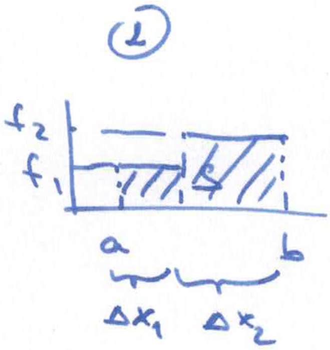


$S = f \cdot \Delta x$

$\Uparrow$

Násobení, je-li f konstanta

2

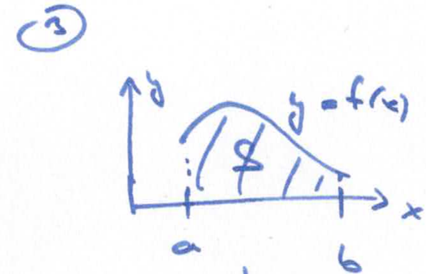


$S = f_1 \Delta x_1 + f_2 \Delta x_2$

$\Uparrow$

Součet příspěvků, je-li f po částech konst.

3



$S = \int_a^b f(x)\,dx$

$\Uparrow$

Integrál v obecném případě

Naznačeným postupem je možné definovat určitý integrál i pro velmi obecné funkce a výsledkem je Riemannův integrál. Má-li f funkce primitivní na intervalu I obsahujícím [a,b] ve svém vnitřku, platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a),$$

tj. Riemannův integrál se počítá stejně jako Newtonův.

Pozor: Souvislost mezi integrálem a obsahem je pouze u nezáporných funkcí.