LINEÁRNÍ APROXIMACE FCE (v 1D)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ $\qquad$ $f(x) \approx f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x-x_0)$

platí v okolí bodu x_0, $\quad \approx$ ... přibližně rovno

„Rozšifrování" vzorce: $f(x)$ .. funkční hodnota v x
$f(x_0)$ .. funkční — " — x_0
$f'(x_0)(x-x_0)$ ... přírůstek funkce f způsobený přírůstkem $x-x_0 = \Delta x$ (malého přírůstku)

Příklad: Strom měl v roce 2019 výšku 3 metry a rostl rychlostí 0,5 m za rok. V roce x je jeho výška dána vzorcem

$$h(x) = 3 + 0{,}5 \cdot (x-2019)$$

Příklad: Ve cvičení odvodíme, že pro malá x platí

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 \qquad (1+x)^n \approx 1+nx$$

Pozn.: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ je geometricky tečna ke grafu funkce.

Příklad: Gravitační potenciál ve vzdálenosti r od středu koule o hmotnosti M, je dán vztahem $V(r) = -G\frac{M}{r} = -GMr^{-1}$

Najdeme lineární aproximaci v bodě R.

G... gravitační konstanta

$$V(R) = -G\frac{M}{R} = -GMR^{-1}$$

$$\frac{dV}{dr} = GMr^{-2} \qquad \frac{dV(R)}{dr} = GMR^{-2}$$

$$V(r) \approx -GMR^{-1} + GMR^{-2}(r-R)$$

Pro Zemi jako kouli o poloměru R a hmotnosti M je $r-R$ výška nad zemí a platí

$$V(r) \approx V_0 + g\,h$$

kde $V_0 = -GMR^{-1}$ souvisí s nulovou hladinou energie a je nepodstatná

$g = GMR^{-2}$ je tíhové zrychlení

$g \cdot h$ je potenciál v tíhovém poli Země

(mgh je potenciální energie)

TAYLORŮV POLYNOM (POLYNOMIÁLNÍ APROXIMACE) V 1D

Druhá derivace : $f''(x) := \left(f'(x)\right)'$ resp. $\frac{d^2f}{dx^2} := \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$

$\vdots$

k-tá derivace : $f^{(k)}(x) := \left(f^{(k-1)}(x)\right)'$ resp. $\frac{d^kf}{dx^k} := \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right)$

Definice: Taylorův polynom stupně n pro funkci f v bodě x_0 je

$$T(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

tj.

$$T(x) := f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x-x_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\frac{d^nf(x_0)}{dx^n}(x-x_0)^n$$

Věta (Taylorova)

$$f(x) - T(x) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}f(\xi_0)}{dx^{n+1}}(x-x_0)^{n+1}$$

kde $\xi_0 \in (x, x_0)$. Tedy pro velká n a pro $x-x_0$ blízké nule je $f(x) \approx T(x)$.

Příklad: $\ln\frac{1+x}{1-x} \approx 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + \frac{2}{9}x^9$

$\ln 2 = \ln\frac{1+1/3}{1-1/3} \approx 0{,}69314604$ .. prvních 5 cifer je správně!

Příklad: $V(r) = \frac{1}{r^{12}} - \frac{2}{r^6} = r^{-12} - 2r^{-6}$ ... Lennard-Jonesův potenciál pro interakci mezi atomy nebo molekulami:

$r_0 = 1,\quad n=2$

$V(1) = 1^{-12} - 2\,1^{-6} = 1-2 = -1$

$\frac{dV}{dr} = -12\,r^{-13} - 2\cdot(-6)\,r^{-7} = -12\,r^{-13} + 12\,r^{-7}\Big|_{r=1} = -12+12 = 0$

$\frac{d^2V}{dr^2} = 12\cdot 13\,r^{-14} - 12\cdot 7\,r^{-8}\Big|_{r=1} = 12\cdot 13 - 12\cdot 7 = 12\cdot 6 = 72$

$$V(r) \approx \underbrace{-1}_{\text{souvisí s nulovou hladinou (nepodstatná hodnota)}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 72\,(r-1)^2}$$

Analogie s potenciální energií pružiny $u = \frac{1}{2}kx^2$

$k = 72$ ... „tuhost pružiny“

$x = r-1$ ... výchylka z rovnovážného stavu

Pro hmotnost m odvozuje fyzika frekvenci oscilací na pružině ve tvaru $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Tento vztah platí i pro náš potenciál

LOKÁLNÍ EXTRÉMY (SPOJITÝCH FUNKCÍ)

Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

V bodě x_0 je lokální maximum, pokud $f(x) \le f(x_0)$ v okolí bodu x_0. } Lok. EXTRÉM
— " — minimum, — " — $f(x) \ge f(x_0)$ — " — .

- Rostoucí an. klesající funkce nemají lokální extrém (přímo z definice)

Věta (Fermat). Má-li $f(x)$ lokální extrém v bodě x_0, potom buď $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Příklad z kulatiny o ~~poloměru~~ průměru d vyřízněte co nejtužší nosník obdélníkového průřezu. Tj. $b \cdot h^3 \to MAX$.

Bez újmy na obecnosti: $D = 1$ .. trik 1

$$b \cdot h^3 = \sqrt{1-h^2} \cdot h^3 \to MAX$$

$$\Updownarrow$$

$$(1-h^2) \cdot h^6 \to MAX \quad \text{.. trik 2}$$

$$f(h) = (1-h^2)h^6 = h^6 - h^8$$

$$\frac{df}{dh} = 6h^5 - 8h^7 \Rightarrow \frac{df}{dh} = 0 \text{ pro } h^2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ tj. } h = \frac{\sqrt{3}}{2}, \; b = \frac{1}{2}$$

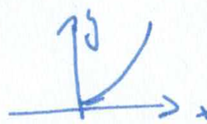
Nejtužší nosník má poměr stran $\sqrt{3} : 1$.

ad trik 2: je-li g rostoucí, pak z definice rostoucí funkce plyne

$$f(x) \le f(x_0) \iff g(f(x)) \le g(f(x_0))$$
$$f(x) \ge f(x_0) \iff g(f(x)) \ge g(f(x_0))$$

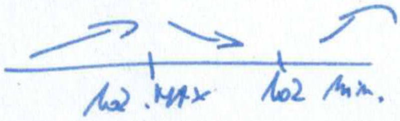
tj. $f(x)$ a $g(f(x))$ mají stejné lokální extrémy.

Použili jsme funkci x^2, ale pro nezáporný argument, tam je funkce x^2 rostoucí:



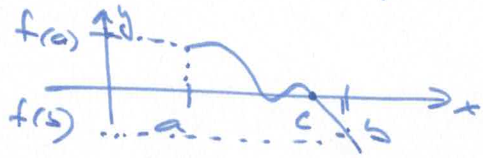
$y = x^2$ pro $x \ge 0$

Věta: Je-li f rostoucí a mění se v bodě x_0 z rostoucí na klesající, má v bodě x_0 lokální maximum. Analogicky lokální minimum je pro fci která se mění z klesající na rostoucí



BOLZANOVA VĚTA

Je-li f spojitá na $[a,b]$ a $f(a)\cdot f(b) < 0$, potom existuje $c \in [a,b]$ taková, že $f(c) = 0$.



Důsledek
- Na intervalu, kde je funkce spojitá a různá od nuly se zachovává znaménko funkce.
- Na intervalu, kde má funkce spojitou derivaci různou od nuly se zachovává monotonie funkce (růst nebo klesání).

Příklad: $y = \dfrac{x}{x^2+1}$, $\quad y' = \dfrac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$

$y' = 0$ pro $x = -1$ a $x = 1$, y' nemá body nespojitosti.
Na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a $(1, \infty)$ se zachovává monotonie.

y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
y'	$-$	-1	$+$	1	$-$

lok. maximum v bodě $x = 1$
lok. minimum v bodě $x = -1$

Příklad: $y = \dfrac{x^3}{x+2}$, $\quad y' = \dfrac{2(x+3)x^2}{(x+2)^2} = (x+3)\dfrac{2x^2}{(x+2)^2}$

$y' = 0$ pro $x = -3$, $x = 0$, $\quad y'$ má bod nespojitosti $x = -2$

Monotonie se zachovává na intervalech $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, 0)$ a $(0, \infty)$

y	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$
y'	$-$	-3	$+$	-2	$+$	0	$+$

lok. minimum v bodě $x = -3$.

Pozn: Lokální extrém je tam, kde se mění monotonie a ~~zachovává~~ funkce je spojitá.

Popis deformace v rovině

(např. při studiu mechanického namáhání)

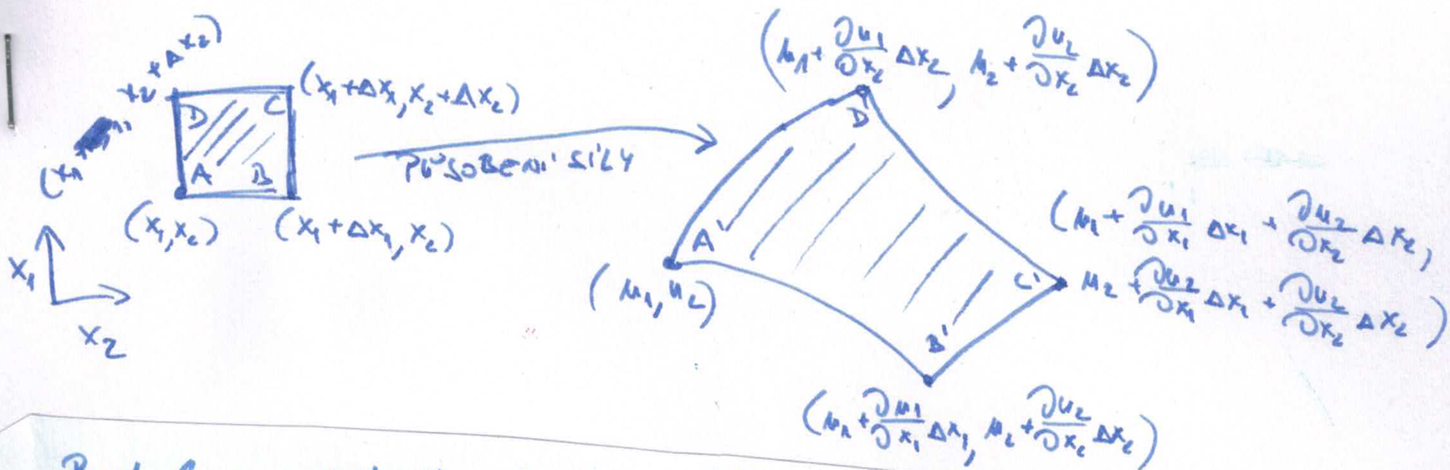
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ resp. $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$,

zkráceně $f(x+\Delta x)\approx f+f'\Delta x$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x_1+\Delta x_1, x_2)\approx f+\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1$, $f(x_1, x_2+\Delta x_2)\approx f+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2$

Deformace při mechanickém namáhání

- (x_1,x_2) se transformuje na $(u_1(x_1,x_2), u_2(x_1,x_2))$
- argumenty budeme vynechávat, tj. budeme psát (u_1,u_2)
- ~~čtverec~~ obdélník ABCD o stranách Δx_1 a Δx_2 ~~se~~ se zobrazí na polygon A'B'C'D'.



Bod C je od bodu A před deformací vzdálen o Δx_1 doprava a o Δx_2 nahoru, po deformaci se tato vzdálenost mění na $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Delta x_2$ vodorovně a $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Delta x_2$ svisle.

Ve 3D situace podobná, ale zápis se jeví více komplikovaný přítomností další dimenze.

Řešení problému s komplikovaným zápisem uvidíme, až se seznámíme s maticemi a maticovým násobením.