LIMITA, SPOJITOST

$y=f(x)$ tj. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (fce jedné proměnné)

Def: Okolím bodu $x_0\in\mathbb{R}$ rozumíme libovolný otevřený interval obsahující bod x_0.

Def: Řekneme, že fce f má v bodě x_0 limitu rovnu L právě tehdy když pro každou předem zadanou přesnost existuje okolí bodu x_0 takové, že funkční hodnoty všech bodů z tohoto okolí se v rámci dané přesnosti rovnají L.

Pozn: Většina funkcí má limitu rovnu funkční hodnotě. Přesněji, platí následující:

Def: Řekneme, že fce f je spojitá v bodě x_0 jestliže $f(x_0)$ existuje a platí $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

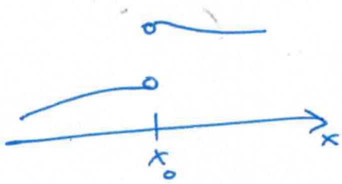
Def: Základní elementární funkce jsou polynomy, lomené fce goniometrické, cyklometrické, logaritmické, exponenciální.

Def: Elementární funkce jsou fce, které můžeme zapsat pomocí konečného počtu základních elementárních funkcí a operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání funkcí.

Věta: Elementární funkce jsou spojité na svém definičním oboru.

Pozn: základní nespojitosti ohraničených funkcí jsou

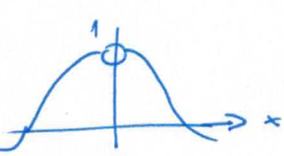
a) skok



... odhalíme, pokud volíme přesnost dostatečnou na odhalení skoku

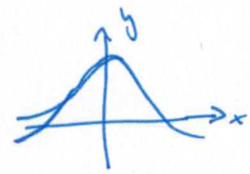
b) odstranitelná nespojitost (to není zajímavá nespojitost)

$y=\frac{\sin x}{x}$



nespojitá fce

ALE: $y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$



spojitá fce

DERIVACE

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fce $y = f(x)$ I .. otevřený interval

<u>Def.</u> $$\frac{df}{dx} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ ... derivace funkce f podle x

- Označení: $\frac{df}{dx}$ nebo $f'(x)$

- Význam: $f(x+h) - f(x)$ ... změna veličiny f na intervalu $[x, x+h]$

  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ .. změna přepočtená na jednotku

  $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ... změna přepočtená na jednotku za „nekonečně krátký" interval

- Jednotka: dáno v podílu $\frac{f(x)}{x}$

- Interpretace: Derivace udává, jak rychle se mění $f(x)$ v závislosti na x. Okamžitá rychlost změny fce $f(x)$.

<u>Věta</u>: Má-li $f(x)$ derivaci na I, je spojitá na I.

<u>Věta</u>: Má-li $f(x)$ kladnou derivaci na I, je $f(x)$ rostoucí na I.
—"— zápornou —"— —"— klesající —"—

<u>Příklad</u>: Těleso o teplotě T je v místnosti o teplotě $T_0 > T$. Rychlost, s jakou roste teplota tělesa je úměrná tepelnému rozdílu $T_0 - T$.

T ve °C ... teplota tělesa t v hod .. čas

$\frac{dT}{dt}$ ve °C/hod .. rychlost, s jakou roste teplota

Model $$\frac{dT}{dt} = k(T_0 - T)$$ ... naučíme se řešit později

konstanta úměrnosti

VÝPOČET DERIVACE

$c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$(c)' = 0$ $\qquad (e^x)' = e^x \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(x^n)' = n x^{n-1} \qquad (\sin x)' = \cos x \qquad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\cos x)' = -\sin x$

(další vzorce ve cvičení)

$u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$ $\qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(c \cdot u)' = c \cdot u'$

$(u \cdot v)' = u'v + uv'$ $\qquad (u(v(x)))' = u'(v(x))\, v'(x)$

$= \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$

Příklad

$$y = 5x^2 + \sqrt{x}$$

$$y' = (5x^2 + \sqrt{x})' = (5x^2)' + (x^{\frac{1}{2}})' = 5 \cdot (x^2)' + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 10x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Příklad

$$y = \sin(x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2) \cdot 2x$$

Příklad

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2$$

Příklad $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad r = r(t)$ .. poloměr se mění s časem

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

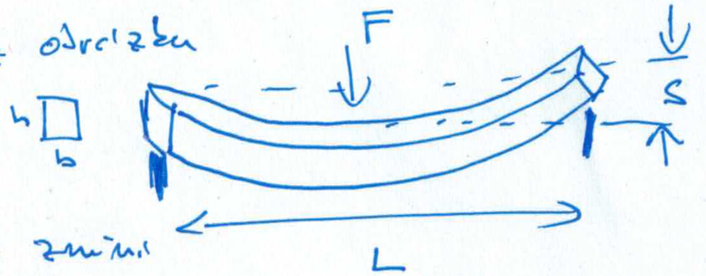
APLIKACE DERIVACÍ (PŘIBLIŽNÁ ZMĚNA)

Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že $f'(x_0)$ existuje

Platí: Pokud se x změní z hodnoty x_0 o hodnotu Δx (tj. nová hodnota je $x_0 + \Delta x$), potom se f změní přibližně o $f'(x_0)\Delta x$.

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta f &\approx f'(x_0)\Delta x \\ \Delta f &\approx \frac{df(x_0)}{dx}\Delta x \end{aligned}}$$

Příklad: Nosník obdélníkového průřezu má uprostřed průhyb daný vzorcem $s = \dfrac{F \cdot L^3}{4 E b h^3}$ kde E je mat. konstanta a další veličiny jsou zřejmé z obrázku



Pro $h = 20$ cm je $s = 10$ cm.

Jak se změní průhyb, pokud se h změní na 18 cm?

Řešení: $s = \dfrac{k}{h^3} \Rightarrow k = s \cdot h^{+3} = 10 \cdot 20^3 = 80\,000$

$$s = \frac{80\,000}{h^3} = 80\,000 \cdot h^{-3}$$

$$\frac{ds}{dh} = 80\,000 \cdot (-3)\, h^{-4} = -\frac{3 \cdot 80\,000}{h^4}$$

$$\Delta h = 18 - 20 = -2$$

$$\Delta s = -\frac{3 \cdot 80\,000}{20^4} \cdot (-2) = 3 \text{ cm}$$

Průhyb se zvětší o 3 cm.

Otázka: Proč nepočítáme přesně, tj. pro $s = \dfrac{k}{h^3}$ je

$$\Delta s = \frac{k}{(h+\Delta h)^3} - \frac{k}{h^3} \;?$$

Stačila by jenom selská logika.

Odpověď: Pomocí derivací máme $\Delta s \approx -\dfrac{3k}{h^4}\Delta h$ tj. mnohem jednodušší vztah! To že neplatí přesně pro větší Δh v aplikacích nevadí. Díky limitním přechodům používáme hlavně tam, kde se chyba nakonec „stáhne na nulu".

PARCIÁLNÍ DERIVACE

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tj. $f(x,y)$ .. funkce dvou proměnných

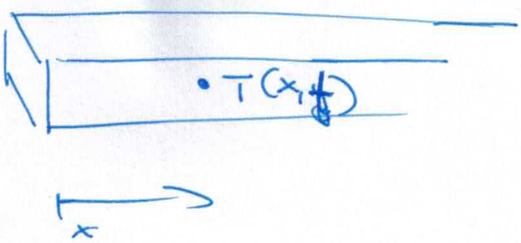
Def: $$\frac{\partial f}{\partial x} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$ .. parciální derivace f podle x

$$\frac{\partial f}{\partial y} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$ .. parciální derivace f podle y

Podobně pro funkce libovolného počtu proměnných

Sledujeme, jak fce f reaguje na změny pouze v jedné proměnné, druhá proměnná zůstává konstantní.

Příklad Vedení tepla ve dřevěné tyči (1 dimenze)



T .. teplota ve °C

x .. poloha v cm

t .. čas v hod

$\frac{\partial T}{\partial t}$ .. rychlost ve °C/hod udávající, jak rychle v daném bodě roste teplota s časem

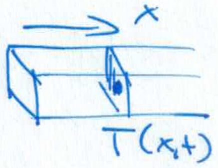
$\frac{\partial T}{\partial x}$ .. rychlost ve °C/cm udávající, jak moc se v daném místě mění prostorové rozložení teploty

Aplikace: Stěnu můžeme chápat jako tyč. Extrémně tenkou a širokou, ale stačí pracovat v 1D.

ROVNICE VEDENÍ TEPLA V 1D

- Rozdíl teplot způsobí pohyb tepla.
- Pokud se někde kumuluje teplo, roste tam teplota

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T \quad (\text{fyzika ZŠ})$$



$\frac{\partial T}{\partial x}$ ve °C/cm udává prostorovou změnu v rozložení teploty

$q = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot S$ ... tok tepla průřezem S v J/hod.

k.. konstanta úměrnosti, kalibrace jednotek

$-$ .. teplo směřuje do míst s nižší teplotou

$\frac{\partial q}{\partial x}$ .. rychlost s jakou roste tok v J/(hod. cm) v daném bodě

$-\frac{\partial q}{\partial x}$ .. rychlost s jakou klesá tok v daném bodě. V tomto bodě se tolik tepla spotřebovává na zvýšení teploty.

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T \quad (\text{fyzika ZŠ})$$

$$\frac{Q}{\Delta x \cdot \Delta t} = \frac{m}{\Delta x} \cdot c \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad (\text{přepočet na jednotku času a délky})$$

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \cancel{m}\, \rho \cdot S \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad („\text{nekonečně malá" změna})$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \cdot S\right) = \rho \cdot S \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad \Big| \cdot \frac{1}{S}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad .. \text{ rovnice vedení tepla}$$

Rovnice vedení tepla je tedy vlastně vyjádření zákona zachování. Je to popis bilance toku tepla spojená s mechanismem, který říká, co se děje se „ztraceným teplem". Rozdíl v bilanci toku tepla způsobí zvýšení teploty

Gradient (nástřel konceptu)

- Pro rovnice vedení tepla ve 2D nebo 3D nebo pro jiné modely potřebujeme vektor, který udává směr, kterým klesá nějaká skalární veličina.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tj. $f(x,y)$

<u>Def</u>: <u>Gradient</u> je vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Formální zápis:
a) $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f$
b) ∇f
c) $\operatorname{grad} f$

$-\nabla f$ je směr, kterým nejvíce klesají hodnoty veličiny f

<u>Příklad</u> E .. potenciální energie
$-\nabla E$ .. působící síla

<u>Příklad</u> p .. tlak vzduchu v atmosféře
$-\nabla p$ ... směr a síla větru