Matematika

Robert Mařík

31. ledna 2020

Obsah

Kapitola 1

Funkce

Funkce jedné proměnné

Příklad. Je dán vetknutý nosník na konci zatížený svislou silou F. Deformace nosníku δ na konci souvisí (skalární veličina) s velikostí zatěžující síly (skalární veličina). Pro studium problému je vhodné mít převodní pravidlo, které pro každé zatížení udává deformaci. Toto pravidlo bude z matematického úhlu pohledu funkce (funkce jedné proměnné). Může mít například formu

$$\delta = \frac{1}{k}F,$$

kde k je konstanta pro daný nosník (tuhost).

Definice (funkce jedné proměnné). Buďte A a B neprázdné podmnožiny množiny reálných čísel. Pravidlo f, které každému prvku množiny A přiřadí jediný prvek množiny B se nazývá *funkce* (přesněji: *reálná funkce jedné reálné proměnné*). Zapisujeme $f : A \to B$. Skutečnost, že prvku $a \in A$ je přiřazen prvek $b \in B$ zapisujeme $f(a) = b$. Přitom říkáme, že b je *obrazem prvku* a při zobrazení f, resp. že a je *vzorem prvku* b při zobrazení f.

Poznámka (terminologie). Množina A z definice funkce se nazývá *definiční obor funkce* f. Označujeme $\mathrm{D}(f)$ (resp. $\mathrm{Dom}(f)$). Je-li M podmnožina definičního oboru, definujeme množinu $f(M)$ jako množinu všech obrazů bodů množiny M. Množina $f(\mathrm{Dom}(f)) = b$ se nazývá *obor hodnot funkce* f. Označujeme $\mathrm{H}(f)$ (resp. $\mathrm{Im}(f)$).

Je-li $y = f(x)$ nazýváme proměnnou x též *nezávislou proměnnou* a proměnnou y *závislou proměnnou. Grafem* funkce rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ s vlastností $y = f(x)$.

Přímá a nepřímá úměrnost

Výsadní postavení při popisu dějů a jevů v přírodě mají přímá a nepřímá úměrnost, známé ze střední školy.

Definice (přímá a nepřímá úměrnost). Veličina y je *přímo úměrná* veličině x jestliže existuje konstanta k taková, že platí

$$y = kx.$$

Veličina y je *nepřímo úměrná* veličině x jestliže existuje konstanta k taková, že platí

$$y = \frac{k}{x}.$$

Poznámka. Je-li veličina y úměrná veličině x, píšeme

$$y \sim x \text{ nebo } y \propto x.$$

Je-li navíc konstanta úměrnosti blízká jedničce, tj. x a y jsou blízké, píšeme

$$y \approx x.$$

Pro nepřímou úměrnost píšeme podobně $y \sim \frac{1}{x}$, $y \propto \frac{1}{x}$ a $y \sim \frac{1}{x}$.

Příklad.

- Při pohybu konstantní rychlostí je dráha s úměrná času t. Příslušnou konstantou úměrnosti je rychlost v, tj. $s = vt$.
- Při pohybu po předem stanovené dráze s je čas nepřímo úměrný rychlosti v. Platí $t = \frac{s}{v}$.
- Při periodickém pohybu je frekvence f nepřímo úměrná periodě T. Příslušnou konstantou úměrnosti je jednička, tj. $f = \frac{1}{T}$.
- Objem V koule o poloměru r je přímo úměrný třetí mocnině poloměru. Příslušnou konstantou úměrnosti je objem koule o poloměru 1. Platí tedy $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Monotonie funkce

V následující definici jsou nejdůležitější pojmy rostoucí a klesající funkce. Názorně řečeno, jsou to funkce které zachovávají (rostoucí) nebo obracejí (klesající) směr nerovnosti při aplikaci funkce na obě strany nerovnice.

Definice (monotonie funkce). Nechť f je funkce a $M \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f.

- Řekneme, že funkce f je na množině M *rostoucí* jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ s vlastností $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- Řekneme, že funkce f je na množině M *klesající* jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ s vlastností $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.
- Řekneme, že funkce f je na množině M *(ryze) monotonní* je-li buď rostoucí, nebo klesající na M.

Nespecifikujeme-li množinu M, máme na mysli, že uvedená vlastnost platí na celém definičním oboru funkce f.

Poznámka (monotonie z hlediska řešitelnosti nerovnic). Je-li funkce f rostoucí nebo klesající, je i prostá a nerovnice uvedené v předchozí definici jsou dokonce ekvivalentní. Můžeme tedy na obě strany nerovnice aplikovat tutéž rostoucí funkci, nebo rostoucí funkci z obou stran nerovnice vynechat.

- Je-li f rostoucí, platí
$$x_1 \leq x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2).$$
- Je-li f klesající, platí
$$x_1 \leq x_2 \iff f(x_1) \geq f(x_2).$$
- Stejné vztahy platí i pro ostré nerovnosti.

Tyto poučky použijeme vždy, když rozvažujeme, zda můžeme k oběma stranám nerovnice přičíst stejné číslo (můžeme), zda můžeme obě strany nerovnice vynásobit stejným nenulovým číslem (můžeme, ale pokud násobíme záporným číslem, obrací se směr nerovnosti), zda můžeme obě strany nerovnice logaritmovat logaritmem o stejném základě (můžeme, ale v případě logaritmu a základě menším než 1 se obrací směr nerovnosti), umocnit (nemůžeme, leda bychom měli dodatečnou informaci například o tom, že obě strany nerovnice jsou kladné nebo obě strany nerovnice jsou záporné) apod. Takových situací je mnoho a protože není v lidských silách si všechny pamatovat, stačí je míst spojeny s definicí rostoucí a klesající funkce.

Příklad. Funkce $\ln x$ a $\sqrt{x}$ jsou rostoucí a proto z nerovnic
$$\ln x > \ln 6$$
a
$$\sqrt{x} > \sqrt{6}$$
plyne
$$x > 6.$$

Zejména v druhém případě je nutné si uvědomit, že používáme definici rostoucí funkce a poznámku připojenou za tuto definici. Nestačí říct, že umocňujeme obě strany nerovnice, jak by někdo mohl tento krok dezinterpretovat. Umocněním obou stran nerovnice se obecně může změnit obor pravdivosti, proto tato operace u nerovnic není povolena. My máme speciální případ nerovnice s nezápornými stranami.

Příklad. Funkce $\dfrac{1}{x}$ a $y = x^2$ nejsou ani rostoucí ani klesající a proto z žádné z nerovností
$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$$
a
$$x^2 \leq 5^2$$
neplyne ani $x \leq 5$ ani $x \geq 5$.

Příklad. Funkce $\sqrt{x}$ nabývá nezáporných hodnot a funkce $\dfrac{1}{x}$ je klesající na $(0, \infty)$. Proto z nerovnosti
$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{5}$$
plyne
$$\sqrt{x} \geq 5 = \sqrt{25}.$$
Druhá mocnina je na intervalu $(5, \infty)$ rostoucí a proto odsud plyne dále
$$x \geq 25.$$

Limita

Buď $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce jedné proměnné

Definice (okolí). *Okolím* bodu x_0 rozumíme libovolný otevřený interval obsahující bod x_0.

Definice (limita). Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *limitu* rovnu číslu L právě tehdy, když pro libovolnou předem zadanou toleranci (i extrémně malou) existuje okolí bodu x_0 takové, že všechny body z okolí bodu x_0 různé od x_0 mají funkční hodnotu v rámci uvažované tolerance stejnou jako L.

Pozorování. Většina funkcí má v bodech, kde jsou definované, limitu rovnu funkční hodnotě. Přesněji tuto myšlenku vystihuje koncept spojitosti.

Spojitost

Definice (spojitost). Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* x_0 jestliže je v tomto bodě definovaná a má limitu rovnu funkční hodnotě. Řekneme, že funkce f je *spojitá* na otevřeném intervalu, je-li spojitá v každém jeho bodě.

Definice (elementární funkce). Všechny mnohočleny, goniometrické, cyklometrické, exponenciální a logaritmické funkce a obecná mocnina se nazývají *základní elementární funkce* Všechny funkce, které ze základních elementárních funkcí získáme konečným počtem operací sčítání, odečítání, násobení, dělení a skládání těchto funkcí navzájem se nazývají *elementární funkce*.

Věta (spojitost elementárních funkcí). *Všechny elementární funkce jsou spojité v každém vnitřním bodě svého definičního oboru.*

Podobně jako spojitost funkce jedné proměnné je definována spojitost funkcí více proměnných. Zůstane dokonce v platnosti předchozí věta. V naprosté většině základních praktických aplikací vystačíme s popisem pomocí elementárních funkcí a proto jsou funkce, se kterými pracujeme, zpravidla automaticky spojité. Opatrnost je nutné pouze tam, kde se od elementárních funkcí odchýlíme, například při použití nekonečných řad.

Poznámka. Body, v jejichž okolí je funkce ohraničená, ale je zde porušena spojitost, jsou například následující.

skok Na jeho odhalení stačí zvolit toleranci v definici limity menší, než je výška skoku. Například $f(x) = \frac{|x|+x}{2x}$ je jednotkový skok v nule.

odstranitelná nespojitost Tato nespojitost nás zajímá nejvíce. Je to nespojitost, která zmizí pokud vhodně dodefinujeme funkční hodnotu v bodě nespojitosti. Například funkce

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

je spojitá funkce. Vznikla doplněním jedné funkční hodnoty do definice funkce $\frac{\sin x}{x}$, která má odstranitelnou nespojitost v bodě $x = 0$.

Grafy.

Derivace

Teď jsme připraveni (alespoň teoreticky) počítat průměrnou rychlost na intervalu, jehož délka je nerozlišitelná od nuly.

Buď $y = f(x)$ funkce definovaná na nějakém otevřeném intervalu.

Definice (derivace). *Derivací* funkce f v bodě x rozumíme limitu

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

pokud tato limita existuje a je konečná.

Derivaci funkce f v bodě x_0 označujeme $f'(x_0)$ nebo $\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$. Derivaci v libovolném bodě potom f', $f'(x)$ nebo $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Zápis $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ je Leibnizova notace, zápis f' je Lagrangeova notace.

Poznámka (slovní interpretace definice derivace).

- Výraz z čitatele, tj. $f(x+h) - f(x)$, je změna veličiny f na intervalu $[x, x+h]$. Často označujeme též Δf.
- Podíl, tj. $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ je změna veličiny f na intervalu $[x, x+h]$ přepočítaná na jednotku veličiny x, tj. v jistém smyslu průměrná rychlost na tomto intervalu. Často označujeme též $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.
- Limita v definici derivace stahuje délku intervalu, na kterém počítáme průměrnou rychlost, k nule. Tím se z průměrné rychlosti stane okamžitá rychlost.

Jednotka derivace je stejná, jako jednotka podílu $\frac{f(x)}{x}$.

Derivace $f'(x)$ udává, jak se mění veličina f při změnách veličiny x. Interpretace derivace v nematematických disciplínách je okamžitá rychlost s jakou veličina f reaguje na změny veličiny x.

Věta (existence derivace implikuje spojitost). *Má-li funkce f derivaci na intervalu I, je na tomto intervalu spojitá.*

Věta (znaménko derivace implikuje monotonii).

- *Má-li funkce f kladnou derivaci na intervalu I, je na tomto intervalu rostoucí.*
- *Má-li funkce f zápornou derivaci na intervalu I, je na tomto intervalu klesající.*

Aplikace derivací 1: Jak rychle? (změna v čase)

Derivace v bodě, pokud ji nahlížíme z hlediska časové změny veličiny, která nás zajímá, je okamžitá rychlost s jakou se mění tato veličina.

Zákon ochlazování

Horké těleso o teplotě T je v chladnější místnosti o teplotě T_0. Z fyziky je známo (Newtonův zákon tepelné výměny), že rychlost s jakou klesá teplota tělesa je úměrná teplotnímu rozdílu. Tento rozdíl je $T - T_0$ (od většího odečítáme menší).

- Veličina T je teplota tělesa měřená například ve stupních Celsia.
- Veličina t je čas měřený například v hodinách.
- Derivace $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ ve stupních Celsia za hodinu je rychlost, s jakou roste teplota tělesa.
- Matematickým vyjádřením toho, že rychlost s jakou roste teplota a teplotní rozdíl $T - T_0$ jsou úměrné je rovnice

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_0),$$

  kde k je konstanta úměrnosti a záporné znaménko vyjadřuje, že teplota klesá. Neznámou v této rovnici je funkce a v rovnici figuruje derivace této funkce. Takové rovnice se naučíme řešit později.

Poznámka (smysl předchozího příkladu). Předchozí příklad je často v různých obměnách používán na modelování ochlazování kávy, což je proces, který většina lidí důvěrně zná. Nemáme pochopitelně ambice se domnívat, že bychom dokázali z této rovnice odvodit nějaké zásadní výsledky aplikovatelné při pití ranní kávy nebo při konzumaci horké polévky. Učíme se na malých věcech, abychom později mohli dělat věci velké. Na známých věcech se učíme aparát, který bude naším jediným nástrojem tam, kde intuice začne selhávat. Z tohoto příkladu je nutné si odnést, že derivace, jako rychlost změny, hraje roli při kvantitativním popisu dějů a při studia procesů, kdy se mění veličiny. Ať už doopravdy (studium pohybu nebo dějů, probíhajících v čase) nebo virtuálně (problémy spojené s mechanikou, včetně statiky, stability a deformací, často pracují s virtuálními změnami, tj. se změnami, které jsou sice z hlediska úlohy přípustné, ale příroda je z nějakého důvodu nerealizuje). Tedy naprostá většina dějů a jevů, které studujeme a chceme jim rozumět. Jakmile se v popisu fyzikálního zákona objeví slovo *rychlost*, někdy nahrazené souslovím *časová změna*, znamená to, že kvantitativní popis se děje pomocí derivací.

Uhlík 14C a datování organických nálezů

V roce 1940 byl objeven uhlík ^{14}C. Jedná se o radioaktivní prvek s mnoha skvělými vlastnostmi. Jednou z nich je vhodná rychlost rozpadu, která jej činí vhodným pro datování archeologických nálezů pozůstatků živých organismů

- Rychlost, s jakou se mění množství (a tedy i koncentrace y v daném vzorku) nerozpadnutého radioaktivního materiálu je úměrná jeho množství (a tedy i koncentraci). Tato skutečnost je přirozeným důsledkem toho, že pro daný nestabilní izotop mají všechny atomy stejnou pravděpodobnost, že u nich dojde k rozpadu a tato pravděpodobnost se s časem nemění. Kvantitativně je proces rozpadu popsán rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\lambda y,$$

  kde λ je konstanta úměrnosti.
- Uhlík je na datování vhodný, protože jej během života absorbují živé organismy a protože poločas rozpadu jej činí vhodným pro datování většiny archeologicky zajímavých nálezů. (Pro datování vzorků starších než 50 tisíc let je nutné použít jiný prvek, protože v tomto případě již uhlíku ^{14}C ve vzorku zůstane málo.)

Aplikace derivací 2: Jak strmě? (změna v prostoru)

Derivace v bodě, pokud ji nahlížíme z hlediska prostorové změny veličiny, která nás zajímá, je míra, jak nerovnoměrně je veličina rozložena v prostoru. Často se tato veličina nazývá gradient, zejména pokud nepracujeme v jednorozměrném případě, ale pokud popisujeme děj probíhající v rovině nebo v prostoru.

Vedení tepla (dřevařství, nábytek, dřevostavby)

Nerovnoměrnost rozložení teploty v tělese vede k vyrovnávání teplot přenosem tepla. Uvažujme teplotu T tyče jako funkci polohy x na tyči. Ke kvantitativnímu vyjádření vedení tepla je nutné vědět, jaký rozdíl teplot připadá na jednotku délky. V homogenním případě vydělíme teplotní rozdíl vzdáleností. V obecném případě rychlost s jakou se mění teplota podél tyče (gradient teploty) vyjadřujeme pomocí derivace

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}.$$

Využívá se v posuzování izolačních vlastností a při sušení dřeva.

Koryto řeky (krajinářství)

Uvažujme příčný řez korytem řeky, jak je na obrázku. Z tohoto obrázku je zřejmé, že při zvyšování obsahu průřezu roste hladina.

Pokud by stěny byly svislé (tj. B nezávislé na h), byla by změna průřezu ΔA (například v milimetrech čtverečních) vyvolaná změnou výšky Δh (například v milimetrech) rovna šířce řeky B v milimetrech, protože koryto by bylo obdélníkové a podíl obsahu obdélníka a jeho výšky je šířka. V případě nekonstantního B dostáváme místo podílu derivaci, tj.

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h} = B.$$

Derivace průřezu koryta podle výšky koryta hraje důležitou roli například při přechodu říčního proudění v bystřinné. Tato veličina vyjadřuje, jak rychle se mění obsah průřezu s rostoucí hladinou. V praxi je možné ji spočítat pro speciální tvary koryta, proto jsou vzorce pro vodní skok související s tímto přechodem k dispozici jenom ve speciálních případech, jako například koryto obdélníkového tvaru.

Výpočet derivace

- **Nikdy** (nebo alespoň skoro nikdy) nederivujeme pomocí definice, ale používáme vzorce pro derivace základních elementárních funkcí a pro derivace matematických operací s funkcemi.
- Viz cvičení v prvním týdnu.

Funkce více proměnných

Funkce má na vstupu více proměnných, na výstupu reálné číslo. Některé pojmy, jako například monotonie, ztrácejí ve světě funkcí více proměnných smysl, například monotonie nebo inverzní funkce. Proměnné značíme pomocí jejich fyzikálního označení. Bez fyzikálního kontextu zpravidla používáme funkce dvou, tří, nebo n proměnných v následujícím tvaru.

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y)$ Geometricky můžeme chápat jako výšku přiřazenou bodu v rovině a výsledkem je plocha ve 3D, nebo barvu přiřazenou bodu v rovině a výsledkem je obarvená rovina.
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z)$ Geometricky můžeme chápat jako barvu přiřazenou bodu v prostoru a výsledkem je obarvený prostor.
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Geometrická představa zde není možná, chápeme čistě abstraktně.

Parciální derivace

Definice (parciální derivace). Buď $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkce dvou proměnných, x a y, tj. $f(x, y)$. Výraz

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

se nazývá *parciální derivace funkce f podle x*. Podobně,

$$\frac{\partial f}{\partial y} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

je *parciální derivace funkce f podle y*.

Podobně můžeme definovat parciální derivaci pro funkce libovolného konečného počtu proměnných. V těchto parciálních derivacích vlastně sledujeme, jak reaguje veličina f na změny jenom v jedné proměnné. Proměnná, přes kterou se nederivuje, má vlastně roli parametru, nijak se nemění.

Rovnice vedení tepla v 1D

Studujme vedení tepla v jednorozměrné tyči. Teplota je funkcí dvou proměnných, polohy a času.

Poznámka. Potřebujeme fyzikální zákony řídící vedení tepla. Bez nich matematika model vedení tepla nemá jak naformulovat. Tyto zákony je potřeba matematice dodat “z venku”, z aplikované vědy. Tou je v tomto případě fyzika, jindy může být biologie nebo geologie. Jakmile jsou potřebné zákony a případně materiálové vztahy k dispozici, stavé se problém čistě matematickým a fyzika přijde ke slovu při závěrečné interpretaci. Použijeme následující fyzikální fakta.

- Rozdílem teplot vzniká tok tepla. Velikost toku tepla je úměrná teplotnímu rozdílu.
- Teplota se zvyšuje dodáním tepla. Pro zvýšení teploty tělesa o hmotnosti m o hodnotu ΔT je nutné dodat

$$Q = mc\Delta T, \tag{**}$$

  kde c je měrná tepelná kapacita.
- Budeme vztahy formulovat pro změny za časovou jednotku a pro jednotkový objem (tedy místo hmotnosti m, změny teploty ΔT a tepla Q máme hustotu ρ, rychlost změny teploty $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ a rychlost s jakou dodáváme teplo do daného místa vztažená na jednotkový objemu).

V dalším už nastupuje matematický popis a ve vhodných chvílích vždy použijeme výše uvedené fyzikální zákony. Mluvíme o teple, ale jako mechanický model si můžeme představit proudění tekutiny (pro jednoduchou představu) nebo proudění vlhkosti (pro odvození rovnice difuze namísto rovnice vedení tepla).

- *Potřebujeme vědět, jak moc se mění teplota podél tyče.* Změny v prostorovém rozložení teploty zachycuje derivace $\frac{\partial T}{\partial x}$ v jednotkách (například) stupeň Celsia na centimetr.
- *Potřebujeme změnu teploty podél tyče převést na veličinu popisující proudění tepla.* Tok tepla je úměrný veličině popisující změnu rozložení tepla v prostoru,

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial x}. \qquad (***)$$

  – Znaménko mínus vyjadřuje skutečnost, že teplo teče z míst s vyšší teplotou do míst s menší teplotou a že tok uvažujeme kladný, pokud teče ve směru osy x. Přesněji, pokud teplota roste směrem doprava, parciální derivace je kladná, ale teplo teče doleva, tedy tok musí být záporný.
  – Veličina k je konstanta úměrnosti umožňující překalibrování změny prostorového rozložení teploty na tok tepla jendotkovým průřezem (první odrážka).
- *Potřebujeme zjistit, kolik tepla za jednotku času přiteče do nějakého bodu a v tomto bodě "zůstane". Množství, které zůstane, je rozdílem mezi množstvím, které přiteče, a množstvím, které odteče.* Tedy potřebuji vědět, jak se mění tok tepla podél tyče. Rychlost s jakou roste rychlost toku podél tyče je $\frac{\partial q}{\partial x}$. My pro kladný ohřev potřebujeme pokles toku tepla, tedy násobíme záporným znaménkem a dostáváme $-\frac{\partial q}{\partial x}$.
- *Víme, kolik tepla se v daném místě spotřebuje na zvýšení teploty a tuto hodnotu musíme převést na změnu teploty (třetí odrážka). Opět se jedná o jakési překalibrování, které ještě souvisí s dalšími fyzikálními vlastnostmi jako je měrná tepelná kapacita a hmotnost jednotkového množství látky objemu v daném místě.* Teplo $-\frac{\partial q}{\partial x}$ je teplo, které každou časovou jednotku "zůstává" v bodě x. Toto teplo se "použije" na zvýšení teploty. Z rovnice (**) pro jednotku času a jednotku objemu

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}.$$

- Po dosazení za q dostáváme

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}.$$

- Derivace konstantního násobku je konstantní násobek derivace. Veličina k by konstantní být nemusela a proto ji z opatrnosti necháme na svém místě. Může v ní být nehomogenita nebo se může měnit s teplotou, tj. vztah (***) může být nelineární. Znaménko mínus reprezentuje násobení konstantou -1. Toto vede na finální tvar

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Shrnutí. V odvození vidíme, že rovnice vedení tepla je vlastně bilance toku tepla. Rozdíl o kolik se v daném místě snižuje tok tepla udává, kolik tepla se v daném místě spotřebovalo. Tato spotřeba tepla se projeví zvýšením teploty v daném bodě.

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Aplikované vědy (fyzika, biologie, nauka o materiálu, hydrologie) přirozeně formulují své zákony a poznatky mimo jiné i kvantitativně a pomocí pojmů vyjadřujících rychlosti změn. Doteď jsme aparátem střední školy uměli počítat jenom průměrně rychlosti za daný časový interval, s derivací dostáváme do ruky nástroj pro práci s okamžitými rychlostmi.
- Jakmile ve slovním popisu procesu slyšíme slovo rychlost, znamená to, že při matematickém modelování hraje pravděpodobně důležitou roli derivace. Okamžitá rychlost je derivace. Jenom v krásných případech probíhajících konstantní rychlostí můžeme tuto rychlost počítat pomocí podílu, jak to známe u rychlosti pohybu.
- Naučili jsme se nebo se naučíme pomocí vzorců derivovat běžné funkce.
- Derivace umožní předpovědět, co se stane s veličinou, která závisí na jiné veličině a tato jiná veličina se mění známou rychlostí. Ze vztahu, který dává do souvislosti hodnoty dvou veličin, můžeme určit pomocí derivací vztah, dávající do souvislosti rychlosti změn těchto veličin.
- V případě nutnosti umíme rozšířit derivace i do světa funkcí více proměnných. Děláme to tak, že sledujeme rychlost změny způsobenou vždy změnou jenom jedné veličiny. Proto příslušné derivace nazýváme parciální. (Parciální znamená v tomto smyslu částečný.)

Kapitola 2

Derivace & friends I

Limita

Buď $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce jedné proměnné

Definice (okolí). *Okolím* bodu x_0 rozumíme libovolný otevřený interval obsahující bod x_0.

Definice (limita). Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *limitu* rovnu číslu L právě tehdy, když pro libovolnou předem zadanou toleranci (i extrémně malou) existuje okolí bodu x_0 takové, že všechny body z okolí bodu x_0 různé od x_0 mají funkční hodnotu v rámci uvažované tolerance stejnou jako L.

Pozorování. Většina funkcí má v bodech, kde jsou definované, limitu rovnu funkční hodnotě. Přesněji tuto myšlenku vystihuje koncept spojitosti.

Spojitost

Definice (spojitost). Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* x_0 jestliže je v tomto bodě definovaná a má limitu rovnu funkční hodnotě. Řekneme, že funkce f je *spojitá* na otevřeném intervalu, je-li spojitá v každém jeho bodě.

Definice (elementární funkce). Všechny mnohočleny, goniometrické, cyklometrické, exponenciální a logaritmické funkce a obecná mocnina se nazývají *základní elementární funkce* Všechny funkce, které ze základních elementárních funkcí získáme konečným počtem operací sčítání, odečítání, násobení, dělení a skládání těchto funkcí navzájem se nazývají *elementární funkce*.

Věta (spojitost elementárních funkcí). *Všechny elementární funkce jsou spojité v každém vnitřním bodě svého definičního oboru.*

Podobně jako spojitost funkce jedné proměnné je definována spojitost funkcí více proměnných. Zůstane dokonce v platnosti předchozí věta. V naprosté většině základních praktických aplikací vystačíme s popisem pomocí elementárních funkcí a proto jsou funkce, se kterými pracujeme, zpravidla automaticky spojité. Opatrnost je nutné pouze tam, kde se od elementárních funkcí odchýlíme, například při použití nekonečných řad.

Poznámka. Body, v jejichž okolí je funkce ohraničená, ale je zde porušena spojitost, jsou například následující.

skok Na jeho odhalení stačí zvolit toleranci v definici limity menší, než je výška skoku. Například $f(x) = \frac{|x|+x}{2x}$ je jednotkový skok v nule.

odstranitelná nespojitost Tato nespojitost nás zajímá nejvíce. Je to nespojitost, která zmizí pokud vhodně dodefinujeme funkční hodnotu v bodě nespojitosti. Například funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

je spojitá funkce. Vznikla doplněním jedné funkční hodnoty do definice funkce $\frac{\sin x}{x}$, která má odstranitelnou nespojitost v bodě $x = 0$.

Grafy.

Derivace

Teď jsme připraveni (alespoň teoreticky) počítat průměrnou rychlost na intervalu, jehož délka je nerozlišitelná od nuly.

Buď $y = f(x)$ funkce definovaná na nějakém otevřeném intervalu.

Definice (derivace). *Derivací* funkce f v bodě x rozumíme limitu
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} := \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$
pokud tato limita existuje a je konečná.

Derivaci funkce f v bodě x_0 označujeme $f'(x_0)$ nebo $\dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$. Derivaci v libovolném bodě potom f', $f'(x)$ nebo $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Zápis $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ je Leibnizova notace, zápis f' je Lagrangeova notace.

Poznámka. Rozšifrování definice derivace:

- Výraz z čitatele, tj. $f(x+h)-f(x)$, je změna veličiny f na intervalu $[x, x+h]$. Často označujeme též Δf.
- Podíl, tj. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ je změna veličiny f na interval $[x, x+h]$ přepočítaná na jednotku veličiny x, tj. v jistém smyslu průměrná rychlost na tomto intervalu. Často označujeme též $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.
- Limita v definici derivace je průměrná rychlost na intervalu, jehož délka je prakticky nerozlišitelná od nuly, tj. okamžitá rychlost.

Jednotka derivace je stejná, jako jednotka podílu $\dfrac{f(x)}{x}$.

Derivace $f'(x)$ udává, jak se mění veličina f při změnách veličiny x. Interpretace derivace v nematematických disciplínách je okamžitá rychlost s jakou veličina f reaguje na změny veličiny x.

Věta (existence derivace implikuje spojitost). *Má-li funkce f derivaci na intervalu I, je na tomto intervalu spojitá.*

Věta (znaménko derivace implikuje monotonii).

- *Má-li funkce f kladnou derivaci na intervalu I, je na tomto intervalu rostoucí.*
- *Má-li funkce f zápornou derivaci na intervalu I, je na tomto intervalu klesající.*

Aplikace derivací 1: Jak rychle? (změna v čase)

Derivace v bodě, pokud ji nahlížíme z hlediska časové změny veličiny, která nás zajímá, je okamžitá rychlost s jakou se mění tato veličina.

Zákon ochlazování

Horké těleso o teplotě T je v chladnější místnosti o teplotě T_0. Z fyziky je známo (Newtonův zákon tepelné výměny), že rychlost s jakou klesá teplota tělesa je úměrná teplotnímu rozdílu. Tento rozdíl je $T - T_0$ (od většího odečítáme menší).

- Veličina T je teplota tělesa měřená například ve stupních Celsia.
- Veličina t je čas měřený například v hodinách.
- Derivace $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ ve stupních Celsia za hodinu je rychlost, s jakou roste teplota tělesa.
- Matematickým vyjádřením toho, že rychlost s jakou roste teplota a teplotní rozdíl $T - T_0$ jsou úměrné je rovnice
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_0),$$
kde k je konstanta úměrnosti a záporné znaménko vyjadřuje, že teplota klesá. Neznámou v této rovnici je funkce a v rovnici figuruje derivace této funkce. Takové rovnice se naučíme řešit později.

Poznámka (smysl předchozího příkladu). Předchozí příklad je často v různých obměnách používán na modelování ochlazování kávy, což je proces, který většina lidí důvěrně zná. Nemáme pochopitelně ambice se domnívat, že bychom dokázali z této rovnice odvodit nějaké zásadní výsledky aplikovatelné při pití ranní kávy nebo při konzumaci horké polévky. Učíme se na malých věcech, abychom později mohli dělat věci velké. Na známých věcech se učíme aparát, který bude naším jediným nástrojem tam, kde intuice začne selhávat. Z tohoto příkladu je nutné si odnést, že derivace, jako rychlost změny, hraje roli při kvantitativním popisu dějů a při studia procesů, kdy se mění veličiny. Ať už doopravdy (studium pohybu nebo dějů, probíhajících v čase) nebo virtuálně (problémy spojené s mechanikou, včetně statiky, stability a deformací, často pracují s virtuálními změnami, tj. se změnami, které jsou sice z hlediska úlohy přípustné, ale příroda je z nějakého důvodu nerealizuje). Tedy naprostá většina dějů a jevů, které studujeme a chceme jim rozumět. Jakmile se v popisu fyzikálního zákona objeví slovo *rychlost*, někdy nahrazené souslovím *časová změna*, znamená to, že kvantitativní popis se děje pomocí derivací.

Uhlík 14C a datování organických nálezů

V roce 1940 byl objeven uhlík ^{14}C. Jedná se o radioaktivní prvek s mnoha skvělými vlastnostmi. Jednou z nich je vhodná rychlost rozpadu, která jej činí vhodným pro datování archeologických nálezů pozůstatků živých organismů

- Rychlost, s jakou se mění množství (a tedy i koncentrace y v daném vzorku) nerozpadnutého radioaktivního materiálu je úměrná jeho množství (a tedy i koncentraci). Tato skutečnost je přirozeným důsledkem toho, že pro daný nestabilní izotop mají všechny atomy stejnou pravděpodobnost, že u nich dojde k rozpadu a tato pravděpodobnost se s časem nemění. Kvantitativně je proces rozpadu popsán rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\lambda y,$$

kde λ je konstanta úměrnosti.
- Uhlík je na datování vhodný, protože jej během života absorbují živé organismy a protože poločas rozpadu jej činí vhodným pro datování většiny archeologicky zajímavých nálezů. (Pro datování vzorků stařích než 50 tisíc let je nutné použít jiný prvek, protože v tomto případě již uhlíku ^{14}C ve vzorku zůstane málo.)

Aplikace derivací 2: Jak strmě? (změna v prostoru)

Derivace v bodě, pokud ji nahlížíme z hlediska prostorové změny veličiny, která nás zajímá, je míra, jak nerovnomerně je veličina rozložena v prostoru. Často se tato veličina nazývá gradient, zejména pokud nepracujeme v jednorozměrném případě, ale pokud popisujeme děj probíhající v rovině nebo v prostoru.

Vedení tepla (dřevařství, nábytek, dřevostavby)

Nerovnoměrnost rozložení teploty v tělese vede k vyrovnávání teplot přenosem tepla. Uvažujme teplotu T tyče jako funkci polohy x na tyči. Ke kvantitativnímu vyjádření vedení tepla je nutné vědět, jaký rozdíl teplot připadá na jednotku délky. V homogenním případě vydělíme teplotní rozdíl vzdáleností. V obecném případě rychlost s jakou se mění teplota podél tyče (gradient teploty) vyjadřujeme pomocí derivace

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}.$$

Využívá se v posuzování izolačních vlastností a při sušení dřeva.

Koryto řeky (krajinářství)

Uvažujme příčný řez korytem řeky, jak je na obrázku. Z tohoto obrázku je zřejmé, že při zvyšování obsahu průřezu roste hladina. Pokud by stěny byly svislé (tj. B nezávislé na h), byla by změna průřezu ΔA (například v milimetrech čtverečních) vyvolaná změnou výšky Δh (například v milimetrech) rovna šířce řeky B v milimetrech, protože koryto by bylo obdélníkové a podíl obsahu obdélníka a jeho výšky je šířka. V případě nekonstantního B dostáváme místo podílu derivaci, tj.

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h} = B.$$

Derivace průřezu koryta podle výšky koryta hraje důležitou roli například při přechodu říčního proudění v bystřinné. Tato veličina vyjadřuje, jak rychle se mění obsah průřezu s rostoucí hladinou. V praxi je možné ji spočítat pro speciální tvary koryta, proto jsou vzorce pro vodní skok související s tímto přechodem k dispozici jenom ve speciálních případech, jako například koryto obdélníkového tvaru.

Výpočet derivace

- **Nikdy** (nebo alespoň skoro nikdy) nederivujeme pomocí definice, ale používáme vzorce pro derivace základních elementárních funkcí a pro derivace matematických operací s funkcemi.
- Viz cvičení v prvním týdnu.

Aplikace derivací 3: Jak citlivě? (reakce na změnu)

Derivace v bodě, pokud ji nahlížíme z hlediska citlivosti reakce funkce na změnu vstupních dat, udává, jaký vliv má jednotková změna ve vstupních datech na zmenu funkční hodnoty funkce. Pokud změna ve vstupních datech není jednotková ale násobek jednotkové změny, je i odezva násobná.

Poznámka. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce taková, že má derivaci. Pokud se veličina x změní z hodnoty x_0 o hodnotu Δx (tj. nová hodnota je $x_0 + \Delta x$), potom se f mění přibližně o $f'(x_0)\Delta x$, tj.

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$$

neboli

$$\Delta f \approx \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}\Delta x.$$

Tato aproximace je použitelná pro malé hodnoty Δx.

Co se rozumí malou hodnotou Δx závisí na více faktorech, například i na tom, jak se funkce “vzpírá” tomu, být aproximována výrazem úměrným Δx. Přesněji tuto podmínku zformulujeme po probrání Taylorova polynomu, kdy se použije o něco obecnější postup.

Příklad. Nosník výšky h, šířky a a délky L je uprostřed zatížený silou F. Průhyb s uprostřed nosníku je dán vztahem

$$s = \frac{FL^3}{4Ebh^3}, \qquad (\clubsuit)$$

kde E je materiálová konstanta. Pro $h = 20\,\mathrm{cm}$ je průhyb $s = 10\,\mathrm{cm}$. Zjistěte, jak se průhyb mění při změnách výšky nosníku. Odhadněte, jak se průhyb změní, pokud se h sníží na $18\,\mathrm{cm}$?

Řešení. Relevantními veličinami jsou s a h a vzorec je tedy možno shrnout do tvaru

$$s = \frac{k}{h^3},$$

kde k je konstanta charakterizující danou situaci. Pro zadané hodnoty výšky a průhybu vychází konstanta

$$k = sh^3 = 10 \times 20^3 = 80\,000.$$

Vzorec (♣) tedy redukujeme na

$$s = 80\,000 h^{-3}.$$

Derivováním obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}h} = 80\,000 \times (-3)h^{-4} = -\frac{3 \times 80\,000}{h^4}.$$

Změna výšky nosníku je

$$\Delta h = 18 - 20 = -2\,\mathrm{cm}$$

a tomu odpovídá změna průhybu

$$\Delta s = -\frac{3 \times 80\,000}{(20)^4}(-2) = 3\,\mathrm{cm}.$$

Průhyb se tedy zvětší o 3 cm.

Poznámka (smysl předchozího příkladu). Proč nepočítáme přesně? Stačila by selská logika a změna funkce $s = \frac{k}{h^3}$ by byla

$$\Delta s = \frac{k}{(h + \Delta h)^3} - \frac{k}{h^3}. \tag{♠}$$

Odpověď je překvapivá: pomocí derivací je vyjádření změny v naprosté většině případů jednodušší. V tomto našem případě máme

$$\Delta s \approx -\frac{3k}{h^4}\Delta h,$$

což je na další práci mnohem příjemnější výraz, než rozdíl dvou zlomků (♠). Skutečnost, že platí pouze pro malé Δh nás nijak neomezuje. Většinou se tento aparát používá tam, kde se chyba limitním přechodem "stáhne na nulu". Navíc, ukazujeme koncept. *Důležité je si z příkladu odnést, že derivace umožní analyzovat, jak vypočítané veličiny reagují na změny ve vstupních datech. Výsledkem může být například maximální teoretická přesnost se kterou je možné vypočítat výslednou veličinu při vstupních datech zatížených chybou nebo nějakým způsobem nejistých (zákon šíření chyb).*

Parciální derivace

Definice (parciální derivace). Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkce dvou proměnných, x a y, tj. $f(x, y)$. Výraz

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

se nazývá *parciální derivace funkce f podle x*. Podobně,

$$\frac{\partial f}{\partial y} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

je *parciální derivace funkce f podle y*.

Podobně můžeme definovat parciální derivaci pro funkce libovolného konečného počtu proměnných. V těchto parciálních derivacích vlastně sledujeme, jak reaguje veličina f na změny jenom v jedné proměnné. Proměnná, přes kterou se nederivuje, má vlastně roli parametru, nijak se nemění.

Rovnice vedení tepla v 1D

Studujme vedení tepla v jednorozměrné tyči. Teplota je funkcí dvou proměnných, polohy a času.

Poznámka. Potřebujeme fyzikální zákony řídící vedení tepla. Bez nich matematika model vedení tepla nemá jak naformulovat. Tyto zákony je potřeba matematice dodat "z venku", z aplikované vědy. Tou je v tomto případě fyzika, jindy může být biologie nebo geologie. Jakmile jsou potřebné zákony a případně materiálové vztahy k dispozici, stavé se problém čistě matematickým a fyzika přijde ke slovu při závěrečné interpretaci. Použijeme následující fyzikální fakta.

- Rozdílem teplot vzniká tok tepla. Velikost toku tepla je úměrná teplotnímu rozdílu.
- Teplota se zvyšuje dodáním tepla. Pro zvýšení teploty tělesa o hmotnosti m o hodnotu ΔT je nutné dodat

  $$Q = mc\Delta T, \tag{**}$$

  kde c je měrná tepelná kapacita.
- Budeme vztahy formulovat pro změny za časovou jednotku a pro jednotkový objem (tedy místo hmotnosti m, změny teploty ΔT a tepla Q máme hustotu ρ, rychlost změny teploty $\frac{\partial T}{\partial t}$ a rychlost s jakou dodáváme teplo do daného místa vztažená na jednotkový objemu).

V dalším už nastupuje matematický popis a ve vhodných chvílích vždy použijeme výše uvedené fyzikální zákony. Mluvíme o teple, ale jako mechanický model si můžeme představit proudění tekutiny (pro jednoduchou představu) nebo proudění vlhkosti (pro odvození rovnice difuze namísto rovnice vedení tepla).

- *Potřebujeme vědět, jak moc se mění teplota podél tyče.* Změny v prostorovém rozložení teploty zachycuje derivace $\frac{\partial T}{\partial x}$ v jednotkách (například) stupeň Celsia na centimetr.
- *Potřebujeme změnu teploty podél tyče převést na veličinu popisující proudění tepla.* Tok tepla je úměrný veličině popisující změnu rozložení tepla v prostoru,
$$q = -k\frac{\partial T}{\partial x}. \tag{***}$$
  - Znaménko mínus vyjadřuje skutečnost, že teplo teče z míst s vyšší teplotou do míst s menší teplotou a že tok uvažujeme kladný, pokud teče ve směru osy x. Přesněji, pokud teplota roste směrem doprava, parciální derivace je kladná, ale teplo teče doleva, tedy tok musí být záporný.
  - Veličina k je konstanta úměrnosti umožňující překalibrování změny prostorového rozložení teploty na tok tepla jendotkovým průřezem (první odrážka).
- *Potřebujeme zjistit, kolik tepla za jednotku času přiteče do nějakého bodu a v tomto bodě "zůstane". Množství, které zůstane, je rozdílem mezi množstvím, které přiteče, a množstvím, které odteče.* Tedy potřebuji vědět, jak se mění tok tepla podél tyče. Rychlost s jakou roste rychlost toku podél tyče je $\frac{\partial q}{\partial x}$. My pro kladný ohřev potřebujeme pokles toku tepla, tedy násobíme záporným znaménkem a dostáváme $-\frac{\partial q}{\partial x}$.
- *Víme, kolik tepla se v daném místě spotřebuje na zvýšení teploty a tuto hodnotu musíme převést na změnu teploty (třetí odrážka). Opět se jedná o jakési překalibrování, které ještě souvisí s dalšími fyzikálními vlastnostmi jako je měrná tepelná kapacita a hmotnost jednotkového množství látky objemu v daném místě.* Teplo $-\frac{\partial q}{\partial x}$ je teplo, které každou časovou jednotku "zůstává" v bodě x. Toto teplo se "použije" na zvýšení teploty. Z rovnice (**) pro jednotku času a jednotku objemu
$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}.$$
- Po dosazení za q dostáváme
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}.$$
- Derivace konstantního násobku je konstantní násobek derivace. Veličina k by konstantní být nemusela a proto ji z opatrnosti necháme na svém místě. Může v ní být nehomogenita nebo se může měnit s teplotou, tj. vztah (***) může být nelineární. Znaménko mínus reprezentuje násobení konstantou -1. Toto vede na finální tvar
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Shrnutí. V odvození vidíme, že rovnice vedení tepla je vlastně bilance toku tepla. Rozdíl o kolik se v daném místě snižuje tok tepla udává, kolik tepla se v daném místě spotřebovalo. Tato spotřeba tepla se projeví zvýšením teploty v daném bodě.

Gradient

Rovnici vedení tepla ve 2D a 3D uvedeme později. Může nastat problém s tím, že teplo neteče stejným směrem jaký odpovídá gradientu teploty. Je to podobné, jako pohyb vzduchu nebo podzemní vody způsobený rozdílem tlaku: voda nebo vzduch míří do míst s nižším tlakem, ale přitom volí cestu menšího odporu. Problém vyřešíme nástrojem, který umožní změnit směr vektoru: matice a maticové násobení. Teď uvedeme jenom veličinu, která umožní kvantifikovat, jakým směrem působí síla uvádějící příslušnou stavovou veličinu do pohybu.

Definice (gradient). Buď $f(x,y)$ funkce dvou proměnných, která má parciální derivace. *Gradientem* funkce f rozumíme vektor
$$\operatorname{grad} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Poznámka. Formálně též často píšeme
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f$$
nebo
$$\nabla f,$$
kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ je operátor, se kterým pracujeme jako s vektorem. Nazývá se *nabla* nebo *Hamiltonův operátor*. Výsledkem gradientu je vektor ve směru maximálního růstu veličiny f. V praxi nás většinou zajímá směr maximálního poklesu, tj. $-\nabla f$.

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Aplikované vědy (fyzika, biologie, nauka o materiálu, hydrologie) přirozeně formulují své zákony a poznatky mimo jiné i kvantitavině a pomocí pojmů vyjadřujících rychlosti změn. Doteď jsme aparátem střední školy uměli počítat jenom průměrně rychlosti za daný časový interval, s derivací dostáváme do ruky nástroj pro práci s okamžitými rychlostmi.
- Jakmile ve slovním popisu procesu slyšíme slovo rychlost, znamená to, že při matematickém modelování hraje pravděpodobně důležitou roli derivace. Okamžitá rychlost je derivace. Jenom v krásných případech probíhajících konstantní rychlostí můžeme tuto rychlost počítat pomocí podílu, jak to známe u rychlosti pohybu.

- Naučili jsme se nebo se naučíme pomocí vzorců derivovat bežné funkce.
- Derivace umožní předpovědět, co se stane s veličinou, která závisí na jiné veličině a tato jiná veličina se mění známou rychlostí. Ze vztahu, který dává do souvislosti hodnoty dvou veličin, můžeme určit pomocí derivací vztah, dávající do souvislosti rychlosti změn těchto veličin.
- V případě nutnosti umíme rozšířit derivace i do světa funkcí více proměnných. Děláme to tak, že sledujeme rychlost změny způsobenou vždy změnou jenom jedné veličiny. Proto příslušné derivace nazýváme parciální. (Parciální znamená v tomto smyslu částečný.)

Kapitola 3

Derivace & friends II

Lineární aproximace v 1D

Věta. *Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce, která má derivaci. V okolí bodu x_0 platí přibližný vzorec*

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

neboli

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}(x - x_0).$$

Poznámka. Výše uvedený vzorec není těžké rozšifrovat.

- Veličina $f(x)$ je funkční hodnota v bodě x, tu chceme odhadnout.
- Veličina $f(x_0)$ je známá funkční hodnota v bodě x_0, to je výchozí bod pro odhad.
- Veličina $f'(x_0)$ je odhad změny veličiny f způsobený jednotkovou změnou vstupních dat (zvýšení hodnoty x_0 o jednotku). Tento faktor ještě v dalším kroku musíme přizpůsobit tomu, že změna vstupních dat není jednotková, což uděláme s využitím přímé úměrnosti.
- Veličina $f'(x_0)(x - x_0)$ je odhad změny veličiny f vyvolané změnou veličiny x z x_0 o $\Delta x = x - x_0$ tak, jak jsme jej používali v minulé přednášce.

Příklad (růst stromu). Strom má v roce 2019 výšku 3 metry a roste rychlostí 0.5 metru za rok. V roce x je jeho výška dána vzorcem

$$h(x) = 3 + 0.5(x - 2019).$$

Příklad (aproximace důležitých funkcí v okolí nuly). Ve cvičení ukážeme platnost následujících přibližných vzorců, které platí pro x blízké k nule.

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1, \qquad (1+x)^n = 1 + nx.$$

První dva vzorce využijeme později při popisu malých rotací v rovině. Mnoho důležitých aplikací těchto vzorců ve fyzice je na webu fyzikální olympiády v dokumentu Aproximace ve fyzikálních úlohách.

Lineární aproximace v některých fyzikáních zákonech

Příklad (gravitační potenciál v malých výškách nad zemí). Gravitační potenciál V ve vzdálenosti r od středu koule o hmotnosti M je dán vztahem

$$V(r) = -G\frac{M}{r} = -GMr^{-1},$$

kde G je gravitační konstanta. Najdeme lineární aproximaci v bodě R.

Dosazením obdržíme

$$V(R) = -GMR^{-1}$$

a derivováním

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = GMr^{-2}, \quad \frac{\mathrm{d}V(R)}{\mathrm{d}r} = GMR^{-2}.$$

Odsud poté získáme lineární aproximaci

$$V(r) \approx -GMR^{-1} + GMR^{-2}(r - R)$$

Pro Zemi jako kouli o poloměru R je $r - R$ výška nad Zemí h a aproximaci je možno po přeznačení napsat ve tvaru

$$V(r) \approx V_0 + gh.$$

V tomto označení je $V_0 = -GMR^{-1}$ konstanta související s volbou nulové hladiny potenciálu a vzhledem k libovolnosti volby nulové hladiny je tato hodnota nepodstatná. Veličina $g = GMR^{-2}$ je tíhové zrychlení vyjádřené pomocí gravitační konstanty G a parametrů Země. Veličina gh je potenciál v tíhovém poli Země. Tuto veličinu známe lépe ze vzorce pro potenciální energii tělesa o hmotnosti m, který má tvar

$$E = mgh.$$

Online výpočet tíhového zrychlení

Příklad (potenciální a kinetická energie). V předchozím příkladě je možné využít vztah

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx, \quad \text{pro malé } x.$$

Přepsáním gravitačního potenciálu V do tvaru obsahujícího výšku nad zemí h a využitím lineární aproximace získáme

$$\begin{aligned} V &= -G\frac{M}{R+h} \\ &= -G\frac{M}{R}\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-1} \\ &\approx -G\frac{M}{R}\left(1+(-1)\frac{h}{R}\right) \\ &= -G\frac{M}{R} + G\frac{M}{R^2}h \end{aligned}$$

a po zavedení nových konstant

$$V \approx V_0 + gh,$$

kde $g = G\dfrac{M}{R^2}$.

Podobně aproximací přesných vztahů plynoucích z Einsteinovy teorie relativity získáme složku energie související s pohybem, tj. kinetickou energii

$$\begin{aligned} E &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ &= m_0c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\ &\approx m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 \end{aligned}$$

pro v mnohem menší než c. Snadno rozšifrujeme, že s rychlostí souvisí jenom druhý sčítanec a že se jedná o klasický vzorec pro kinetickou energii $\dfrac{1}{2}mv^2$.

Ač se jedná "jenom" o lineární aproximaci, je vzorec $E = \dfrac{1}{2}mv^2$ dokonce mnohem použitelnější, protože výpočet kinetické energie pomocí univerzálně platného relativistického vzorce při malých rychlostech v praxi obvykle zhavaruje na zaokrouhlovacích chybách.

Lineární aproximace a jednorozměrné materiálové vztahy

V inženýrské praxi často potřebujeme modelovat odezvu materiálu reagujícího na vnější podnět. Může se jednat například o změnu délky při mechanickém namáhání, tok tepla materiálem při tepelném namáhání, tok tekutiny porézním materiálem (dřevo, půda) při difuzi nebo rozdílu tlaků a podobně.

Pokusíme se modelovat funkci dávající do souvislosti velikost podnětu a reakci materiálu.

- Je přirozené, že při nulovém podnětu není žádná odezva a proto funkce prochází počátkem.
- S velikostí podnětu odezva na tento podnět roste a proto funkce v okolí počátku má kladnou derivaci a roste.
- Z lineární aproximace vidíme, že pro $x_0 = 0$ a $f(0) = 0$ se vzorec pro lineární aproximaci redukuje na
  $$f(x) \approx f'(0)x,$$
  tj. na přímou úměrnost.
- Ukazuje se, že v řadě praktických úloh je uvedená aproximace dobrá na dostatečně dlouhém intervalu a podle typu úlohy má tato aproximace povahu fyzikálního zákona a svůj vlastní název. Nejčastěji se setkáme se s *Hookovým zákonem* pro deformaci materiálu (relativní prodloužení je úměrné normálovému napětí), *Darcyho zákonem* pro tok tekutiny půdou (filtrační rychlost je úměrná záporně vzatému hydraulickému gradientu), *Fickovým zákonem* pro difuzi (hustota difuzniho toku je úměrná záporně vzatému gradientu koncentrace) a *Fourierovým zákonem* pro vedení tepla v materiálu (hustota tepelného toku je úměrná záporně vzatému gradientu teploty). Později, v přednášce o zákonech zachování ve vektorovém poli ke konci semestru, si tyto závislosti naformulujeme ve vícerozměrném prostředí a hlavně ve tvaru, který umožní zohlednit práci s neizotropními materiály (různé fyzikální vlastnosti v různých směrech).
- Matematicky je tedy povaha přímé úměrnosti v materiálových vztazích zřejmá a experimentálně je možné ověřit, pro jaké oblasti platí. Toto nám však mnohdy nestačí a snažíme se tyto vztahy ještě odvodit ze základních fyzikálních vztahů a z představy jak daný proces funguje. To otevírá možnosti potvrdit si, že naše představa o chování materiálu je správná.
- V některých velmi speciálních případech dokonce umíme určit materiálovou charakteristiku výpočtem namísto měření. Pro praktické využití tato dovednost není významná (můžeme vypočítat například koeficient filtrace pro půdu složenou z částic ve tvaru stejně velkých kuliček, v praxi se však s takovým materiálem setkáme nanejvýš při speciálních aplikacích v laboratoři), ale dává nám to důležitý prostor pro ověření fyzikálních hypotéz a matematických postupů.

Derivace a tečna

Lineární aproximace funkce je vlastně aproximace tečnou. Protože pojem tečna ze střední školy chápeme jenom intuitivně, můžeme nyní pomocí derivace tečnu dokonce definovat. Z geometrického pohledu je tečna přímka bodem $[x_0, f(x_0)]$, která má směrnici $f'(x_0)$. Proto se o derivaci často mluví jako o směrnici tečny.

Definice (tečna). Nechť f je funkce, která má v bodě x_0 derivaci $f(x_0)$. Přímka

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

se nazývá *tečna ke grafu funkce* f v bodě x_0.

Díky souvislosti derivace s tečnou je derivace jedinečným nástrojem při popisu vlastností křivek. Příslušná oblast se nazývá diferenciální geometrie a je to jakási oblast mezi geometrií a diferenciálním počtem.

Motivace: Je možné chtít více než je lineární aproximace?

Lineární aproximace vychází z předpokladu, že rychlost růstu (nebo poklesu) se příliš nemění. Někdy můžeme mít dodatečnou informaci o tom, jak se tato rychlost změní. Například pokud se bude rychlost zpomalovat, bude skutečná hodnota funkce menší než lineární aproximace.

Je otázka, zda a jak je možné informaci o tom, jak rychle roste rychlost, případně jak rychle roste rychlost růstu rychlosti, využít. To znamená že budeme studovat derivaci derivace, derivaci derivace derivace atd.

Aproximaci funkce $\cos x \approx 1$ odvozenou výše, kdy aproximujeme vlastně konstantní funkcí, je možné také chápat jako selhání lineární aproximace. Následující slidy a pojem Taylorův polynom nám umožní najít prostředek pro aproximaci i v těchto případech.

Derivace vyšších řádů

Definice (druhá a další vyšší derivace).

- *Druhou derivací* rozumíme derivaci derivace. Označujeme $f''(x)$ nebo $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$.
- Podobně *k-tou derivací* rozumíme derivaci $(k-1)$-ní derivace. Označujeme $f^{(k)}(x)$ nebo $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.

Platí tedy

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right), \quad \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{k-1} f}{\mathrm{d}x^{k-1}}\right)$$

aneb

$$f'' := (f')', \quad f''' = (f'')', \quad f^{(k)} = (f^{(k-1)})'.$$

Označení derivací pomocí čárek se nazývá Lagrangeova notace, označení pomocí podílu diferenciálů Leibnizova notace. Ještě se někdy používá i Eulerova notace, používající $\mathrm{D}f$, $\mathrm{D}^2 f$ a $\mathrm{D}^k f$ pro první, druhou a k-tou derivaci.

Příklad.

- Exponenciální funkce e^x má všechny derivace stejné.
- U mocninné funkce se každým derivováním sníží exponent. Je-li exponentem přirozené číslo, po konečném počtu kroků se exponent sníží na nulu, funkce tedy bude konstantní a všechny další derivace budou nulové.
- Polynomy mají všechny derivace od jistého řádu rovny nule.

Podobně je možné pracovat s parciálními derivacemi parciálních derivací. Například

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

nebo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Taylorův polynom a polynomiální aproximace v 1D

Definice (Taylorův polynom). *Taylorův polynom* stupně n pro funkci f v bodě x_0 je polynom

$$\begin{aligned} T(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} T(x) &= f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 f(x_0)}{\mathrm{d}x^2}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n f(x_0)}{\mathrm{d}x^n}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Věta (Taylorova věta s Lagrangeovým tvarem zbytku). *Platí*

$$f(x) - T(x) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^{n+1}f(\xi)}{\mathrm{d}x^{n+1}}(x-x_0)^{n+1},$$

kde $\xi \in (x_0, x)$ je vhodné číslo. Pravá strana této rovnice je blízká k nule, pokud je n dostatečně velké, x dostatečně blízko k x_0 a $(n+1)$-ní derivace funkce f je relativně malá. V těchto případech je

$$f(x) \approx T(x).$$

Příklad.

$$\ln\frac{1+x}{1-x} \approx 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + \frac{2}{9}x^9$$

$$\ln 2 = \ln\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \approx 0.69314604$$

Po tomto výpočtu je prvních pět cifer aproximace $\ln 2$ správně. Tady vidíme i jeden zajímavý trik. Pokud bychom se snažili napsat Taylorův polynom funkce $\ln(x+1)$, která vypadá příjemněji, chyba aproximace by byla mnohem větší.

Online výpočet.

Příklad. Výraz

$$V(r) = \frac{1}{r^{12}} - \frac{2}{r^6} = r^{-12} - 2r^{-6}$$

je (až na konstanty, které pro pohodlí volíme pevně) Lennard-Jonesův potenciál často používaný pro interakci mezi atomy nebo molekulami. Napíšeme Taylorův polynom druhého stupně v bodě $r=1$. K tomu potřebujeme znát funkční hodnotu a hodnotu prvních dvou derivací v tomto bodě.

$$\begin{aligned}
V(1) &= 1 - 2 = -1\\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} &= -12r^{-13} - 2(-6)r^{-7}\Big|_{r=1} = -12 + 12 = 0\\
\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2} &= 12\cdot 13r^{-14} - 2\cdot 6\cdot 7r^{-8}\Big|_{r=1} = 12\cdot 13 - 12\cdot 7 = 72\\
V(r) &\approx -1 + \frac{1}{2}72(r-1)^2
\end{aligned}$$

Konstanta -1 je nezajímavá, souvisí s nulovou hladinou potenciálu a nulovou hladinu potenciálu si můžeme volit libovolně.

Lineární člen chybí a kvadratický člen je analogický potenciální energii pružiny o tuhosti k ve tvaru

$$U = \frac{1}{2}kx^2.$$

Molekuly či atomy popsané tímto potenciálem se chovají jako tělesa na pružině o tuhosti $k=72$. Pro atom o hmotnosti m tedy například platí vzorec pro úhlovou frekvenci oscilací $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, odvozený původně pro těleso na pružině. Veličina $r-1$ je výchylka z rovnovážného stavu. Analogicky se chovají pružné konstrukce. V klidu jsou ve stavu s minimální potenciální energií a při vychýlení z tohoto stavu o malou hodnotu začínají kmitat. Pokud aproximujeme potenciál pomocí Taylorova polynomu, z koeficientu u kvadratického člene můžeme určit frekvenci těchto oscilací.

Motivace: Jak najít minimum potenciálu?

V příkladě s aproximací potenciálu pomocí Taylorova polynomu se nám povedlo potenciál aproximovat pomocí kvadratické funkce v okolí vrcholu paraboly. To je častá úloha, protože systémy s potenciální energií se často nacházejí ve stavu blízkému minimu této energie. Otázka je, jak toto minimum najít. Budeme řešit poněkud obecnější úlohu, jak hledat nejenom minimální hodnotu, ale i maximální hodnotu. Zaměříme se na minima a maxima, která jsou lokální (platná pouze na určitém intervalu, třeba i krátkém).

Lokální extrémy spojitých funkcí

Náledující definice si všímají bodů které mají tu vlastnost, že v okolí není možné najít body buď s vyšší funkční hodnotou (potom se jedná o lokální maximum, nikde v okolí mi funkce neukáže více) nebo s nižší funkční hodnotou (analogicky, lokální minimum).

Definice (lokální extrémy). Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Řekneme, že f má v bodě x_0 *lokální maximum*, pokud platí
$$f(x) \le f(x_0)$$
pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0.
- Řekneme, že f má v bodě x_0 *lokální minimum*, pokud platí
$$f(x) \ge f(x_0)$$
pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0.
- Řekneme, že f má v bodě x_0 *lokální extrém*, pokud v tomto bodě má buď lokální maximum nebo lokální minimum.

Přímo z definice lokálních extrémů a rostoucí a klesající funkce plyne, že funkce nemůže mít lokální extrém v bodě, kde je rostoucí nebo kde je klesající. Tuto skutečnost vyjadřuje pomocí derivací následující věta.

Věta (Fermatova o lokálním extrému). *Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, potom je derivace funkce f v bodě x_0 nulová, nebo neexistuje.*

Předchozí věta eliminuje obrovské množství bodů z definičního oboru funkce. V prakticky využitelných případech nám po této eliminaci často zůstane jenom jediný bod, podobně jako v následující úloze.

Nosník maximální tuhosti

Příklad. Z kulatiny o průměru d chceme získat nosník obdélníkového průřezu, který se při zatížení co nejméně prohýbá. Z fyzikálních úvah víme, že musí být maximální součin bh^3, kde b je šířka a h výška nosníku.

Trik 1: Budeme měřit jednotky v násobcích průměru. Proto je $d = 1$. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že kulatina má jednotkový průměr.

Z Pythagorovy věty (nakreslete si průřez, tj. obdélník vepsaný do kružnice) plyne $b = \sqrt{1-h^2}$ a snažíme se tedy řešit úlohu

$$bh^3 = h^3\sqrt{1-h^2} \to \text{MAX},$$

která má fyzikální smysl na intervalu $(0,\infty)$.

Trik 2: Protože uvažujeme jenom kladné délky, je funkce kladná a bude maximální tam, kde bude maximální její druhé mocnina. Je tedy možné studovat ekvivalentní úlohu

$$(bh^3)^2 = h^6(1-h^2) = h^6 - h^8 \to \text{MAX}$$

na intervalu $(0,\infty)$. Výhoda je zřejmá: místo součinu dvou funkcí, z nichž jedna je navíc složená, studujeme dvoučlenný polynom. Pro funkci

$$f(h) = h^6 - h^8$$

dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h} = 6h^5 - 8h^7 = 2h^5(3-4h^2).$$

Tato derivace je nulová pro

$$h^2 = \frac{3}{4}$$

tj.

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pro tuto výšku bude mít nosník maximální hodnotu tuhosti. Šířka nosníku bude

$$b = \sqrt{1-h^2} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Poměr výšky a šířky u nosníku maximální tuhosti tedy bude $\sqrt{3} : 1$ a šířka bude rovna polovině průměru.

Online výpočet.

Závěrečné poznámky k lokálním extrémům

Poznámka. Někdy se při studiu lokálních extrémů hodí dva následující triky.

1. Vhodnou volbou jednotek dokážeme eliminovat některé parametry. Přesněji, vhodnou volnou jednotek dokážeme některým parametrům dát konkrétní numerickou hodnotu. Vyšetřovaná funkce je potom často jednodušší.
2. Je-li g rostoucí, potom z definice rostoucí funkce plynou ekvivalence

$$f(x) \leq f(x_0) \iff g(f(x)) \leq g(f(x_0)),$$
$$f(x) \geq f(x_0) \iff g(f(x)) \geq g(f(x_0))$$

a proto funkce $f(x)$ a $g(f(x))$ mají lokální extrémy ve stejných bodech. Toho je možné využít, pokud vidíme, že při vhodné volbě funkce g by byla funkce $g(f(x))$ vhodnější pro hledání lokálních extrémů. Podobně je možné uvažovat i pro klesající funkce g, ale protože klesající funkce obrací směr nerovností, mění se lokální maximum na lokální minimum a naopak.

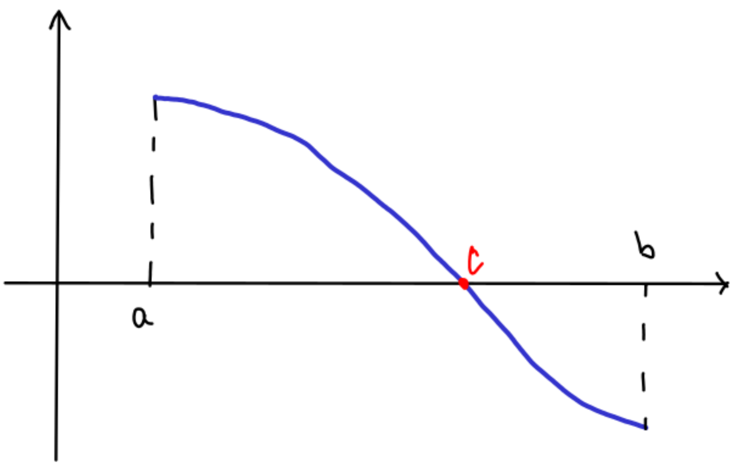
Pokud řešíme úlohu s praktickým zadáním, je z povahy úlohy často zřejmé, že lokální extrém požadovaného typu existuje a často to bývá jediný bod, kde je derivace nulová. Pokud takových bodů máme více, nebo pokud je situace méně zřejmá, můžeme existenci lokálního extrému posoudit pomocí následující věty.

Věta (postačující podmínka pro lokální extrémy). *Je-li f spojitá v bodě x_0 a mění-li se v bodě x_0 funkce f z rostoucí na klesající, má funkce f v bodě x_0 lokální maximum. Analogicky, lokální minimum nastává při změně z klesající na rostoucí.*

Podle této věty jsou intervaly monotonie zásadní informací pro nalezení lokálních extrémů. Vzhledem k souvislosti monotonie s derivací je tedy nutné se věnovat nalezení intervalů, kde má funkce kladnou derivaci a intervalů, kde má funkce zápornou derivaci.

Bolzanova věta

Bolzanova věta je poměrně názorné tvrzení. Hlavním přínosem pražského matematika Bernarda Bolzana bylo, že si uvědomil, že toto tvrzení není snadným důsledkem definice spojitosti a že přes názornost tohoto tvrzení je nutno podat jeho přesný důkaz, který rozhodně není jednoduchý. Jiná, zdánlivě nevinná tvrzení, však pravdivá být nemusí. Zde se nabízí souvislost se spojitostí funkce a nakreslitelností jedním tahem. Bolzano například našel



Obrázek 3.1: *Bolzanova věta je jedna z těch, které člověka nepřekvapí. Pokud se má funkce spojitě přehoupnout z jedné strany osy na druhou, musí tuto osu někde protnout.*

funkci, která je spojitá, ale její graf je tak komplikovaný, že se nedá nakreslit.

Podmínka $f(a)f(b) < 0$ v následující větě znamená, že funkční hodnoty funkce f v bodech a a b se liší znaménkem.

Věta (Bolzanova věta). *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ a $f(a)f(b) < 0$. Potom existuje c na intervalu (a, b) takové, že platí $f(c) = 0$.*

Důsledek.

- Na intervalu, kde je funkce spojitá a různá od nuly, se zachovává znaménko funkce, tj. funkce je zde buď pořád kladná nebo pořád záporná. Mezi oběma variantami se můžeme rozhodnout testováním znaménka funkce v jednom libovolném bodě intervalu.
- Na intervalu, kde má funkce spojitou a od nuly různou derivaci, se zachovává monotonie funkce, tj. funkce je zde buď pořád rostoucí nebo pořád klesající. Mezi oběma variantami se můžeme rozhodnout testováním monotonie (tj. znaménka derivace) v jednom libovolném bodě intervalu.

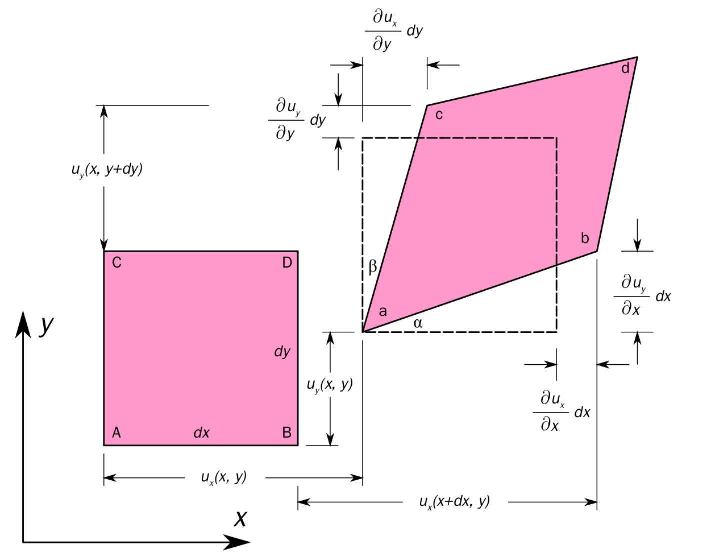
Poznámka. Lokální extrém nastává tam, kde je funkce spojitá a kde se mění monotonie. Nenastává tam, kde se monotonie spojité funkce nemění. Přirozeně nenastává ani tam, kde funkce není definována.

Příklad. Najděte lokální extrém funkce $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Derivace je $y' = \dfrac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$.

Příklad. Najděte lokální extrém funkce $y = \dfrac{x^3}{x+2}$. Derivace je $y' = \dfrac{2(x+3)x^2}{(x+2)^2}$.

Řešení příkladů bude na přednášce. Další příklady ve cvičení.

Lineární aproximace rovinné transformace



Obrázek 3.2: *Působením síly se element materiálu může posunout, rotovat, deformovat. Tuto změnu potřebujeme zachytit. Zdroj: https://physics.stackexchange.com/questions/311716/geometric-derivation-of-the-infinitesimal-strain-tensor/311744*

Následující pasáže rozšiřují lineární aproximaci na případ, kdy chceme popsat transformaci roviny. Protože v tomto případě pracujeme se dvěma souřadnicemi, je nutno uvažovat dvě funkce (pro každou souřadnici jednu funkci) a každá funkce závisí na dvou proměnných (na obou souřadnicích). Popis, který si představíme, využijeme při popisu matematického namáhání při odvození veličin, na nichž je založen obecný Hookův zákon dávající do souvislosti deformaci materiálu a působení vnější síly.

Lineární aproximaci funkce jedné proměnné můžeme zapsat ve tvaru

$$f(x + \Delta x) \approx f + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Delta x,$$

kde na pravé straně pro stručnost nevypisujme závislost na x. Podobně můžeme zapsat lineární aproximaci pro funkci dvou proměnných x_1 a x_2 ve tvaru

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2) \approx f + \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad f(x_1, x_2 + \Delta x_2) \approx f + \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Uvažujme nyní mechanické namáhání, kdy se těleso posunuje, rotuje a deformuje vlivem působení vnější síly a bod (x_1, x_2) se posune o $(u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))$. Pomocí lineárních aproximací

$$u_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \approx u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Delta x_2$$
$$u_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \approx u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Delta x_2$$

dostáváme aproximace této transformace. Při transformaci ve $3D$ je situace podobná, jenom jsou zde další členy od třetích souřadnic. Aby se situace nestala nepřehlednou, je klasický způsob zápisu neudržitelný. Nástroj pro přehlednou formulaci lineární aproximace dostaneme k dispozici později po probrání maticového počtu a maticového násobení. Poté budeme díky lineární aproximaci schopni zformulovat souvislost mezi deformací a působením vnější síly.

Za výše uvedenou lineární aproximaci však platíme jistou daň. Lineární zobrazení mimo jiné transformuje přímky na přímky, rovnoběžky na rovnoběžky, střed úsečky na střed úsečky. Deformaci, která tyto podmínky nesplňuje, tím pádem nemůžeme podchytit. Lineární aproximace je přesná jenom pro relativně malé deformace. Proto se také výsledný produkt, ke kterému se v průběhu semestru dopracujeme, nazývá tenzor malých deformací.

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Derivace udává trend ve změnách veličin a díky tomu umožňuje za určitých okolností nahrazovat komplikované funkční vztahy pomocí vztahů lineárních. Toto nazýváme lineární aproximace a je to jedna za zásadních metod, jak si inženýři zjednodušují úlohy, které by byly jinak neřešitelné.
- Derivace dokáže detekovat růst a klesání funkce a díky tomu dokážeme také detekovat body, kde se růst zastaví a změní na klesání nebo naopak. Tyto body nás přirozeně zajímají, protože v těchto bodech je studovaná veličina maximální nebo minimální a to má dopad při minimalizaci nákladů, maximalizaci pevnosti či zisku a jiných úlohách z praktického života.
- Pokud trend (rychlost změny, derivace) nestačí k podchycení zásadních vlastností veličiny (nastává v lokálním extrému nebo v případě, že potřebujeme lepší aproximaci, než je aproximace lineární), máme k dispozici nástroje i v tomto případě: derivace vyšších řádů a Taylorův polynom.

Kapitola 4

Integrál, integrál a integrál

Naučili jsme se pracovat s derivacemi, tedy s rychlostí změny. Známe-li funkci a zderivujeme ji, dostaneme rychlost změny. Pokud potom původní funkci “ztratíme” a zůstane nám jenom derivace, je otázka, jestli dokážeme původní funkci z této derivace najít. Odpověď je zní, že v jistém smyslu ano. Spojení “v jistém smyslu” naznačuje, že souvislost nebude tak snadná jako je souvislost u navzájem inverzních funkcí. Derivováním totiž můžeme ztratit aditivní konstanty, které v derivaci dávají nulu a zpětně není možné rekonstruovat, derivováním jaké konstanty jsme tuto nulu dostaly. A protože problém uchopíme poněkud obecněji, uvedeme si dokonce hned tři různé “protijedy” na derivování.

Jeden představíme jako opak derivace (**neurčitý integrál**), druhý jako změnu funkce vypočtenou ze zadané rychlosti změny (**Newtonův určitý integrál**) a třetí jako náhradu součtu pro případ, kdy potřebujeme sčítat nekonečně mnoho příspěvků, z nichž každý má v podstatě nulovou hodnotu (**Riemannův určitý integrál**).

Intervalem I budeme rozumět otevřený interval.

Motivace: Jak z derivace křivky získat rovnici křivky?

Na této úloze si připomeneme další roli derivace (směrnice tečny) a představíme si úžasný druh mostů – mosty zavěšené na nosných lanech, které mohou překlenout obrovské vzdálenosti.

U zavěšeného mostu lano nese prostřednictvím svislých lan hmotnost rovnoměrně rozloženou ve vodorovném směru. Je potřeba zvolit vhodnou délku svislých lan tak, aby síla působící na nosné lano byla vždy ve směru tohoto nosného lana. Potom je systém nejstabilnější a nejpevnější.

Díky symetrii stačí uvažovat jenom půlku mostu. Na část lana nad intervalem $[0, x]$ působí následující síly.

- Tahová síla lana v minimu ($x = 0$) o velikosti T doleva.
- Gravitační síla o velikosti $G = \mu x g$ směrem dolů, kde μ je lineární hustota (hmotnost jednotkové délky mostu) a μx je hmotnost části mostu, odpovídající intervalu $[0, x]$.
- Tahová síla F doprava nahoru na pravém konci. Protože je most v klidu, velikost a směr této síly jsou takové, aby součet všech sil působících na uvažovanou část mostu byl roven nule. Jako stavitelé mostu chceme, aby směr síly souhlasil se směrem lana, tj. aby síla byla tečná k nosnému lanu.

Vektorový součet sil musí být nulový a proto všechny tři síly tvoří pravoúhlý trojúhelník. Poměr odvěsen $\dfrac{\mu g x}{T}$ udává směrnici přepony. Křivka udávající směr nosného lana tedy musí mít tvar funkce, která splňuje

$$y' = \frac{\mu g}{T} x,$$

kde μ, g, a T jsou pro danou úlohu konstanty.

Z rozboru vidíme, že máme dánu křivku danou pomocí derivace a tuto křivku musíme najít. Formálně to je stejný problém, jako když máme rychlost změny funkce a chceme najít časový průběh této funkce. Mechanickým modelem může být například pohyb zadanou rychlostí a úloha určit dráhu tohoto pohybu. Tento problém se na základní škole redukuje na případ pohybu konstantní rychlostí ($s = vt$) a na střední škole rozšiřuje na rychlost, která se mění jako lineární funkce ($s = \frac{1}{2}at^2$). Nyní stojíme před úkolem, jak si poradit v případě obecné rychlosti, měnící se libovolně. Přesně to je úkol pro neurčitý integrál.

Neurčitý integrál

Představíme nástroj, který nám umožní odpovědět na následující otázky.

- Je znám směr křivky v každém bodě (tj. směr tečny, derivace). Jaká je rovnice křivky?
- Je známa rychlost, s jakou se mění veličina f. Jaká je rovnice udávající závislost veličiny f na čase?

Definice (neurčitý integrál). Řekneme, že funkce F je *primitivní funkcí* k funkci f na intervalu I, jestliže platí

$$F'(x) = f(x)$$

na intervalu I. Množina všech primitivních funkcí k funkci f se nazývá *neurčitý integrál* funkce f a značí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Otázkou existence primitivní funkce se budeme zabývat na další přednášce. Otázku (ne-)jednoznačnosti řeší následující věta.

Věta (jednoznačnost primitivní funkce). *Primitivní funkce je dána jednoznačně, až na aditivní konstantu.*

- *Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I, platí totéž i pro funkci $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.*
- *Jsou-li F a G primitivní funkce k téže funkci f na intervalu I, existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že*

  $$F(x) = G(x) + c$$

  na I.

Příklad. Funkce x^2 má primitivní funkce například $\frac{1}{3}x^3$, nebo $\frac{1}{3}x^3 + 7$, nebo $\frac{1}{3}x^3 + \pi$, protože derivace všech těchto tří funkcí je x^2. Platí

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Vzorce.

1. $\int c\,\mathrm{d}x = cx + C$
2. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
3. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
4. $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$
5. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
6. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C$
9. $\int \frac{1}{A^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A} + C$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{A} + C$
11. $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, kde $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$

Věta (linearita neurčitého integrálu). *Neurčitý integrál zachovává součet a násobení konstantou. Tedy pro libovolné funkce f, g a libovolnou konstantu c platí*

$$\int f + g\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}x + \int g\,\mathrm{d}x,$$
$$\int cf\,\mathrm{d}x = c\int f\,\mathrm{d}x.$$

Příklad.

$$\int 2x^4 - e^{4x} + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}e^{4x} + \ln|x| + C$$

Aplikace neurčitého integrálu

Příklad. Teplota klesá rychlostí $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.1e^{-0.01t}\,{}^\circ\mathrm{C/min}$. Teplota jako funkce času je dána integrálem

$$\begin{aligned} T &= \int -0.1e^{-0.01t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-0.1}{-0.01}e^{-0.01t} + C \\ &= 10e^{-0.01t} + C. \end{aligned}$$

Hodnota C souvisí s počáteční teplotou. Je-li například počáteční teplota $28^\circ\mathrm{C}$, dosadíme do vztahu pro T hodnoty $T = 28^\circ\mathrm{C}$ a $t = 0$ a ze vzniklé rovnice určíme C. Dostáváme takto podmínku

$$28 = 10e^0 + C,$$

která implikuje $C = 18^\circ\mathrm{C}$. Funkce udávající závislost teploty místnosti na čase je

$$T = \left(18 + 10e^{-0.01t}\right)\,{}^\circ\mathrm{C}.$$

Příklad. Na jednom z předchozích slidů jsme viděli, že křivka, která je přirozená pro nosné lano zavěšeného mostu, splňuje rovnici

$$y' = \frac{\mu g}{T}x.$$

Pouze za této podmínky bude lano namáháno ve směru své nejvyšší pevnosti, tj. v podélném směru, ve směru své osy. Integrací získáme

$$y = \int \frac{\mu g}{T}x\,\mathrm{d}x = \frac{\mu g}{2T}x^2 + C.$$

Lano tedy bude v každém bodě namáháno ve směru své osy pokud má tvar paraboly. Prohnutí paraboly (koeficient u x^2) je dáno hmotností mostu a tahem napínajícím lano.

Určitý integrál (Newtonův)

Představíme si mírnou modifikaci neurčitého integrálu. Rychlost změny nebudeme používat k hledání předpisu funkce, ale budeme hledat změnu funkce na zadaném intervalu.

Definice (Newtonův určitý integrál). Buď f funkce a F její primitivní funkce na intervalu I. Buď $[a,b]\subset I$ podinterval v I. *Určitým integrálem funkce f na intervalu $[a,b]$* rozumíme veličinu označenou a definovanou vztahem

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := F(b)-F(a).$$

Označení. Výraz $F(b)-F(a)$, tj. změnu funkce $F(x)$ na intervalu $[a,b]$, označujeme také $[F(x)]_a^b$. Tento zápis se často používá jako mezivýpočet při výpočtu určitého integrálu.

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1)^3-\frac{1}{3}(0)^3=\frac{1}{3}$$

Věta (linearita určitého integrálu). *Určitý integrál zachovává součet a násobení konstantou. Tedy pro libovolné funkce f, g a libovolnou konstantu c platí*

$$\int_a^b f+g\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x + \int_a^b g\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^b cf\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f\,\mathrm{d}x.$$

Snadným důsledkem definice určitého integrálu je následující věta.

Věta (záměna mezí a rovnost mezí v určitém integrálu). *Platí*

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aplikace určitého integrálu (změna teploty)

Příklad. Teplota klesá rychlostí $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -0.1e^{-0.01t}\,{}^\circ\mathrm{C/min}$. Neurčitý integrál

$$\int -0.1e^{-0.01t}\,\mathrm{d}t = 10e^{-0.01t}+C$$

jsme vypočítali v podkapitole s neurčitým integrálem. Potřebovali jsme ještě znát počáteční hodnotu teploty a našli jsme teplotu jako funkci času.

Nyní zapojíme určitý integrál. Nepotřebujeme informaci o počáteční teplotě, ale zato jsme schopni určit jenom změnu teploty za daný časový interval. Například za první hodinu bude změna teploty

$$\begin{aligned}\int_0^{60} -0.1e^{-0.01t}\,\mathrm{d}t &= \left[10e^{-0.01t}\right]_0^{60}\\ &= 10e^{-0.01\cdot 60}-10e^{-0.01\cdot 0}\\ &\approx -4.5^\circ\mathrm{C}.\end{aligned}$$

Za druhou hodinu bude změna teploty

$$\begin{aligned}\int_{60}^{120} -0.1e^{-0.01t}\,\mathrm{d}t &= \left[10e^{-0.01t}\right]_{60}^{120}\\ &= 10e^{-0.01\cdot 120}-10e^{-0.01\cdot 60}\\ &\approx -2.5^\circ\mathrm{C}.\end{aligned}$$

Online výpočet.

Další motivace

Ze středoškolské fyziky dobře známe vzorce pro dráhu, práci a tlakovou sílu. Ovšem jenom v extrémně pěkných případech.

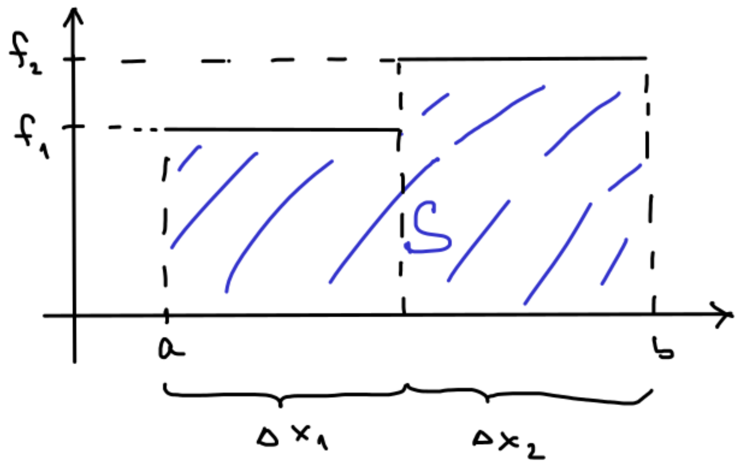
- Dráha rovnoměrného pohybu je určena vzorcem
$$s = vt. \tag{1}$$
Tento vzorec není použitelný pro pohyb proměnnou rychlostí. Z kapitoly o neurčitém integrálu víme, že obecný vzorec je
$$s = \int v\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$
Pokud je v konstantní, vzorec (1) je důsledkem vzorce (2).
- Hydrostatická tlaková síla F působící ve vodě v hloubce h na plochu o velikosti S se určí podle vztahu
$$F = Sh\rho g,$$
kde ρ je hustota vody a g tíhové zrychlení. Tento vzorec však není možné použít, pokud různé části plochy jsou v různých hloubkách. Například není možné pomocí tohoto vzorce určit celkovou sílu na svislou stěnu reprezentující hráz přehrady.
- Práce vykonaná konstantní silou F po dráze s je
$$W = Fs. \tag{3}$$

Co když se ale síla nebo dráha mění? Pokud nás zajímá práce nutná k navinutí visícího řetězu na rumpál, síla se během namotávání plynule zmenšuje, protože visící kus řetězu se při namotávání zkracuje. Pokud nás zajímá práce nutná k vyčerpání vodní nádrže, musíme každý litr vody, který je na dně, "tahat" po delší dráze než každý litr vody, který je na hladině a proto se mění dráha. Vzorec (3) selhává v obou případech. Jednou kvůli nekonstantní síle, podruhé kvůli dráze.

- Obsah obrazce mezi konstantní funkcí f a osou x nad intervalem $[a, b]$ se vypočte snadno, protože se jedná o obdélník se stranami f a $\Delta x = b - a$. Proto

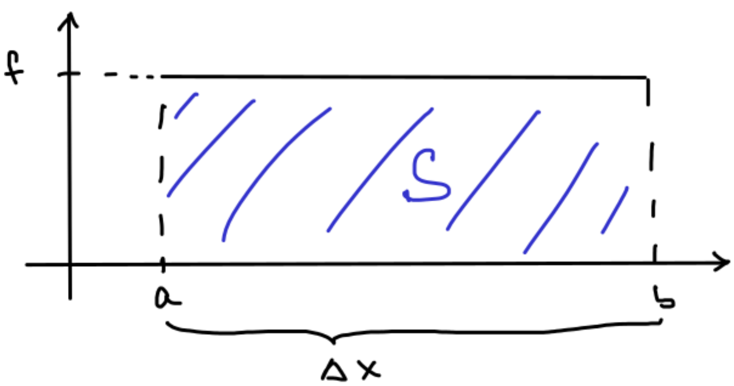
$$S = f \cdot \Delta x.$$

Tento přístup však není možné použít, pokud se funkce f na intervalu $[a, b]$ mění. Formálně je tato úloha stejná jako ostatní úlohy výše, má však snadnou geometrickou interpretaci. Právě tuto interpretaci využijeme v následujícím k definici druhého typu určitého integrálu (Riemannova).



Obrázek 4.2: *Obsah pod funkcí po částech konstantní.*

Určitý integrál (Riemannův)



Obrázek 4.1: *Obsah pod konstantní funkcí.*

Úloha 1. Snadným důsledkem vzorce pro obsah obdélníka je obsah obrazce mezi grafem konstantní funkce a osou x.

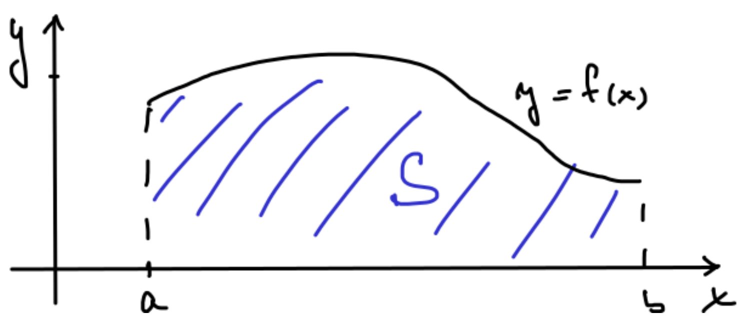
$$S = f \Delta x$$

Úloha 2. Obsah pod funkcí složené ze dvou konstantních funkcí napojených na sebe se vypočte jako součet obsahů dvou obdélníků.

$$S = f_1 \Delta x_1 + f_2 \Delta x_2$$

Toto se dá snadno zobecnit na libovolný počet intervalů a pro libovolnou po částech konstantní funkci.

Prostředky matematické analýzy je možné "zjemňovat dělení do nekonečna", přesněji, můžeme použít limitní přechod podobný limitnímu přechodu, který v definici derivace převedl podíl



Obrázek 4.3: *Obsah pod obecnou funkcí je* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(průměrnou rychlost) na derivaci (okamžitou rychlost). Díky tomu není nutné se omezovat na po částech konstantní funkce, ale postup bude fungovat i pro velmi obecné funkce. Výsledným produktem je Riemannův integrál.

Riemannův integrál je velmi názorný, ale poměrně obtížně se počítá, pokud postupujeme přímo podle definice. Pokud však je funkce v určitém smyslu pěkná (má primitivní funkci na intervalu, který uvnitř obsahuje interval $[a, b]$) jsou Riemannův a Newtonův integrál stejné. Proto mezi nimi nerozlišujeme, používáme jeden pojem **určitý integrál** a počítáme jej pomocí definice Newtonova integrálu. Obsah obrazce pod křivkou $f(x)$ je roven

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V teorii Riemannova integrálu má vzorec

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

postavení věty nazývané **Newtonova–Leibnizova věta** a je to věta udávající, jak vypočteme určitý integrál pomocí neurčitého. Zajímavé je, že v některých případech je vhodné postupovat naopak a určit neurčitý integrál pomocí integrálu určitého, což si ukážeme v následující přednášce.

Aplikace určitého integrálu (dráha)

1. Těleso pohybující se po dobu Δt konstantní rychlostí v po přímce urazí dráhu
$$s = v\Delta t.$$
2. Těleso pohybující se po dobu Δt_1 konstantní rychlostí v_1 po přímce a poté po dobu Δt_2 rychlostí v_2 urazí celkovou dráhu
$$s = v_1\Delta t_1 + v_2\Delta t_2.$$
Toto je možné zobecnit na libovolný pohyb skládající se z konečného počtu úseků, kdy se těleso pohybuje konstantní rychlostí.
$$s = v_1\Delta t_1 + v_2\Delta t_2 + \cdots + v_k\Delta t_k = \sum_{i=1}^{k} v_i\Delta t_i$$
Příspěvek za každou část pohybu, kdy je rychlost konstantní, je
$$\Delta s = v\Delta t,$$
kde v a Δt jsou příslušná rychlost a doba pohybu, po kterou je rychlost konstantní.
3. Pokud se rychlost mění spojitě a a a b jsou počáteční a koncový okamžik pohybu, platí
$$s = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aplikace určitého integrálu (tlaková síla)

Mojžíšův most (Holandsko, pevnost Fort de Roovere) je v celosvětovém měřítku unikátním mostem. Je postavený ze dřeva a zanořený do vodního příkopu okolo pevnosti tak, aby splýval s krajinou. Představme si zjednodušeně, že vodní masu drží svislá dřevěná stěna a budeme se snažit najít celkovou sílu působící na tuto stěnu tlakem vodní masy. (Ve skutečnosti most leží na dně a dno se zvedá směrem ke stěnám mostu. Google umí najít stavební plán mostu.) Délku mostu označíme L, výšku stěny (přesněji vzdálenost ode dna po hladinu vody) označíme H.

1. Tlaková síla na rovinnou plochu o obsahu S vyvolaná tlakem p je rovna
$$F = pS.$$
Tlak v hloubce h je dán vzorcem
$$p = h\rho g,$$
kde ρ je hustota vody a g tíhové zrychlení.
2. Myšlenkově rozdělíme celou stěnu na části. Tlaková síla na celou stěnu je rovna součtu tlakových sil, které působí na jednotlivé části. Má smysl volit části tak, aby na nich byl tlak konstantní. Myšlenkově tedy stěnu rozřežeme na vodorovné pásky.
3. Na myšlený vodorovný pás, který má výšku Δx a je v hloubce x, působí tlak $p = x\rho g$. Obsah pásu je podle vzorce pro obsah obdélníka $\Delta S = L\Delta x$. Celková síla působící na tento pás je
$$\Delta F = p\Delta S = L\rho g x\Delta x.$$
4. Celkovou sílu na celou stěnu najdeme sečtením všech příspěvků. Formálně
$$F = \sum L\rho g x\Delta x.$$
Protože těchto příspěvků je nekonečně mnoho, sečteme je integrálem
$$F = \int_0^H L\rho g x\,\mathrm{d}x.$$
5. Po výpočtu dostáváme
$$\begin{aligned} F &= \int_0^H L\rho g x\,\mathrm{d}x \\ &= L\rho g \int_0^H x\,\mathrm{d}x \\ &= L\rho g \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^H \\ &= L\rho g \left[\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2}0^2\right] \\ &= \frac{1}{2}LH^2\rho g. \end{aligned}$$

Tento vztah je stejný, jako kdyby na celou plochu o velikosti LH působila tlaková síla vyvolaná tlakem $\frac{1}{2}H\rho g$, tj. tlakem v poloviční hloubce.

Aplikace určitého integrálu (tok potrubím)

V předchozím příkladě jsme "krájeli" přehradu na vodorovné pásy, protože ve vodorovném směru byl konstantní parametr, který jsme potřebovali mít konstantní pro výpočet k celkovému příspěvku. V následujícím případě je obdobný parametr konstantní na kružnicích a proto budeme dělit a sčítat příspěvky pomocí mezikruží.

V potrubí o poloměru R teče viskozní tekutina tak, že uprostřed má maximální rychlost a u stěn nulovou. Rychlost ve vzdálenosti r od osy potrubí je dána vztahem

$$v(r) = v_{max}\frac{R^2 - r^2}{R^2}.$$

Střední rychlost dostaneme jako celkový tok potrubím dělený obsahem $S = \pi R^2$. Tok v případě konstantní rychlosti je součinem rychlosti a obsahu průřezu. V případě rychlosti nekonstantní rozdělíme průřez na části ΔS, na každé části určíme příspěvek k celkovému toku a poté vše sečteme, tj.

$$Q = \sum_{\text{průřez}} v(r)\Delta S$$

Protože rychlost závisí na r, je stejná na kružnicích a proto se jeví vhodné rozdělit průřez na mezikruží a sečíst přes poloměr těchto mezikruží. Budeme tedy integrovat přes proměnnou r. Vyjádření Q přepíšeme do tvaru

$$Q = \sum_{\text{průřez}} v(r)\frac{\Delta S}{\Delta r}\Delta r$$

a limitním přechodem se změní suma na integrál a podíl změn na derivaci, tj.

$$Q = \int_0^R v(r)\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = \int_0^R v_{max}\frac{R^2 - r^2}{R^2}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r.$$

Odsud pomocí $S = \pi r^2$, $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r$ dostáváme po vytknutí konstant, roznásobení závorek a integraci

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2\pi v_{max}}{R^2}\int_0^R (R^2 - r^2)r\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{2\pi v_{max}}{R^2}\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R \\ &= \frac{2\pi v_{max}}{R^2}\frac{R^4}{4} \\ &= \frac{v_{max}}{2}\pi R^2. \end{aligned}$$

Tok je tedy formálně stejný, jako by voda tekla v celém průřezu rychlostí poloviční ve srovnání s maximální rychlostí ve středu trubice. Proto je $\frac{v_{max}}{2}$ nazývána střední profilová rychlost průřezu.

(Volně podle Dana Říhová a Jana Marková, Poznámky k přednáškám z Hydrauliky, přednáška č. 3.)

Aplikace určitého integrálu (práce při čerpání vody)

Pokud potřebujeme vyčerpat vodu z rezervoáru, nádrže, rybníka nebo jezera, musíme ji dopravit za stěnu (za hráz, dostat na břeh, ...). Představme si, že po opadnutí vody v okolí Mojžíšova mostu zůstane uvnitř voda, kterou je potřeba vyčerpat. Tím se most proměnil v nádrž o hloubce H. Povrch hladiny ve chvíli, kdy je voda x jednotek délky pod okrajem mostu označme S. (Pro nádrž ve tvaru kvádru by S bylo konstantní a rovno obsahu dna.)

1. Pro vyzvednutí tělesa o hmotnosti m o výšku h musíme vykonat práci $W = mgh$, abychom vykompenzovali nárůst potenciální energie.
2. Vodu v nádrži rozdělíme na vodorovné vrstvy o výšce Δx. Hmotnost vrstvy o výšce Δx v hloubce x pod okrajem nádrže bude $\Delta m = S\Delta x\rho$ a abychom vodu dostali přes okraj, musíme vykonat práci

   $$\Delta W = \Delta mgx = S\Delta x\rho gx.$$

3. Celková práce na vyčerpání vody se vypočte jako součet jednotlivých příspěvků. Spojitě se měnící veličinu sčítáme integrálem, což vede na vztah

   $$W = \int_0^H S\rho gx\,\mathrm{d}x = \rho g\int_0^H Sx\,\mathrm{d}x.$$

4. Pro nádrže ve tvaru kvádru by veličina S byla konstantní a integrál by vycházel

   $$W = S\rho g\int_0^H x\,\mathrm{d}x = S\rho g\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^H = S\rho g\frac{1}{2}H^2 = (SH\rho)g\frac{1}{2}H.$$

   Výraz $SH\rho$ je celková hmotnost. Práce je tedy stejná, jako kdybychom těleso o stejné hmotnosti jako je hmotnost vodní masy zvedli z poloviční hloubky pod hladinou na úroveň hladiny. Je to stejná práce, jakou bychom vykonali, kdyby všechna voda byla stlačena v těžišti a my bychom tuto vodu zvedli na úroveň okraje nádrže.

Aplikace určitého integrálu (moment setrvačnosti tyče nebo trámu)

- Kinetická energie tělesa o hmotnosti m pohybujícího se posuvným pohybem rychlostí v je dána vztahem $E = \frac{1}{2}mv^2$. Kinetická energie tělesa o momentu setrvačnosti J pohybujícího se otáčivým pohybem úhlovou rychlostí ω je dána vztahem $E = \frac{1}{2}J\omega^2$. Odsud vidíme, že energie potřebná k vyvolání rotačního pohybu je úměrná momentu setrvačnosti. Moment setrvačnosti je tedy jakousi mírou odolnosti tělesa vůči silám, které se jej snaží uvést do rotačního pohybu. Zjednodušeně, větší moment setrvačnosti znamená, že těleso je stabilnější.
- Moment setrvačnosti hmotného bodu o hmotnosti m vzhledem k ose otáčení vzdálené r od tohoto bodu je $J = mr^2$. Pro soustavu hmotných bodů stačí příspěvky sečíst. Pro případ tělesa se spojitě rozloženou hmotností bychom museli "sečíst nekonečně mnoho nekonečně malých příspěvků" a proto sčítáme integrálem.

Budeme studovat rotaci tyče o hmotnosti m a délce L okolo osy kolmé k tyči. Nechť je tyč položena podél osy x a rotuje okolo osy y. Kousek tyče o délce Δx má hmotnost $\frac{\Delta x}{L}m$ a pokud je jeho vzdálenost od osy y rovna x, příspěvek k celkovému momentu setrvačnosti je

$$\Delta J = \frac{\Delta x}{L}mx^2 = \frac{m}{L}x^2\Delta x.$$

Celkový moment setrvačnosti je dán integrálem, ale závisí na poloze tyče vzhledem k ose otáčení.

1. Pro tyč umístěnou levým koncem v počátku dostáváme moment vzhledem k ose procházející koncem tyče ve tvaru
$$J = \int_0^L \frac{m}{L}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{m}{L}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^L = \frac{m}{L}\frac{1}{3}L^3 = \frac{1}{3}mL^2.$$
2. Pro tyč umístěnou středem v počátku dostáváme moment vzhledem k ose procházející středem ve tvaru
$$\begin{aligned} J &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{m}{L}x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{m}{L}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{m}{L}\left[\frac{1}{3}\frac{L^3}{8} - \frac{1}{3}(-1)^3\frac{L^3}{8}\right] \\ &= \frac{1}{12}mL^2. \end{aligned}$$

Závěr.

- Na roztočení tyče okolo konce je potřeba více energie, než na roztočení okolo středu. Čtyřikrát více. (Z praxe víme, že s dlouhým žebřem se manipuluje nejlépe, pokud jej držíme uprostřed.)
- Tyč o konstantní délkové hustotě τ (dané použitým průřezem a materiálem) má hmotnost $m = \tau L$ a moment setrvačnosti vzhledem ke středu
$$J = \frac{1}{12}\tau L^3.$$

Vidíme, že moment setrvačnosti roste dramaticky při zvětšování délky, s třetí mocninou. Proto provazochodci nosí na laně dlouhou tyč a proto při extrémních výkonech, jako je přechod Grand Canyon, bývá použita extrémně dlouhá tyč (pro Grand Canyon 9.1 metrů a 20 kilogramů, viz Nik Wallenda).

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Někdy máme zadánu rychlost, s jakou se mění veličina a potřebujeme znát funkční předpis pro tuto veličinu, tj. hodnotu v libovolném čase. To je úloha inverzní k derivaci a řeší ji neurčitý integrál.
- Při zadané rychlosti změny není možné bez zadání výchozího stavu určit hodnotu veličiny, která se mění. Je možné vypočítat jenom změnu této veličiny za určitý časový úsek (Newtonův určitý integrál) anebo je řešení dáno až na počáteční stav vyjádřený integrační konstantou v neurčitém integrálu.
- Někdy potřebujeme veličinu, která nás zajímá, najít posčítáním nekonečně mnoha příspěvků. Toto je v situaci, kdy se "za běhu" mění parametry úlohy, například se během pohybu mění rychlost pohybu. V tomto případě používáme Riemannův určitý integrál, který je definovaný jinak než Newtonův, ale v prakticky zajímavých úlohách se počítá stejně.
- Další aplikací procesu opačného k derivování je úloha, kdy jsou vlastnosti křivky popsány pomocí derivace a hledáme rovnici pro tuto křivku. Příkladem jsou úlohy ve stavitelství a studiu materiálu (ohybová čára nosníku).

Kapitola 5

Integrály pro pokročilé

Naučili jsme se integrovat pomocí neurčitého a určitého integrálu. Neurčitý integrál vyjadřuje funkční hodnotu vypočítanou z akumulace okamžitých změn. Z principiálních důvodů není možné, pokud je zadána pouze rychlost změny, určit celou veličinu, ale jenom její změnu. Proto je neurčitý integrál dán jednoznačně až na aditivní konstantu. Velikost změny na zadaném intervalu je dána určitým integrálem, ke kterému je možné dospět i geometricky a fyzikálně názorným způsobem představeným v definici Riemannova integrálu. Ten otevírá možnost rozšířit platnost mnoha fyzikálních vzorců na případ, kdy parametry úlohy nejsou konstantní. Dokážeme tak počítat dráhu pohybu proměnnou rychlostí, tlak vody na plochu ponořenou napříč různými hloubkami a podobně.

V následujícím textu rozvineme některé poznatky o integrálu, odvodíme si některé pokročilejší metody pro výpočet, ukážeme si, že každá spojitá funkce má primitivní funkci a také otevřeme cestu k definování funkcí, které nejsou elementární.

Vlastnosti integrálu

Z minulé přednášky víme, že integrál (určitý i neurčitý) je lineární, tj. zachovává součet funkcí a násobení konstantou.

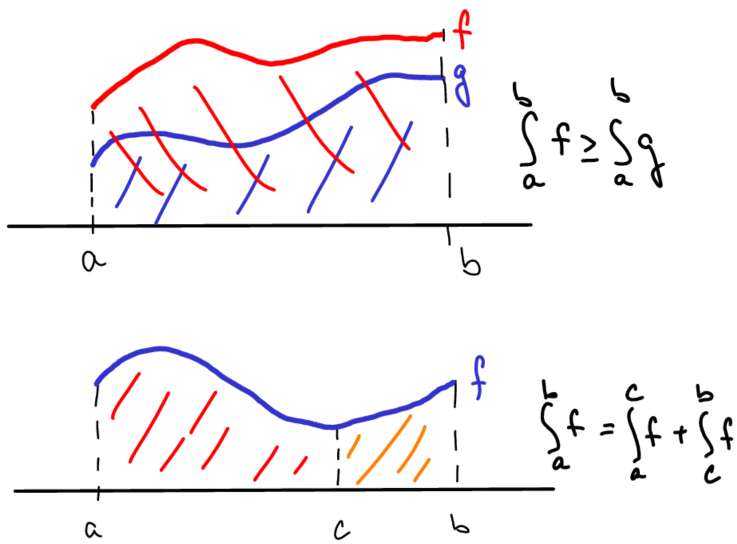
Následující dvě věty nejsou překvapivé. Vyjadřují dvě intuitivně zřejmá fakta.

- Pokud se veličina mění rychleji, výsledná změna je větší.
- Pokud sledujeme změnu veličiny za určitý čas, můžeme sledovat změnu do nějakého mezičasu a poté od mezičasu do konce a obě částečné změny poté sečíst.

Je však důležité vědět, že tyto myšlenky platí pro libovolné integrovatelné funkce a proto zformulujeme následující věty.

Věta (monotonie vzhledem k funkci). *Je-li $f(x) \geq g(x)$ na intervalu $[a, b]$, platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$



Obrázek 5.1: *Monotonie a aditivia vzhledem k mezi pro určitý integrál.*

Důsledek. *Integrál nezáporné funkce je nezáporný.*

Věta (aditivita vzhledem k integračnímu oboru). *Platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta o aditivitě vzhledem k integračnímu oboru je například pro Newtonovu definici integrálu důsledkem zřejmého vztahu

$$[F(b) - F(c)] + [F(c) - F(a)] = F(b) - F(a)$$

pro libovolnou primitivní funkci F. Graficky i fyzikálně je názorný případ, kdy c leží v intervalu $[a, b]$. Vzorec však platí pro libovolné uspořádání mezí podle velikosti.

Střední hodnota

Určitou souvislost s monotonií vzhledem k funkci má otázka, zda je možné funkci definovanou na intervalu $[a, b]$ nahradit funkcí konstantní tak, aby obě funkce měly stejný integrál. V praxi to znamená, že bychom například při pohybu tělesa časový průběh rychlosti nahradili jednou hodnotou takovou, že dráha za daný čas bude stejná. To je přesně to, co známe z běžného života jako definici průměrné rychlosti. Je to současně i návod pro následující rozšíření pojmu průměrná rychlost na libovolné integrovatelné funkce. Jedná se vlastně o jakousi průměrnou hodnotu, při které ale nepočítáme průměr z konečného počtu hodnot, ale z hodnot rozložených spojitě na zadaném intervalu.

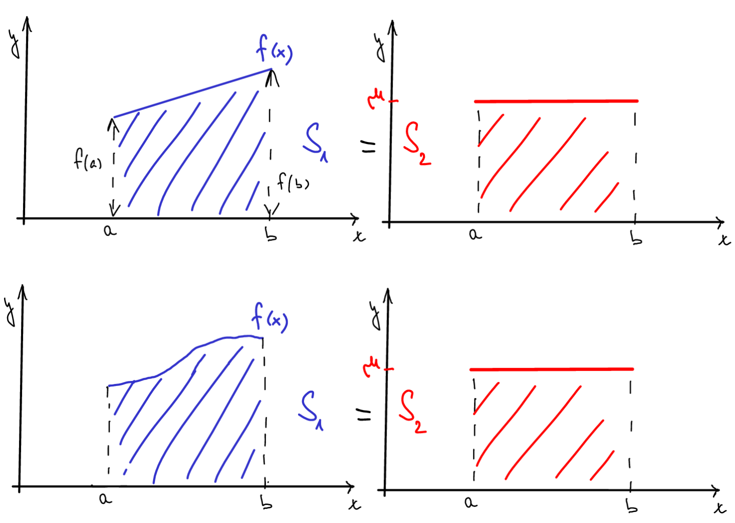
Definice střední hodnoty je snadným důsledkem toho, že hledáme hodnotu μ s vlastností

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mu\,\mathrm{d}x = \mu \int_a^b \mathrm{d}x = \mu(b-a).$$

Definice (střední hodnota). Nechť f je funkce definovaná a integrovatelná na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Číslo μ definované vztahem

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

se nazývá *střední hodnota* funkce f na intervalu $[a, b]$.



Obrázek 5.2: *Střední hodnota lineární a obecné funkce.*

Geometricky je střední hodnota výška obdélníka, který má jednu stranu tvořenou intervalem $[a, b]$ a obsah je roven integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pokud je funkce $f(x)$ kladná a lineární, je tento integrál roven obsahu lichoběžníka o základnách $f(a)$ a $f(b)$ a výšce $b - a$. Tedy

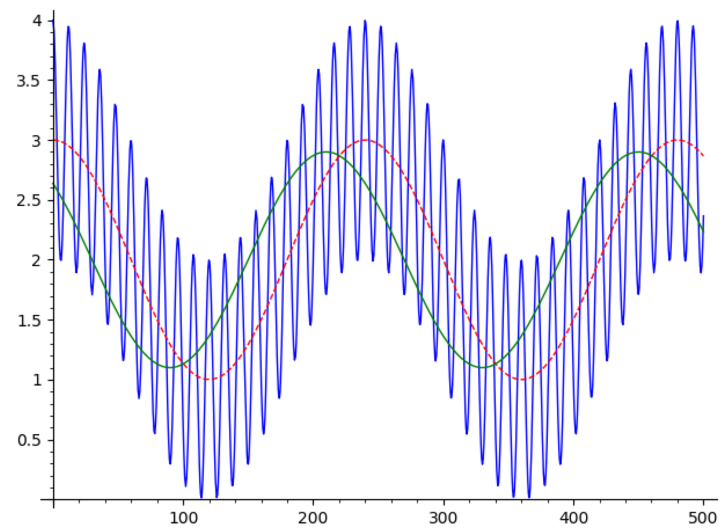
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

a střední hodnota lineární funkce je tedy průměrem hodnoty na začátku a na konci intervalu.

Příklad. Střední hodnota funkce $y = 2x^2 - 1$ na intervalu $[0, 2]$ je

$$\frac{1}{2}\int_0^2 2x^2 - 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^3 - x\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}8 - 2 - 0\right] = \frac{5}{3}.$$

Online výpočet.



Obrázek 5.3: *Graf počtu nemocných chřipkou. Čárkovaně je dlouhodobý trend, okolo kterého počet nemocných osciluje s krátkou periodou. Zelená plná křivka je pětiletý průměr začínající v daném roce. Minimum této křivky je vhodný okamžik pro začátek plošné vakcinace.*

Příklad. (Podle Leah Edelstein-Keshet: Integral Calculus with Applications to the Life Sciences). Health Canada dlouhodobě monitoruje chřipku. Ze získaných dat vyplývá, že u této nemoci existuje sezonní cyklus s krátkou periodou a dlouhodobý dvacetiletý cyklus s dlouhou periodou. Je-li t čas v měsících, je počet nemocných (ve stotisících jedinců) dobře aproximován funkcí

$$I(t) = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{120}t\right) + 2.$$

Health Canada má snahu chřipku eliminovat z populace očkováním. Odhaduje se, že je nutné pětileté období intenzivní vakcinace. Pro co nejnižší náklady je vhodné vakcinaci začít v období, kdy je virus na pětiletém minimu. Střední hodnota za pětileté období počínající časem t_0 je

$$\overline{I}(t_0) = \frac{1}{12\times 5}\int_{t_0}^{t_0+12\times 5} I(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pro výpočet minima funkce $\overline{I}(t_0)$ je nutné umět derivovat funkce, které jsou vyjádřeny integrálem a proměnná je v mezi tohoto integrálu. To se naučíme v dalších částech přednášky a poté se k tomuto příkladu vrátíme.

Online výpočet.

Numerická aproximace určitého integrálu

Následující myšlenka se si týká výlučně určitého integrálu, ale dále v dnešní přednášce si představíme nástroj, který umožní ji použít i pro integrál neurčitý.

Někdy se stane, že neumíme nebo nepotřebujeme určitý integrál vypočítat přesně. Nebo že ani nemáme dostatek informací pro přesný výpočet, například funkce může být známa jenom v několika bodech, které jsou výsledkem měření a mimo tyto body nejsou žádné informace o funkčních hodnotách. To je přesně situace pro numerickou aproximaci určitého integrálu. Mechanický model základních myšlenek aproximace je shrnut v několika následujících bodech.

- Představme si, že máme určit dráhu pohybu, ale v zadaném časovém intervalu máme pouze několik záznamů hodnoty rychlosti z tachometru.
- Mimo tyto záznamy se mohlo dít v podstatě cokoliv. Budeme však doufat, že rychlost se měnila spíše pozvolna.
- Základní taktika odhadu dráhy může být taková, že mezi každými zaznamenanými hodnotami rychlosti na tachometru nahradíme pohyb rovnoměrným pohybem rychlostí, která je průměrem krajních hodnot.
- Předchozí postup aplikovaný na libovolnou funkci odpovídá tomu, že mezi každými dvěma hodnotami nahradíme funkci funkcí lineární a poté integrál vypočítáme pro tuto lineární funkci. Tento postup (lichoběžníkové pravidlo) je možné modifikovat nebo vylepšit. Například je možné použít pro aproximaci části parabol místo přímek (Simpsonovo pravidlo). U funkce, která je rostoucí, je možné například použít funkční hodnotu v dolní mezi a tím dostaneme dolní odhad pro výsledný integrál.

Příklad. Zahradnická firma vytáhla pařez a malotraktorem jej odtáhla o 20 metrů bokem. Vzhledem k nepravidelnému tvaru a tažení po různých druzích povrchu po cestě se síla měnila. Pracovníkovi se podařilo odhadnout sílu během pohybu. Závislost síly na dráze zachycuje následující tabulka.

s[m]	0	5	10	15	20
F[kN]	2.3	1.5	2.1	3.1	2.0

Odhadneme celkovou vykonanou práci.

$$\begin{aligned}W &= 5\frac{2.3+1.5}{2} + 5\frac{1.5+2.1}{2} + 5\frac{2.1+3.1}{2} + 5\frac{3.1+2.0}{2}\\ &= 44.25\,\mathrm{kN\,m}\\ &= 44.25\,\mathrm{kJ}\end{aligned}$$

Poznámka. V předchozím příkladě byla funkce dána v pravidelných intervalech. Proto se ve všech členech objevuje faktor $\frac{5}{2}$, který je možné vytknout. Po vytknutí zůstane v závorce součet, kde se hodnoty funkce v dolní a horní mezi objeví jednou a ostatní dvakrát. To v obecném případě vede k následujícímu vzorci.

Věta (lichoběžníkové pravidlo). *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$. Rozdělme interval $[a,b]$ na n intervalů stejné délky h, tj. platí $h=\frac{b-a}{n}$. Krajní body těchto intervalů označme po řadě x_0, x_1, $\dots$, x_n a jim odpovídající funkční hodnoty funkce f po řadě y_0, y_1, $\dots$, y_n. Platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\Big(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n\Big).$$

Integrace metodou per partés

Metoda per partés je metoda odvozená z derivace součinu. Nechť u a v jsou funkce, mající derivace u' a v'. Snadným důsledkem derivace součinu

$$(uv)' = u'v + uv'$$

je

$$uv' = (uv)' - u'v.$$

Integrací tohoto vztahu dostáváme následující tvrzení.

Věta (metoda per partés pro neurčitý a určitý integrál). *Nechť u a v jsou funkce proměnné x, mající spojité derivace u' a v'. Platí*

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$$

pro neurčitý integrál a

$$\int_a^b uv'\,\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,\mathrm{d}x$$

pro integrál určitý.

Použití této metody má smysl, pokud je integrál $\int u'v\,\mathrm{d}x$ jednodušší pro výpočet ve srovnání s integrálem $\int uv'\,\mathrm{d}x$. Typické situace pro integrování metodou per partés jsou následující.

1. $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$, $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$, $\int xe^x\,\mathrm{d}x$
2. Mírné obměny integrálů z předchozího bodu, kdy místo x může být libovolný polynom a goniometrická nebo exponenciální funkce má lineární vnitřní složku.
3. $\int x^k\ln x\,\mathrm{d}x$

Příklad. Volbou
$$\begin{aligned} u &= x & u' &= 1 \\ v' &= e^x & v &= e^x \end{aligned}$$
můžeme vypočítat integrál
$$\int xe^x \,\mathrm{d}x = xe^x - \int 1e^x \,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + c.$$

Příklad. Volbou
$$\begin{aligned} u &= \ln x & u' &= \frac{1}{x} \\ v' &= 1 & v &= x \end{aligned}$$
můžeme vypočítat integrál
$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x\ln x - \int \frac{1}{x} x \,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1 \,\mathrm{d}x = x\ln x - x + c.$$

Integrace substituční metodou

Substituční metoda je metoda odvozená z derivace složené funkce
$$[u(v(x))]' = u'(v(x))v'(x),$$
což dává
$$u(v(x)) = \int u'(v(x))v'(x) \,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Označme $u'(x) = f(x)$, tj. $u(x) = \int f(x) \,\mathrm{d}x$. Označíme-li dále $v(x) = t$, platí
$$u(v(x)) = u(t) = \int f(t) \,\mathrm{d}t.$$

Přeznačme ještě $v(x)$ na $\varphi(x)$. Potom má (1) po záměně levé a pravé strany tvar uvedený v následující větě.

Věta (substituční metoda pro neurčitý integrál). *Platí*
$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}x = \int f(t) \,\mathrm{d}t, \tag{2}$$
kde po výpočtu integrálu napravo dosazujeme $t = \varphi(x)$.

Formálně výraz napravo ve (2) přejde ve výraz nalevo a naopak dosazením rovností
$$\varphi(x) = t, \qquad \varphi'(x) \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t.$$

Toto je současně i návod, jak substituční metodu použít prakticky.

Příklad. Substituce $x^2 = t$ vede na vztah mezi diferenciály ve tvaru $2x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Odsud
$$\int xe^{x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int e^t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$$

Příklad. Substituce $f(x) = t$ vede na vztah mezi diferenciály ve tvaru $f'(x) \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Odsud
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t = \ln|t| = \ln|f(x)| + c.$$

Například
$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+1} \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + c. \end{aligned}$$

Příklad. Substituce $ax + b = t$ vede na vztah mezi diferenciály ve tvaru $a \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Odsud je možné odvodit vzorec, který již známe pro integrál funkce s lineární vnitřní složkou. Vskutku, platí
$$\int f(ax+b) \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a} f(t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{a} F(t) = \frac{1}{a} F(ax+b) + C,$$
kde $F(x) = \int f(x) \,\mathrm{d}x$.

Vztah (2) je základní vztah pro substituci v neurčitém integrálu. Používáme jej ve vhodných případech zprava doleva i zleva doprava. Variantu pro určitý integrál jsme viděli ve speciálním případě ve cvičení, kdy vnitřní funkce reprezentovala konstantní násobek. Viděli jsme přirozeným způsobem, že při substituci (vyjádření v jiných jednotkách) se s integrovanou funkcí se mění i meze. Obecný vzorec pro integrování určitého integrálu substituční metodou je v následující větě.

Věta (substituční metoda pro určitý integrál). *Platí*
$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) \,\mathrm{d}t.$$

Meze tedy podléhají stejné transformaci, jako integrovaná proměnná. Pokud používáme substituci $t = \varphi(x)$, potom v dolní mezi pro $x = a$ platí $t = \varphi(a)$. Podobná situace je i v mezi horní.

Integrál jako funkce meze

Integrál může být součástí definice funkce. Tím se můžeme dostat mimo množinu elementárních funkcí a značně tak rozšířit třídu funkcí, se kterými umíme pracovat.

Věta (integrál jako funkce horní meze). *Buď f spojitá funkce na intervalu I a $a \in I$. Funkce $F(x)$ definovaná vztahem*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

má na intervalu I derivaci a platí $F'(x) = f(x)$, tj. $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$.

Příklad. Pro funkci $f(x) = x^2$ platí

$$\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}$$

což je skutečně jedna z primitivních funkcí k funkci x^2, jak již víme z přednášky o neurčitém integrálu.

Věta o integrálu jako funkci horní meze dokonce udává tvar primitivní funkce pro libovolnou spojitou funkci. Tím dostáváme okamžitě následující tvrzení.

Důsledek (postačující podmínka existence primitivní funkce). *Ke každé spojité funkci existuje neurčitý integrál.*

Bohužel, ne vždy neurčitý integrál dokážeme efektivně najít. Zatímco problém nalezení derivace funkce složené z funkcí, které umíme derivovat, spočívá pouze ve správné aplikaci vzorců pro derivování, problém nalézt neurčitý integrál i k funkci tak jednoduché, jako je například e^{-x^2} je neřešitelný ve třídě elementárních funkcí. Totéž platí pro další "nevinně vyhlížející" funkce jako $\int \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ nebo $\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. Věta o integrálu jako funkci horní meze nabízí možnost zapsat primitivní funkci vztahem

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = c + \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Funkční hodnoty takové funkce můžeme určovat například tak, že integrál aproximujeme numericky.

Následující ukázka demonstruje, že i s funkcí definovanou pomocí integrálu je možné jistým způsobem pracovat, aniž bychom měli k dispozici analytické vyjádření této funkce.

Ukázka funkce definované pomocí integrálu

Uvažujme funkci definovanou vztahem

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Ukážeme si, že tento tvar umožňuje odvodit některé vlastnosti funkce f. Dokážeme například, že funkce f mění násobení na sčítání, tj. že platí

$$f(ab) = f(a) + f(b).$$

Podle definice je

$$f(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Podle aditivity vzhledem k integračnímu oboru platí

$$f(ab) = \int_1^a \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = f(a) + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t. \qquad (**)$$

Ve druhém integrálu bychom potřebovali dostat jedničku v dolní mezi, abychom dostali integrál stejný jako v definici funkce f. Proto zavedeme substituci $\frac{t}{a} = s$, $t = sa$, $\mathrm{d}t = a\mathrm{d}s$. S použitím této substituce se (**) transformuje na

$$f(ab) = f(a) + \int_1^b \frac{1}{sa} a\,\mathrm{d}s = f(a) + \int_1^b \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = f(a) + f(b).$$

Pokud si všimneme, že integrál (*) v definici funkce f je možné vypočítat a že funkce f je vlastně funkce $\ln x$, není vlastnost, že funkce mění násobení na sčítání nijak překvapivá. Pro nás však bylo důležité, že v důkaze jsme použili jenom definici funkce f pomocí integrálu a pravidla pro práci s integrály. Nemuseli jsme nijak používat ani vlastnosti logaritmu, ani vlastnosti funkce k logaritmu inverzní, což bývá základem středoškolského odvození tohoto vzorce. Vidíme, že integrál je možné použít k definici funkce a s touto funkcí je možné dále pracovat. Substituce $t^{\frac{1}{r}} = s$, $t = s^r$, $\mathrm{d}t = rs^{r-1}\,\mathrm{d}s$ například ukáže, že platí

$$f(a^r) = \int_1^{a^r} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^a \frac{1}{s^r} rs^{r-1}\,\mathrm{d}s = r\int_1^a \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = rf(a).$$

Model eliminace chřipky

V příkladě u střední hodnoty jsme se zabývali problémem eliminace chřipky a zjistili, že potřebujeme najít minimum funkce

$$\overline{I}(t_0) = \frac{1}{12\times 5}\int_{t_0}^{t_0+12\times 5} I(t)\,\mathrm{d}t.$$

Protože jsme se zabývali případem, kdy je proměnná jenom v horní mezi a naše funkce má proměnnou v horní i v dolní mezi, můžeme využít aditivitu integrálu vzhledem k mezi a psát

$$\begin{aligned}\overline{I}(t_0) &= \frac{1}{12\times 5}\int_{t_0}^{0} I(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12\times 5}\int_0^{t_0+12\times 5} I(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{60}\int_0^{t_0} I(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{60}\int_0^{t_0+60} I(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Derivací podle t_0 nyní dostáváme podle věty o integrálu jako funkci horní meze a podle pravidla o derivování součtu a složené funkce

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overline{I}}{\mathrm{d}t_0} &= -\frac{1}{60}I(t_0) + \frac{1}{60}I(t_0+60)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}(t_0+60)\\ &= -\frac{1}{60}I(t_0) + \frac{1}{60}I(t_0+60)\\ &= \frac{1}{60}\Big(I(t_0+60) - I(t_0)\Big)\end{aligned}$$

Minimum tedy najdeme z podmínky $I(t_0) = I(t_0+60)$. Po dosazení vztahu pro funkci I tedy řešíme rovnici

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{120}t\right) + 2 = \cos&\left(\frac{\pi}{6}(t+60)\right)\\ &+ \cos\left(\frac{\pi}{120}(t+60)\right) + 2\end{aligned}$$

tj. (následující výpočty jsou sice dlouhé, ale jedná se běžnou středoškolskou matematiku a práci s goniometrickými funkcemi)

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{120}t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}t + 10\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{120}t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{120}t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{120}t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{120}t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{120}t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{120}t\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{120}t\right)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{120}t\right) = -1$$

Tato rovnice má řešení $\frac{\pi}{120}t = \frac{3}{4}\pi + k\pi$ tj. $t = 90 + 120k$. Vzhledem k povaze problému se střídají maxima a minima funkce $\overline{I}(t_0)$. Toto je ještě nutné rozvážit, abychom s očkováním nezačali v době, kdy by byly náklady naopak maximální. Vzhledem ke snadné praktické interpretaci je však zřejmé, že minimum pětiletého průměru bude v době, jejíž začátek o něco předchází dlouhodobé minimum výskytu chřipky. Odsud snadno rozlišíme, kdy se jedná o minimum pětiletého průměru a kdy o maximum.

Práce při vytahování řetězu (přímý výpočet)

Ze střechy budovy o výšce 50 metrů visí řetěz dlouhý 30 metrů. Jeden metr řetězu váží dva kilogramy. Vypočítáme práci potřebnou pro povytažení řetězu o deset metrů a poté práci potřebnou pro úplné vytažení řetězu.

Z fyziky víme, že na těleso o hmotnosti m působí síla F daný vztahem

$$F = mg,$$

kde g je tíhové zrychlení a že práce W konaná silou F po dráze s je rovna součinu

$$W = Fs.$$

Pokud z budovy visí h metrů řetězu o lineární hustotě $\tau = 2\,\mathrm{kg/m}$, je nutné při vytahování řetězu zvedat těleso o hmotnosti $h\tau$, tj. vyvinout sílu

$$F = h\tau g.$$

Při vytahování řetězu se délka visící části zkracuje a změna délky Δh je záporná. Při povytažení řetězu o délku $|\Delta h| = -\Delta h$ je nutné vykonat práci

$$\Delta W = F|\Delta h| = -h\tau g\Delta h.$$

Při povytažení o 10 metrů řetěz vytahujeme spojitě od $h_1 = 30$ po $h_2 = 20$. Celková práce je

$$\begin{aligned}W = \int_{h_1}^{h_2} -h\tau g\,\mathrm{d}h &= \tau g\int_{h_2}^{h_1} h\,\mathrm{d}h = \tau g\left[\frac{1}{2}h^2\right]_{h_2}^{h_1}\\ &= \tau g\left[\frac{1}{2}h_1^2 - \frac{1}{2}h_2^2\right] = \frac{1}{2}\tau g(h_1^2 - h_2^2)\\ &= \frac{1}{2}\tau g(h_1-h_2)(h_1+h_2).\end{aligned}$$

Pro $\tau = 2\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ a $g = 9.81\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$ dostáváme $W = 4905\,\mathrm{J}$. Formálně je tento výsledek stejný, jako bychom hmotnost dolních $h_1 - h_2$ metrů řetězu soustředili do středu tohoto úseku (tedy do úrovně $\frac{1}{2}(h_1+h_2)$ metrů pod střechu) a poté tento hmotný bod přemístili konstantní silou po dráze $\frac{1}{2}(h_1+h_2)$ na střechu.

Práci pro vytažení celého řetězu dostaneme volbou $h_2 = 0$. Tedy

$$W = \frac{1}{2}\tau g h_1^2$$

a numericky $W = 8829\,\mathrm{J}$. Protože vytáhnout první třetinu nejtěžší, očekáváme, že práce potřebná pro vytažení celého řetězu bude menší než trojnásobek práce nutné pro povytažení o třetinu. Toto se přirozeně potvrzuje porovnáním numerických hodnot.

Online výpočet.

Řetěz jinak (pomocí změny potenciální energie)

Vypočítáme předchozí příklad tak, že určíme změnu potenciální energie řetězu. Práci W vykonanou při vyzvednutí tělesa o hmotnosti m o výšku h vypočteme jako změnu potenciální energie v tíhovém poli Země, tj.

$$W = mgh.$$

Komplikace v tomto případě je, že každou část řetězu vytahujeme z jiné hloubky. Část řetězu délky Δh váží $m = \tau \Delta h$ kilogramů a při vytažení z hloubky h na úroveň střechy je změna potenciální energie (a vykonaná práce)

$$\Delta W = mgh = \tau \Delta h g h.$$

Součet těchto příspěvků pro dolní třetinu řetězu, od $h_2 = 20\,\mathrm{m}$ po $h_1 = 30\,\mathrm{m}$ je

$$W = \int_{h_2}^{h_1} \tau g h \,\mathrm{d}h = \tau g \int_{h_2}^{h_1} h \,\mathrm{d}h.$$

Tím výpočet přechází ve stejný integrál jako v předchozím přístupu a výsledky jsou tedy stejné. Práci pro celý řetěz získáme opět volbou $h_2 = 0$.

Že práce vykonaná při vytažení celého řetězu je stejná jako změna potenciální energie celého řetězu je zřejmé. Za zmínku ještě stojí úvaha, proč je povytažení řetězu o 10 metrů ekvivalentní změně potenciální energie dolních 10 metrů při vytažení této části řetězu na střechu. Stačí uvážit, že bychom řetěz přetočili vzhůru nohama, povytáhli o 10 metrů, rozpojili a visící část znovu otočili vzhůru nohama. Otočení vzhůru nohama není spojeno s konáním práce, stejně tak rozpojení a případné opětovné napojení. Práce se tedy koná jenom tak, že řetěz vytahujeme o 10 metrů. Výsledek však je stejný, jako kdybychom řetěz nepřetáčeli, jenom odpojili dolních 10 metrů a tuto část zvedli nahoru.

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Naučili jsme se některé triky pro integrály: určitý integrál se dá numericky aproximovat a neurčitý integrál se dá převést metodou per-partés nebo substitucí na jiný integrál, v optimálním případě na integrál vhodný pro aplikaci vzorců.
- Integrál, resp. střední hodnota funkce, slouží jako náhrada aritmetického průměru v situacích, kdy počítáme průměr z nekonečně mnoha veličin a vzorec pro klasický aritmetický průměr selhává.
- Integrál je také nástrojem, který nás dokáže vymanit ze světa elementárních funkcí a můžeme pomocí tohoto integrálu definovat funkce, které nejsou elementární. Základním prostředkem je integrál jako funkce horní meze. Toto se využívá například ve statistice. Vedlejším produktem je věta zaručující existenci primitivní funkce pro libovolnou spojitou funkci.

Kapitola 6

Diferenciální rovnice

Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice, kde vystupuje neznámá funkce a její derivace. Setkáváme se s ní například všude tam, kde rychlost růstu nebo poklesu veličiny souvisí s její velikostí. Například rychlost s jakou se mění teplota horkého tělesa je funkcí teploty samotné. Rychlost tepelné výměny mezi dvěma tělesy je totiž úměrná rozdílu jejich teplot (Newtonův zákon). Takto se přirozeně diferenciální rovnice objevují v modelech nejrůznějších dějů jevů. Podstatu děje, který modelujeme, musí dodat fyzika, biologie nebo jiná aplikovaná věda. To v matematice obsaženo není. Matematika poté poslouží k analýze, jaké jsou pozorovatelné důsledky a tím se ověří, jestli příslušná aplikovaná věda správně vystihuje podstatu modelovaného děje.

Definice (diferenciální rovnice). *Obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu rozřešenou vzhledem k derivaci* (stručněji též diferenciální rovnicí, DR) s neznámou y rozumíme rovnici tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x, y) \tag{1}$$

kde φ je funkce dvou proměnných.

(anglicky ordinary differential equation, ODE)

Další formy zápisu rovnice (1) jsou

$$y' = \varphi(x, y),$$
$$\mathrm{d}y = \varphi(x, y)\mathrm{d}x,$$
$$\mathrm{d}y - \varphi(x, y)\mathrm{d}x = 0.$$

Příklad. Najděte všechny funkce splňující $y' = 2xy$. (Naučíme se řešit později.)

Diferenciální rovnice udává scénář vývoje systému. K jednoznačnému předpovězení budoucího stavu je ovšem nutno znát nejenom, jaký mechanismus ovlivňuje vývoj systému, ale také stav současný.

Definice (počáteční podmínka, Cauchyova úloha). Nechť x_0, y_0 jsou reálná čísla. Úloha najít řešení rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x, y), \tag{1}$$

které splňuje zadanou *počáteční podmínku*

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

se nazývá *počáteční* (též *Cauchyova*) *úloha.*

Řešení Cauchyovy úlohy nazýváme též *partikulárním řešením rovnice.* Graf libovolného partikulárního řešení se nazývá *integrální křivka.*

(anglicky initial condition, IC, initial value problem, IVP)

Příklad. Najděte všechny funkce splňující $y' = 2xy$ a $y(0) = 3$. (Naučíme se řešit později.)

Věta (existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy). *Má-li funkce $\varphi(x, y)$ ohraničenou parciální derivaci $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ v okolí počáteční podmínky, potom má počáteční úloha (1)-(2) právě jedno řešení definované v nějakém okolí počáteční podmínky.*

Příklad. Rovnice

$$y' = y \tag{3}$$

má řešení $y = e^x$, což nahlédneme snadno, protože exponenciální funkce se nemění derivováním. Dosazením je možné ukázat, že má dokonce řešení

$$y = Ce^x, \tag{4}$$

kde C je libovolné číslo.

Příklad. Řešení počáteční úlohy

$$y' = y, \quad y(x_0) = y_0$$

najdeme tak, že využijeme řešení (4) a zařídíme, aby byla splněna počáteční podmínka. Tj. řešením počáteční úlohy je

$$y = (y_0 e^{-x_0})e^x.$$

Vidíme, že toto řešení existuje pro každou počáteční podmínku a proto vzorec (4) popisuje dokonce **všechna** řešení rovnice (3).

Obecné a partikulární řešení

Řešení diferenciální rovnice je nekonečně mnoho. Zpravidla je dokážeme zapsat pomocí jediného vzorce, který obsahuje nějakou (alespoň do jisté míry libovolnou) konstantu C. Takový vzorec se nazývá **obecné řešení rovnice**. Pokud není zadána počáteční podmínka a mluvíme o **partikulárním řešení**, máme tím na mysli jednu libovolnou funkci splňující diferenciální rovnici.

Příklad: Obecným řešením diferenciální rovnice

$$y' = 2xy$$

je

$$y = Ce^{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Žádná jiná řešení neexistují, všechna řešení se dají zapsat v tomto tvaru pro nějakou vhodnou konstantu C. Partikulárním řešením je například $y = 5e^{x^2}$. Řešením počáteční úlohy

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 3$$

je

$$y = 3e^{x^2}.$$

Příklad - tepelná výměna

- Z fyziky víme, že *rychlost tepelné výměny mezi dvěma tělesy je úměrná rozdílu jejich teplot* (Newtonův zákon).
- Z přednášek o derivacích víme, že rychlost je matematicky derivace. Proces tepelné výměny probíhající podle Newtonova zákona je tedy možno modelovat diferenciální rovnicí
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_0).$$
- Rovnice udává, že teplota T horkého tělesa se mění (rychlost změny je derivace) tak, že klesá (znaménko minus) rychlostí úměrnou (konstanta k) teplotnímu rozdílu mezi teplotou tělesa a teplotou okolí T_0 (člen $T - T_0$).
- K rovnici v ideálním případě dodáváme materiálovou charakteristiku (konstantu úměrnosti k) a počáteční teplotu. Řešením rovnice je funkce udávající závislost teploty na čase. Chceme-li znát teplotu za určitý čas, není nutné provádět pokus a čekat na uplynutí požadované doby. Můžeme teplotu přímo vypočítat.
- Někdy může být vhodné nesledovat teplotu T, ale rozdíl oproti okolní teplotě, $\tau = T - T_0$. Rovnice se potom zjednoduší na
$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = -k\tau,$$
tedy na rovnici, kdy rychlost změny je úměrná funkční hodnotě.

Příklad - datování pomocí uhlíku

- Při datování archeologických nálezů pozůstatků živých organismů se využívá fyzikálního poznatku, že radioaktivní prvky se rozpadají rychlostí, která je úměrná množství dosud nerozpadnutého materiálu.
- Rychlost, s jakou se mění množství (a tedy i koncentrace y v daném vzorku) nerozpadnutého radioaktivního materiálu je tedy matematicky popsána rovnicí
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\lambda y,$$
kde λ je konstanta úměrnosti. Tato rovnice je přirozeným důsledkem toho, že pro daný nestabilní izotop mají všechny atomy stejnou pravděpodobnost, že u nich dojde k rozpadu a tato pravděpodobnost se s časem nemění.
- Vhodný radioaktivní prvek vybereme podle toho, jak starý vzorek chceme datovat. Nejčastěji měříme množství radioaktivního uhlíku ^{14}C vztažené k množství stabilního ^{12}C. Počáteční podmínka je známa (předpokládáme stejný poměr zastoupení jako relativně nedávno, před průmyslovou revolucí) a díky tomu můžeme najít funkci udávající, jak s časem klesá zastoupení radioaktivního uhlíku. Obsah radioaktivního i stabilního uhlíku je možné změřit a tím získáme odhad, kolik procent radioaktivního uhlíku se rozpadlo. Řešení počáteční úlohy poté použijeme pro odhad doby, kdy organismus přestal spotřebovávat uhlík z atmosféry, tj. odhad stáří vzorku.
- Při pokusu o datování kostí dinosaurů klesne množství radioaktivního uhlíku pod měřitelnou úroveň. Proto se v tomto případě používají látky s delším poločasem rozpadu.

Příklad - rovnice samočištění jezer

- Nechť veličina y udává množství látky, která znečišťuje vodu v jezeře o objemu V.
- Předpokládejme, že do jezera přitéká čistá voda a stejnou rychlostí odtéká voda s nečistotami (hladina se nemění, je v ustáleném stavu). Nechť veličina r udává, jaký objem vody se v jezeře takto vymění za jeden den. Předpokládejme dále (poněkud nerealisticky), že rozdělení znečišťujících částic v jezeře je rovnoměrné.
- Úbytek hmotnosti nečistot za časovou jednotku je dán derivací $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.
- Protože koncentrace nečistot v jezeře a v odtékající vodě je $\frac{y}{V}$, je úbytek znečištění možno vyjádřit též ve tvaru $\frac{r}{V}y$. Podíl $\frac{r}{V}$ je pro dané jezero kladná konstanta udávající, jak velká část z celkového množství vody se v jezeře vymění za časovou jednotku. Označíme-li tuto konstantu symbolem k, je proces úbytku nečistot v jezeře popsán diferenciální

rovnicí
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky.$$

- Výše uvedená rovnice na nazývá *rovnice samočištění jezer*, ale tento název je čistě formální. Jedná se vlastně o stejnou rovnici, která popisuje radioaktivní rozpad nebo změnu rozdílu mezi teplotou horkého nápoje a místnosti při chladnutí nápoje.
- Stejnou rovnicí je možné popsat nejenom odbourávání nečistot z životního prostředí, ale i odbourávání léků nebo drog z těla. Považujme krevní oběh za jezero a lék nebo drogu za znečišťující látku. V případě, že rychlost odbourávání je úměrná koncentraci (platí pro farmakokinetiku prvního řádu, toto splňuje většina léčiv za běžných koncentrací), řídí se proces odbourávání stejnou diferenciální rovnicí.

Příklad - vývoj populace a její ekologický lov

- Zkoumejme velikost y určité populace, v prostředí s nosnou kapacitou K.
- Realistickým předpokladem dodaným biologickými vědami je, že v prostředí s omezenými úživnými vlastnostmi specifická míru růstu populace (rychlost s jakou se velikost populace zvětšuje vztažená na jednotkové množství populace) klesá s tím, jak se velikost populace přibližuje k nosné kapacitě, a rychlost růstu populace je modelována funkcí $ry\left(1-\frac{y}{K}\right)$. Podle velkosti koeficientů v této rovnici dělíme živočichy na r-stratégy a K-stratégy a toto dělení odráží, jak se snaží druh vyrovnávat se změnami prostředí.
- Za uvedených předpokladů je možno vývoj populace popsat rovnicí
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ry\left(1-\frac{y}{K}\right).$$
Tato rovnice se nazývá *logistická rovnice.*
- Pokud lovem snížíme přírůstky populace, můžeme tento proces modelovat rovnicí
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ry\left(1-\frac{y}{K}\right) - h(y),$$
kde $h(y)$ je intenzita lovu populace o velikosti y. Modelování tohoto procesu umožní nalezení ekonomicky výhodné ale přitom trvale udržitelné strategie lovu.

Příklad - lovci meteoritů z ČSSR a ČR

Česká republika je na světové špičce ve oblasti propočítávání dráhy meteoritů ze světelné stopy zachycené sítí bolidových kamer. Vědcům z Astronomického ústavu se podařilo

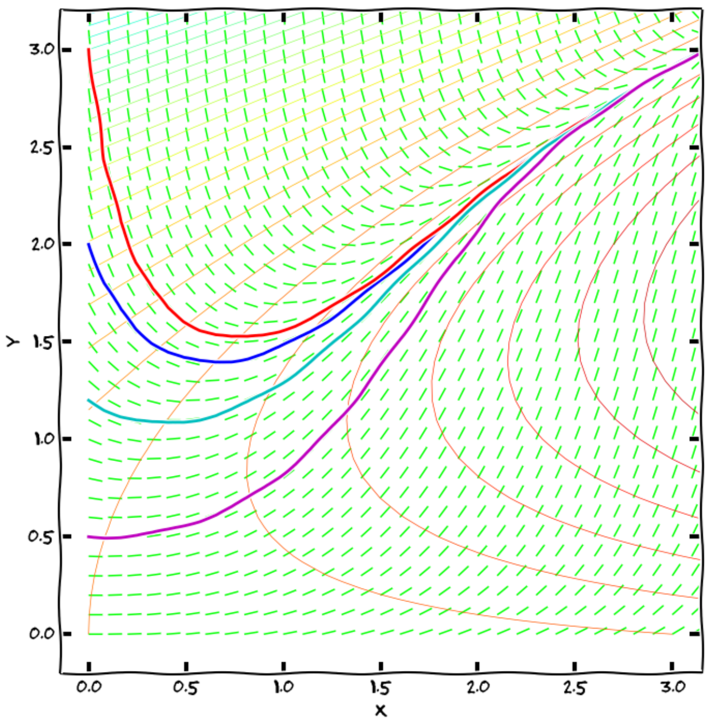
- jako prvním na světě najít pozůstatky meteoritu propočítáním jeho dráhy ze snímků zachycených speciálními kamerami a zpětně propočítat, odkud meteorit přiletěl (meteorit Příbram, 1959, první “meteorit s rodokmenem”, tj. s doloženým původem),
- jako prvním na světě najít pozůstatky meteoritu 20 let po dopadu použitím analýz, které v době dopadu meteoritu nebyly k dispozici (meteorit Benešov, dopad 1991, nalezen 2011),
- propočítat a najít (mimo jiné i na dně jezera!) zbytky meteoritu Čeljabinsk z roku 2013.

Meteority s vystopovaným původem jsou extrémně vzácné (do roku 2000 jenom 5 meteoritů, do roku 2016 pouze 31 meteoritů) a tým založený Zdeňkem Ceplechou a nyní vedený Pavlem Spurným se podílel na výpočtu drah většiny z nich. Použité metody jsou popsány například v článku *Ceplecha, Revelle: Fragmentation model of meteoroid motion, mass loss, and radiation in the atmosphere, Meteoritics & Planetary Science 40, Nr 1, 35–54 (2005).* Například ztráta rychlosti třením v atmosféře je modelována rovnicí
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -K\rho m^{-1/3}v^2$$
a ztráta hmotnosti vypařováním
$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -K\sigma\rho m^{2/3}v^3.$$
Jedná se o diferenciální rovnice, kde zrychlení (derivace rychlosti) a časová změna hmotnosti (derivace hmotnosti podle času, rychlost, s jakou ubývá hmotnost) je úměrná vhodným mocninám těchto veličin.

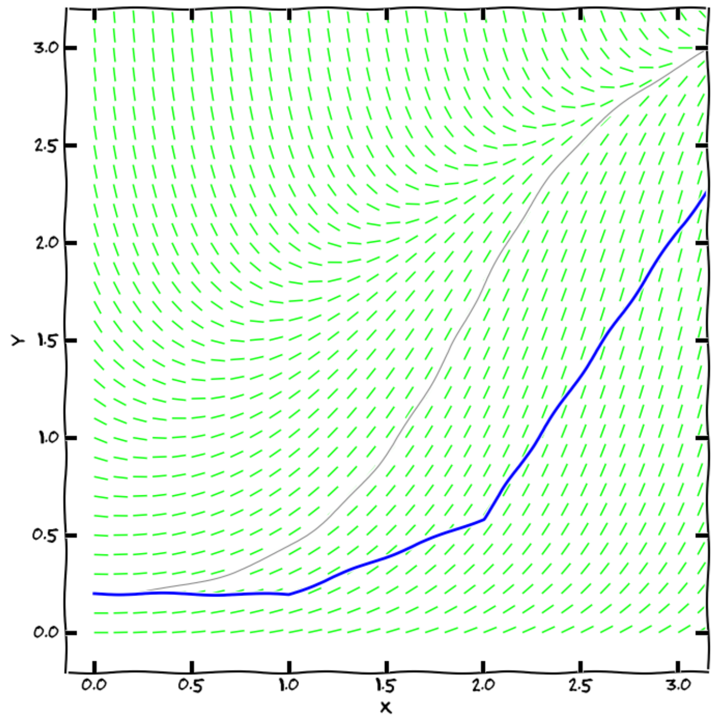
Geometrická interpretace ODE

Protože derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke grafu funkce v tomto bodě, lze rovnici
$$y' = \varphi(x,y) \tag{1}$$
chápat jako předpis, který každému bodu v rovině přiřadí směrnici tečny k integrální křivce, která tímto bodem prochází. Sestrojíme-li v dostatečném počtu (například i náhodně zvolených) bodů $[x,y]$ v rovině vektory $(1,\varphi(x,y))$, obdržíme **směrové pole diferenciální rovnice** — systém lineárních elementů, které jsou tečné k integrálním křivkám.

Počáteční podmínka $y(x_0)=y_0$ geometricky vyjadřuje skutečnost, že graf příslušného řešení prochází v rovině bodem $[x_0,y_0]$. Má-li tato počáteční úloha jediné řešení, neprochází bodem $[x_0,y_0]$ žádná další křivka. Má-li každá počáteční úloha jediné řešení (což bude pro nás velice častý případ), znamená to, že integrální křivky se *nikde neprotínají.*



Obrázek 6.1: *Směrové pole diferenciálni rovnice, integrální křivky, isokliny*



Obrázek 6.2: *Eulerova metoda s velmi dlouhým krokem (modrou barvou) zaostává za přesným řešením (šedou barvou). Pro lepší výsledek můžeme zmenšit krok nebo vylepšit metodu.*

Křivky s konstantní hodnotou $\varphi(x, y)$ mají tu vlastnost, že je všechna řešení protínají pod stejným úhlem, měřeným od kladné části osy x. Například v bodech kde platí $\varphi(x, y) = 0$ míří všechny integrální křivky vodorovně. Proto se křivky, kde je $\varphi(x, y)$ konstantní, nazývají **izokliny**.

Numerické řešení IVP

Řešení počáteční úlohy lze numericky aproximovat poměrně snadno: začneme v bodě zadaném počáteční podmínkou a v okolí tohoto bodu nahradíme integrální křivku její tečnou. Tím se dostaneme do dalšího bodu, odkud opět integrální křivku aproximujeme tečnou. Směrnici tečny zjistíme z diferenciální rovnice, buď přímo z derivace (Eulerova metoda).

Vyjdeme-li z počáteční úlohy

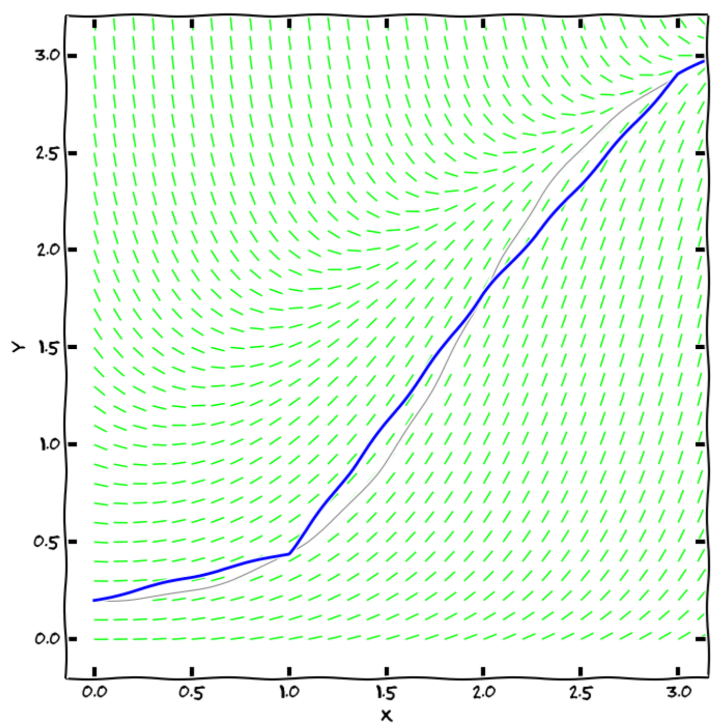
$$y' = \varphi(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

má lineární aproximace řešení v bodě $[x_0, y_0]$ tvar

$$y = y_0 + \varphi(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Funkční hodnotu v bodě $x = x_1$ označíme y_1 a tento bod bude dalším body lomené čáry, tj.

$$y_1 = y_0 + \varphi(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$



Obrázek 6.3: *Metoda Runge Kutta s velmi dlouhým krokem (modrou barvou, jde jasně vidět aproximace lomenou čarou). Přesné řešení je nakresleno šedou barvou.*

Hodnota $x_1 - x_0$ je krok Eulerovy metody označovaný h. Tento postup opkaujeme s počáteční podmínkou $y(x_1) = y_1$. Iterační formule Eulerovy metody má potom následující tvar.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h, \\ y_{n+1} &= y_n + \varphi(x_n, y_n)h. \end{aligned}$$

Stačí tedy mít zvolen *krok* numerické metody (délku intervalu, na kterém aproximaci tečnou použijeme) a výstupem metody bude aproximace integrální křivky pomocí lomené čáry.

Vylepšení

- Pro přesnější aproximaci je možné zjemnit krok h (buď všude, nebo jenom tam, kde "je to potřeba").
- Pro přesnější aproximaci je možné použít místo $\varphi(x_n, y_n)$ lepší směrnici, která dokáže zohlednit, jestli se růst zrychluje nebo zpomaluje (metoda Runge Kutta druhého nebo čtvrtého řádu, …).
- Modely obsahující diferenciální rovnice obsahují zpravidla sadu parametrů charakterizujících fyzikální vlastnosti studovaných objektů. Pro numerické řešení musíme těmto parametrům dát konkrétní hodnoty a přicházíme tak o cennou informaci, jak řešení závisí na těchto parametrech. Vhodnou úpravou rovnice dokážeme počet parametrů eliminovat. Jednoduchým a často dostatečným způsobem je volba jednotek, obecnější metodou je transformace diferenciální rovnice uvedená v následujícím textu.

Online řešiče ODE (numericky):

- dfield
- Sage

Transformace diferenciální rovnice

Naučíme se vyjadřovat diferenciální rovnici v jiných proměnných tak, aby bylo možné snížit počet parametrů v této rovnici. Pro jednoduchost budeme uvažovat jenom případ, kdy nová proměnný je lineární funkcí původní proměnné.

Uvažujme funkci y proměnné x. Připomeneme si vzorce pro derivaci součtu, derivaci konstantního násobku a derivaci složené funkce, ale uvedeme si je v kontextu vhodném pro studium diferenciálních rovnic.

- Z derivace součtu a z derivace konstanty plyne pro funkci y a konstantu y_0 vztah
$$\frac{\mathrm{d}(y \pm y_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \pm \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \pm 0 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$
- Z derivace konstantního násobku funkce plyne pro funkci y a konstantu k vztah
$$\frac{\mathrm{d}(ky)}{\mathrm{d}x} = k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$
- Z derivace složené funkce plyne pro konstantu k a veličinu $X = kx$ vztah
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}X}k$$
tj.
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(kx)} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}X} = \frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Výše uvedené výpočty je možno shrnout do pravidla v následující poznámce.

Poznámka (transformace diferenciální rovnice do jiných jednotek). Pro $Y = k_1(y - y_0)$ a $X = k_2 x$ platí

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}\Big(k_1(y-y_0)\Big)}{\mathrm{d}(k_2x)} = \frac{k_1}{k_2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

a podobně (všimněte si druhé mocniny u k_2 díky druhé derivaci)

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}X^2} = \frac{k_1}{k_2^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}.$$

Výraz nalevo neobsahuje konstanty, které jsou ve výrazu napravo. Tyto konstanty jsou v definici nových veličin X a Y.

Navíc vzorec z poznámky silně připomíná klasické počítání se zlomky. Proto máme Leibnizův tvar zápisu derivací $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ při studiu diferenciálních rovnic více v oblibě, než zápis Lagrangeův, y'.

Příklad. Diferenciální rovnice tepelné výměny

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_\infty), \quad T(0) = T_0 \tag{*}$$

obsahuje tři parametry: teplotu okolního protředí T_∞, počáteční teplotu T_0 a konstantu k související s fyzikálními vlastnostmi prostředí. Postupně můžeme posunout teplotní stupnici tak, aby teplota okolí byla nula a počáteční teplota jedna, tj. hodnotu T snížíme o T_∞ a upravíme dílek stupnice $(T_0 - T_\infty)$-krát

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}\right)}{\mathrm{d}t} = -k\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}$$

vydělit konstantou k

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}\right)}{k\mathrm{d}t} = -\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}$$

a přeškálovat pomocí konstanty k čas

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}\right)}{\mathrm{d}(kt)} = -\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}.$$

Po substituci $y = \dfrac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$, $x = kt$ má úloha tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y, \quad y(0) = 1. \tag{**}$$

Nová rovnice (**) *neobsahuje žádné parametry* a proto je pro studium jednodušší. Přesto je v ní obsažena veškerá informace obsažená v rovnici (*). Tuto informaci je však nutno interpretovat v kontextu definice nových proměnných. Například to, že všechna řešení rovnice (**) konvergují k nule znamená, že všechna řešení rovnice (*) konvergují k T_0. To, že řešení rovnice (**) klesne na poloviční hodnotu za čas $\ln 2$ znamená, že vzdálenost řešení rovnice (*) od rovnovážného stavu se na polovinu zmenší za čas $\frac{1}{k}\ln 2$.

Poznámka (nondimenzinalizace, rozměrová analýza). Proces eliminace parametrů z modelu popsaného diferenciální rovnicí se nazývá nondimenzionalizace nebo rozměrová analýza modelu, protože eliminaci parametrů je vhodné provádět tak, aby výsledné nové veličiny vycházely bez fyzikálních jednotek. K tomu se provádí rozbor jednotek jednotlivých veličin. V jednoduchých případech však stačí primitivní postup popsaný v odstavcích výše a ukázaný na příkladu. V tomto příkladě veličina x nemá fyzikální jednotku, protože je součinem konstanty k (s jednotkou s^{-1}) a času t (s jednotkou s). Je možné ji považovat za *bezrozměrný čas.* Veličina y také nemá fyzikální jednotku, protože je podílem dvou teplot a je možné ji považovat za *bezrozměrnou teplotu.*

V této úloze bylo zavedení nových veličin přirozené. I u méně zřejmých úloh zkušenosti ukazují, že je vhodné volit transformaci tak, aby vznikly veličiny bezrozměrné, které nemají fyzikální jednotku. Například v *Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I* je zavedena bezrozměrná vlhkost, bezrozměrný čas a bezrozměrná vzdálenost na straně 61 pro rovnici popisující difuzi a charakteristická délka, Biotovo číslo (bezrozměrná tepelná vodivost) a bezrozměrná teplota, bezrozměrný čas a bezrozměrná vzdálenost pro rovnici popisující vedení tepla na stranách 88 a 89.

ODE tvaru $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y)$

Rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y) \tag{$\clubsuit$}$$

se nazývá autonomní, nebo též nezávislá na čase. Je speciálním případem rovnice se separovanými proměnnými, která je uvedena na dalším slidu a naučíme se ji řešit analytickou cestou. Proto se nyní nebudeme zaměřovat na hledání obecného řešení, ale pokusíme se popsat chování řešení, aniž bychom tato řešení znali. Pokusíme se s co nejmenší námahou říct, jak se budou řešení chovat.

- Je-li $f(y_0) = 0$, je konstantní funkce $y(x) = y_0$ řešením rovnice ($\clubsuit$). Protože derivace konstantní funkce je nula, vidíme, že řešením rovnice

  $$f(y) = 0$$

  obdržíme všechna konstantní řešení rovnice ($\clubsuit$).
- Rovnici

  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky,$$

  kde k je konstanta, je možno přetransformovat na rovnici $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(kx)} = y$, kterou jsme studovali na jednom z úvodních slidů. Proto není težké se přesvědčit, že obecným řešením této rovnice je funkce

  $$y = Ce^{kx}. \tag{$\clubsuit\clubsuit$}$$

  Jediné konstantní řešení této rovnice je $y = 0$.
  - Pro $k > 0$ jsou funkce ($\clubsuit\clubsuit$) jsou neohraničené (kladné rostoucí nebo záporné klesající, podle znaménka konstanty C) na intervalu $[0, \infty)$. Jakákoliv odchylka od rovnovážného stavu neohraničeně naroste, konstantní řešení $y = 0$ se proto klasifikuje jako nestabilní.
  - Pro $k < 0$ je funkce ($\clubsuit\clubsuit$) na intervalu $[0, \infty)$ blíží k nule. Ať je počáteční podmínka libovolná, všechna řešení se v čase blíží k nule. Jakákoliv odchylka od rovnovážného stavu neohraničeně časem vymizí. Nulové řešení je stabilní.

Vyzbrojeni předchozími speciálními případy budeme sledovat řešení rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y)$$

v okolí bodu y_0 splňujícího $f(y_0) = 0$. To můžeme chápat tak, že modelovaný systém je ve stacionárním stavu s konstantním řešením $y(x) = y_0$ a nějakými vnějšími vlivy došlo k drobnému vychýlení z tohoto stavu. Lineární aproximace (viz úvodní přednášky derivacích)

$$f(y) \approx f'(y_0)(y - y_0)$$

nám umožní rovnici aproximovat rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(y_0)(y - y_0)$$

neboli

$$\frac{\mathrm{d}(y - y_0)}{\mathrm{d}x} = f'(y_0)(y - y_0)$$

a po substituci $Y = y - y_0$, $k = f'(y_0)$ dostáváme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = kY,$$

což je rovnice typu ($\clubsuit$). Stabilitu takové rovnice máme prozkoumánu a proto můžeme udělat následující závěr.

Věta (stabilita konstantních řešení). *Jestliže platí $f(y_0) = 0$, je konstantní funkce $y(x) = y_0$ konstantním řešením rovnice*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y).$$

Toto řešení je stabilní pokud $f'(y_0) < 0$ a nestabilní pokud $f'(y_0) > 0$.

Pro grafickou intepretaci je vhodné připomenout, že funkce s kladnou derivací jsou rostoucí a funkce se zápornou derivací klesající. Pokud má tedy pravá strana derivaci různou od nuly, poznáme stabilitu z monotonie pravé strany.

Příklad. Logistická diferenciální rovnice s konstantním lovem h, tj. rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) - h,$$

má pro malé h dva stacionární body. Funkce $ry\left(1 - \dfrac{y}{K}\right)$ je parabola otočená vrcholem nahoru a s nulovými body $y = 0$ a $y = K$. V prvním stacionárním bodě je funkce rostoucí a tento stacionární bod je nestabilní. Ve druhém stacionárním bodě je funkce klesající a tento stacionární bod je stabilní. Jak se zvyšuje faktor h, graf paraboly se posouvá směrem dolů a oba stacionární body se posouvají směrem k sobě a k vrcholu. Jejich stabilita zůstává neporušena. To znamená, že sice pořád existuje stabilní stav, ale se zvyšující se intenzitou lovu se tento stacionární stav dostává stále blíže ke stavu nestacionárnímu a rovnováha je tedy poněkud křehká.

Příklad - časový rozestup mezi trolejbusy

Uvažujme dva trolejbusy jedoucí za sebou po stejné trati. Označme $x(t)$ jejich časový odstup. Pokud první trolejbus zastaví na určité zastávce v čase t, druhý trolejbus na tuto zastávku dorazí v čase $x(t)$. Naším úkolem je zjistit, jak se $x(t)$ mění s rostoucím t.

Předpokládejme, že

- první vůz jede konstantní rychlostí (není dopravní špička)
- pokud žádní pasažéři nečekají na druhý vůz, druhý vůz se pohybuje rychleji než první vůz a oba vozy se "sjedou", tj. $x(t)$ klesá, pokud na druhý vůz nečekají žádní pasažéři
- rychlost druhého vozu klesá s rostoucím počtem pasažérů, kteří čekají na zastávce
- počet pasažérů kteří čekají na zastávce roste s rostoucím intervalem mezi oběma vozy.

Uvažujme, že všechny závislosti popsané výše jsou lineární (přímá úměrnost).

Situaci je možno modelovat diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \beta x - \alpha,$$

kde α a β jsou kladné reálné konstanty. Tato rovnice má konstantní řešení $x = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Toto řešení je nestabilní, protože

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\beta x - \alpha) = \beta > 0.$$

Žádné jiné konstantní řešení neexistuje a proto všechna řešení klesají na nulu nebo neohraničeně rostou.

Vzhledem k nestabilitě stacionárního řešení nemůžeme nechat řidiče veřejné dopravy jezdit "jak jim to vyjde". Situace by směřovala k tomu, že cestující budou nejprve dlouho čekat na trolejbus a nakonec přijede několik trolejbusů těsně za sebou. (Podle knihy P. Blanchard, R. L. Devaney, G. R. Hall: Differential equations, Cengage Learning (2006), 828 pp.)

ODE tvaru $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$ (rovnice se separovanými proměnnými)

Definice (ODE se separovanými proměnnými). Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = f(x)g(y) \tag{S}$$

kde f a g jsou funkce spojité na (nějakých) otevřených intervalech se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.*

Příklad: Rovnice

$$y' + xy + xy^2 = 0$$

je rovnicí se separovanými proměnnými, protože je možno ji zapsat ve tvaru

$$y' = -xy(y + 1).$$

Rovnice

$$y' = x^2 - y^2$$

není rovnice se separovatelnými proměnnými.

Řešení ODE se separovanými proměnnými

1. Má-li algebraická rovnice $g(y) = 0$ řešení $k_1, k_2, \ldots, k_n$, jsou konstantní funkce $y \equiv k_1, y \equiv k_2, \ldots, y \equiv k_n$ řešeními rovnice.

2. Pracujme na intervalech, kde $g(y) \neq 0$ a odseparujeme proměnné.
$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$$
3. Získanou rovnost integrujeme. Tím získáme obecné řešení v implicitním tvaru.
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$
4. Pokud je zadána počáteční podmínka, je možné ji na tomto místě dosadit do obecného řešení a určit hodnotu konstanty C. Tuto hodnotu poté dosadíme zpět do obecného řešení a obdržíme řešení *partikulární*.
5. Pokud je to možné, převedeme řešení (obecné nebo partikulární) do explicitního tvaru (vyjádříme odsud y).

Poslední krok (převod do explicitního tvaru) je volitelný, zpravidla záleží na tom, co dalšího hodláme s řešením dělat. Pro většinu výpočtů je však explicitní tvar vhodnější než tvar implicitní a proto se o něj vždy snažíme.

Poznámka (zápis partikulárního řešení pomocí určitého integrálu). V případě počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$ je možné spojit třetí a čtvrtý krok a použít určitý integrál
$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Počáteční úloha má jediné řešení, pokud má pravá strana ohraničenou parciální derivace podle y, jak je zmíněno v úvodu přednášky. Nicméně pro diferenciální rovnici se separovanými proměnnými je možné vyslovit následující mnohem jednodušší postačující podmínku pro jednoznačnost řešení.

Věta (existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici se separovanými proměnnými). *Je-li $g(y_0) \neq 0$, má počáteční úloha*
$$y' = f(x)g(y), \qquad y(x_0) = y_0$$
právě jedno řešení definované v nějakém okolí počáteční podmínky.

Diferenciální rovnice růstu vodní kapky

Modelujme růst kulové kapky. Ta roste tak, že na povrchu kondenzují vodní páry. Kapka proto roste tak, že její objem se zvětšuje rychlostí úměrnou povrchu. Povrch je zase úměrný druhé mocnině poloměru a poloměr je úměrný třetí odmocnině objemu. Platí tedy (po sloučení všech konstant úměrnosti do jedné)
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = kV^{2/3}.$$
Tato rovnice má konstantní řešení $V = 0$. Nekonstantní řešení dostaneme po úpravě
$$V^{-2/3}\mathrm{d}V = k\mathrm{d}t$$
a po integraci
$$\int V^{-2/3}\mathrm{d}V = k\int \mathrm{d}t,$$
což dává
$$3V^{1/3} = kt + C$$
a
$$V = \left(\frac{1}{3}kt + \frac{1}{3}C\right)^3,$$
tj.
$$V = (k_0 t + c)^3,$$
kde $k_0 = \frac{1}{3}k$ a $c = \frac{1}{3}C$ jsou konstanta spojená rychlostí kondenzace a integrační konstanta.

Všimněte si, že počáteční úloha s počáteční podmínkou $V(0) = 0$ má konstantní nulové řešení
$$V(t) = 0$$
a nenulové řešení
$$V(t) = (k_0 t)^3.$$
Máme zde tedy nejednoznačnost v řešení počáteční úlohy. Tato nejednoznačnost není v rozporu s větou o existenci a jednoznačnosti řešení, protože pravá strana je nulová (podmínka pro separovatelnou rovnici není splněna) a nemá ohraničenou derivaci podle V (podmínka pro obecnou rovnici také není splněna). A
nejednoznačnost má v tomto případě dokonce fyzikální význam. Plynné skupenství může existovat i pod bodem kondenzace. Takovému jevu se říká přechlazená pára. Aby došlo ke kondenzaci, musí být k dispozici kondenzační jádra, například nečistoty ve vzduchu. Proto ve znečištěném ovzduší dochází častěji ke kondenzaci a tvorbě mlhy. Své by o tom mohli vyprávět obyvatelé Londýna, kteří se proslulých mlh zbavili poté, co se omezilo topení uhlím. My dnes spíše známe přechlazenou tekutinu ve formě hřejících polštářků, kde se po lupnutí plíškem spustí přeměna skupenství na pevné spojená s intenzivním uvolněním tepla.

Diferenciální rovnice vyšších řádů

Je-li x poloha tělesa, je derivace $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ rychlost a druhá derivace $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ zrychlení. Podle Newtonova pohybového zákona je součin hmotnosti a zrychlení roven výsledné působící síle. Tato síla může mít složku závislou na poloze (například síla, která vrací těleso do rovnovážné polohy), složku závislou na rychlosti (odporová síla prostředí) a složku nezávislou na poloze i rychlosti (například vnější síla). Proto je přirozené v podstatě jakýkoliv pohyb v mechanice modelovat pomocí diferenciální rovnice druhého řádu

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F.$$

Přirozeně přitom formulujeme počáteční podmínky pro počáteční polohu a počáteční rychlost, tj. $x(t_0) = x_0$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0) = x_1$. Každá počáteční úloha má právě jedno řešení. Taková úloha se zpravidla řeší podobně jako u diferenciálních rovnic prvního řádu: najde se obecné řešení a poté se ze všech funkcí, které splňují danou diferenciální rovnici, vybere ta jediná, která splňuje i počáteční podmínky. Numerický výpočet se děje podobně jako u rovnice prvního řádu: řešení se prodlužuje po malých krocích a v rámci každého kroku aproximujeme pohyb rovnoměrným pohybem. (Film Hidden figures a hlavní hrdinka propočítávající dráhu pro návrat prvního amerického astronauta.)

Při studiu deformací nosníků nebo kmitů strun, ploch či těles se setkáme s diferenciálními rovnicemi typů

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = q$$

a

$$\frac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4} = q.$$

U takových úloh definujeme podmínky ve dvou různých bodech. Například u struny nebo u oboustranně vetknutého namáhaného nosníku je v bodech uchycení nulová výchylka a proto je přirozené formulovat okrajové podmínky $x(0) = 0$ a $x(l) = 0$. Řešení takové úlohy existuje jenom pro některé kombinace parametrů. Fyzikální rozbor ukazuje, že okrajová podmínka je to místo, kde se objeví efekt, že struna kmitá jenom na některých frekvencích (na základní frekvenci na kterou je naladěna a na vyšších harmonických frekvencích). Úlohy s okrajovými podmínkami se v praxi vyskytují v poměrně komplikovaných situacích (posuzování ne jednoho nosníku, ale celé konstrukce) a proto se zpravidla řeší přibližně a převádí se na řešení soustav lineárních rovnic.

Konečné diference

Naučili jsme se numericky integrovat a řešit diferenciální rovnice a naskýtá se otázka, jak to je s numerickým derivováním. Základním přístupem je vynechání limitního přechodu v definici derivace

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Tedy

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Okamžitá rychlost je nahrazena průměrnou rychlostí na intervalu $(x, x+h)$. Tento podíl se nazývá dopředná poměrná diference. Pokud použijeme toto nahrazení v diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \varphi(x,y),$$

dostaneme

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \varphi(x,y)$$

a odsud

$$f(x+h) = h\varphi(x,y) + f(x),$$

což je vlastně Eulerova metoda řešení diferenciální rovnice prvního řádu.

Jiná aproximace vychází z Taylorova polynomu druhého řádu napsaného pro $f(x+h)$ a $f(x-h)$, tj. ze vztahů

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2$$
$$f(x-h) \approx f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2$$

Pokud tyto vztahy sečteme a odečteme, dostaneme

$$f(x+h) + f(x-h) \approx 2f(x) + f''(x)h^2$$
$$f(x+h) - f(x-h) \approx 2f'(x)h.$$

Odsud dostáváme aproximace první a druhé derivace

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2} = f''(x) \approx \frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}.$$

Příklad (podle Autar Kaw et al.: Finite Difference Method for Ordinary Differential Equations.) Deformace y nosníku délky L podepřeného na koncích, vystaveného vertikálnímu zatížení q a axiálnímu namáhání T je dána rovnicí

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{T}{EI}y = \frac{qx(L-x)}{2EI},$$

kde E je materiálová charakteristika a I je veličina související s průřezem nosníku (kvadratický moment průřezu, souvisí s velikostí i s tvarem). Okrajové podmínky jsou $y(0) = 0$ a $y(L) = 0$. Po dosazení za druhou derivaci dostáváme

$$\frac{y(x-h)-2y(x)+y(x+h)}{h^2} - \frac{T}{EI}y(x) = \frac{qx(L-x)}{2EI}.$$

Pokud délku nosníku L rozdělíme na n částí délky h a pokud označíme $x_i = ni$, $y_i = y(x_i)$, rovnice se redukuje na rovnici

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - \frac{T}{EI} y_i = \frac{q x_i (L - x_i)}{2EI}.$$

To je pro i od $i = 1$ po $i = n - 1$ celkem $n - 1$ lineárních rovnic. K tomu přidáváme rovnice na koncích podepřeného nosníku, kdy platí $y_0 = 0$ a $y_n = 0$. Celkem tedy máme soustavu $n + 1$ lineárních rovnic o $n + 1$ neznámých. Soustava je řešitelná. Protože pro jemné dělení je rovnic obrovské množství, není vhodné se problém snažit zdolat metodami řešení rovnic známými ze střední školy. Problematika spadá do oboru nazývaného lineární algebra, kterému se začneme věnovat na příští přednášce.

Pro analogickou úlohu se vzpěrnou tlakovou pevností dřeva viz též A. Požgaj, Štruktúra a vlastnosti dreva str. 359.

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Aplikované vědy (fyzika, biologie, nauka o materiálu, hydrologie) přirozeně formulují své zákony a poznatky mimo jiné i kvantitativně a pomocí pojmů vyjadřujících rychlosti změn. Při přepisu těchto zákonitostí do matematických modelů používáme derivaci jako rychlost růstu (případně záporně vzatou derivaci, jako rychlost poklesu).
- Pokud známým způsobem souvisí změna veličiny popisující stav systému s velikostí této veličiny, je příslušným matematickým modelem diferenciální rovnice. S tímto jsme se setkali již mnohokrát ve cvičení během semestru.
- Naučili jsme se základní diferenciální rovnice řešit analyticky, řekli jsme si, že se dají řešit numericky (v praxi využijeme předpřipravené procedury a proto se touto problematikou nemusíme zabývat do hloubky) a naučili jsme se i rovnice transformovat do jiných proměnných, které mohou být pro studium problému přínosnější, než původní veličiny.

Kapitola 7

Lineární algebra (operace s vektory a maticemi)

Vektory a operace s nimi

Vektorem rozumíme uspořádanou n-tici objektů, pro které má smysl operace sčítání a násobení číslem. Počet komponent v této n-tici se nazývá dimenze vektoru. Tyto komponenty jsou zpravidla čísla nebo skalární funkce. Aby se s vektory dalo rozumně pracovat, musí tvořit vhodnou strukturu. Například každý vektor musí mít neutrální prvek a každý vektor musí mít opačný prvek.

Definice (vektory, vektorový prostor). Množinu V uspořádaných n-tic $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ s operacemi sčítání a násobení reálným číslem definovanými

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$
$$c \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (c \cdot a_1, c \cdot a_2, \ldots, c \cdot a_n)$$

pro všechna $c \in \mathbb{R}$ a $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in V$ nazýváme *vektorovým prostorem.* Prvky tohoto prostoru nazýváme *vektory.* Prvky $a_1, \ldots, a_n$ nazýváme *složky vektoru* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Číslo n nazýváme *dimenze prostoru* V.

Vektorový prostor, jehož komponenty jsou uspořádané n-tice reálých čísel označujeme $\mathbb{R}^n$.

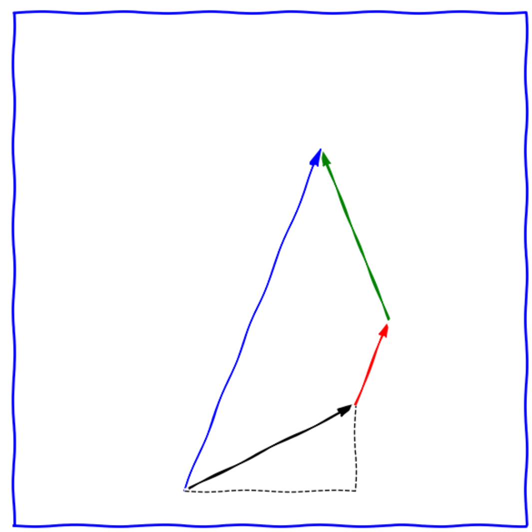
Často pracujeme se sloupcovými vektory. Zápis je potom přehlednější.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ -2+15 \\ 1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Neutrálním prvkem vzhledem ke sčítání vektorů je *nulový vektor* $\vec{o}$, jehož všechny komponenty jsou nulové. Vektor, ke kterému přičteme nulový vektor, se nezmění.

$$\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$$

2D a 3D a vektory v geometrii



Obrázek 7.1: *Modrý vektor je součtem ostatních tří vektorů. U černého vektoru je pravoúhlý trojúhelník pro výpočet délky pomocí Pythagorovy věty. Zdroj: Wikiepdie.*

Dvourozměrné vektory s komponentami danými reálnými čísly můžeme reprezentovat graficky pomocí orientovaných úseček. Ve zvolené soustavě souřadnic a při zvoleném výchozím bodu vektor znázorníme takovou orientovanou úsečkou, že komponenty vektoru označují změnu polohy v jednotlivých směrech. Sčítání vektorů odpovídá posunutí počátečního bodu druhého vektoru do koncového bodu prvního vektoru a nahrazení dvou částečných posunutí jedním celkovým. Je přirozené zavést délku vektoru

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ pomocí Pythaghorovy věty vzorcem $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Násobení vektoru kladným číslem odpovídá změně délky vektoru. Násobení záporným číslem odpovídá změně délky a otočení směru.

Sčítání vektorů a integrace cesty u migrujících živočichů

Staří námořníci navigovali tak, že zaznamenávali směr a rychlost pohybu. Z těchto informací je možné určit relativní polohu vzhledem k výchozímu bodu. Podobnou strategii si vyvinuli živočichové žijící v oblasti bez viditelných orientačních bodů například pouštní mravenci Cataglyphis fortis. Při hledání potravy registrují vzdálenost a změnu směru. Tím vlastně registrují vektor posunutí. Jednotlivé vektory posunutí po sečtení dávají celkové posunutí a tím je dána i nejkratší cesta zpět. Stačí výsledné celkové posunutí obrátit. V jistém smyslu tedy mravenec dokáže sčítat vektory a tuto schopnost používá k přežití v komplikovaném prostředí.

Další informace: Wikipedia, Path integration

Lineární kombinace

Definice (lineární kombinace). Nechť $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, … $\vec{u}_k$ je konečná posloupnost vektorů z vektorového prostoru V. Vektor $\vec{u}$, pro který platí

$$\vec{u} = t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \cdots + t_k\vec{u}_k,$$

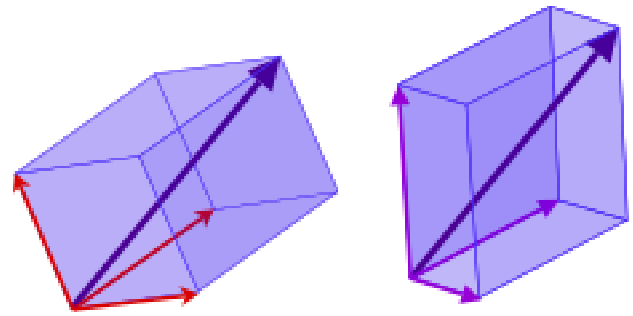
kde t_1, t_2, …, t_k jsou nějaká reálná čísla, se nazývá *lineární kombinace* vektorů $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_k$. Čísla t_1, t_2, …, t_k nazýváme *koeficienty lineární kombinace.*

Příklad. Lichoběžníkové pravidlo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\Big(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\Big).$$

ukazuje, že určitý integrál je možno aproximovat lineární kombinací funkčních hodnot na pravidelné mřížce rozdělující obor integrace. Koeficienty lineární kombinace jsou dvojky s vyjímkou prvního a posledního koeficientu, které jsou jednotkové. Existují i další aproximační vzorce, které používají jiné koeficienty a jsou založeny například na aproximaci funkce parabolami namísto přímek.

Příklad. V metodě konečných diferencí (viz závěr přednášky o diferenciálních rovnicích) se derivace aproximují výrazy, které jsou lineární kombinací po sobě jdoucích funkčních hodnot



Obrázek 7.2: *Stejný modrý vektor vyjádřený ve dvou různých bázích ve 3D, v červené a fialové bázi. Bázové vektory volíme zpravidla jednotkové délky, na obrázku už jsou vynásobeny vhodnými konstantami tak, abychom jako lineární kombinaci obdrželi požadovaný vektor. Zdroj: Wikipedia.*

hledané funkce na pravidelné mřížce délky h. Pro konkrétnost, pro první derivaci máme

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{1}{2h}f(x+h) - \frac{1}{2h}f(x-h),$$

a pro druhou derivaci

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} = \frac{1}{h^2}f(x-h) - \frac{2}{h^2}f(x) + \frac{1}{h^2}f(x+h)$$

Lineární závislost a nezávislost vektorů

V n-rozměrném prostoru existuje n-tice vektorů, pomocí nichž můžeme dostat libovolný vektor jako lineární kombinaci. Taková n-tice se nazývá *báze.* Dá se ukázat, že bází je nekonečné mnoho a pro zadanou bázi a vektor je vyjádření vektoru pomocí bázových vektorů jednoznačné až na pořadí. Nejjednodušší báze je tvořena jednotkovými vektory, které mají všechny komponenty kromě jedné nulové. Například pro bázové vektory $\vec{e}_1 = (1,0)$ a $\vec{e}_2 = (0,1)$ dvourozměrného vektorového prostoru a pro vektor $\vec{v} = (4,3)$ platí

$$\vec{v} = (4,3) = (4,0) + (0,3) = 4(1,0) + 3(0,1) = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

Koeficienty lineární kombinace se nazývají souřadnice. Například souřadnice vektoru $\vec{v} = (4,3)$ v uvažované bázi jsou $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}_{e_1,e_2}$. Pro bázové vektory $\vec{\varepsilon}_1 = (2,1)$ a $\vec{\varepsilon}_2 = (0,1)$ platí

$$\vec{v} = (4,3) = 2(2,1) + 1(0,1) = 2\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$$

a souřadnice vektoru $\vec{v} = (4,3)$ v nové bázi jsou $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$. Tady vidíme výhodu “pěkné volby” bázových vektorů.

Aby použití souřadnic mělo smysl, musí existovat jediná možnost jak daný vektor vyjádřit pomocí lineární kombinace zadaných bázových vektorů. Tato úloha se dá redukovat na úlohu, zda taková jednoznačnost existuje u nulového vektoru. Tím je motivována následující úvaha a z ní vyplývající definice.

Výsledkem triviální lineární kombinace, tj. lineární kombinace s nulovými koeficienty, je nulový vektor. Pro některé vektory můžeme nulový vektor dostat i jako jinou lineární kombinaci, než je ta triviální. Ukazuje se, že je důležité identifikovat tyto případy a pro rozlišení toho, zda se nulový vektor dá nebo nedá vyjádřit jako netriviální lineární kombinace zavedeme nové pojmy, lineární závislost a nezávislost.

Definice (lineární závislost a nezávislost). Řekneme, že vektory $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_k$ jsou *lineárně závislé*, jestliže existuje alespoň jedna netriviální lineární kombinace těchto vektorů, jejímž výsledkem je nulový vektor $\vec{o}$, tj. existují-li reálná čísla t_1, t_2, …, t_k, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že platí

$$\vec{o} = t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \cdots + t_k\vec{u}_k.$$

V opačném případě říkáme, že vektory jsou *lineárně nezávislé.*

Platí následující.

- Vektory, které tvoří bázi, jsou lineárně nezávislé.
- Je-li vektorů větší počet, než je dimenze prostoru, jsou tyto vektory lineárně závislé.
- Je-li v posloupnosti vektorů některý vektor násobkem jiného vektoru nebo lineární kombinací ostatních vektorů, jedná se o lineárně závislou posloupnost vektorů.

Ve výše uvedených případech poznáme lineární závislost snadno. Mimo tyto případy je to snadné pouze pro dvojici vektorů, které jsou lineárně závislé právě tehdy když je jeden vektor násobkem druhého. V tom případě říkáme, že vektory mají stejný směr. V ostatních případech se lineární závislost a nezávislost naučíme posuzovat později při výpočtu hodnosti.

Pootočení vektoru

Ve dvourozměrném vektorovém prostoru uvažujme jednotkové vektory ve směru souřadných os $\vec{e}_1 = (1, 0)$ a $\vec{e}_2 = (0, 1)$. Pokud pootočíme vektory o úhel θ v kladném směru, mají pootočené vektory $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ souřadnice

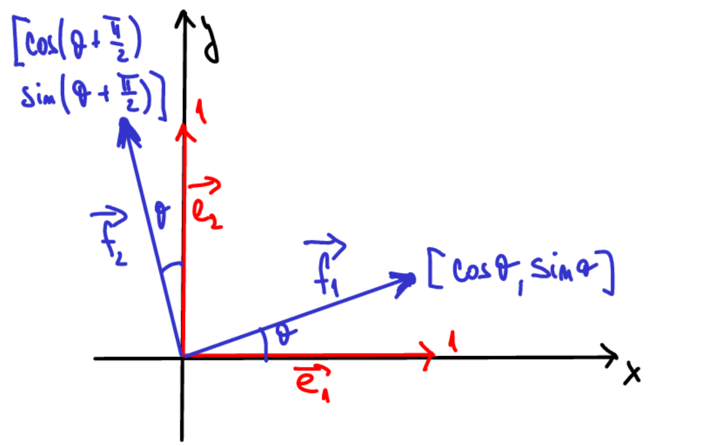
$$\vec{f}_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$$

(plyne přímo z definice funkcí sinus a kosinus na jednotkové kružnici) a

$$\vec{f}_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

(plyne z předchozího přičtením úhlu $\dfrac{\pi}{2}$ a využitím identit $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$ a $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$). Pomocí lineární kombinace můžeme psát

$$\vec{f}_1 = \cos(\theta)\vec{e}_1 + \sin(\theta)\vec{e}_2,$$
$$\vec{f}_2 = -\sin(\theta)\vec{e}_1 + \cos(\theta)\vec{e}_2.$$



Obrázek 7.3: *Jednotkové vektory ve směru os pootočíme o úhel θ a výsledek vyjádříme jako lineární kombinaci původních vektorů.*

Je-li úhel θ malý, platí (viz cvičení z derivací) $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$ a dostáváme

$$\vec{f}_1 = (1, \theta) = \vec{e}_1 + \theta\vec{e}_2,$$
$$\vec{f}_2 = (-\theta, 1) = -\theta\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Model migrace jako přepínání stavů

Na příkladě si ukážeme, kdy je přirozené pracovat s lineárními kombinacemi vektorů. Pokusíme se na jednoduchém modelu migrace mezi městem a venkovem demonstrovat přístup, který se používá v případech, kdy je možné rozdělit jednotlivé části systému do konečného počtu navzájem disjunktních stavů a jednotlivé části mohou měnit svůj stav, přičemž pravděpodobnost změny je dána pouze současným stavem a ne například historií předchozích stavů. Aplikace zahrnují například modelování vegetace na stanovištích (zájmová oblast je rozdělena na stanoviště a ke každému stanovišti je přiřazen převažující typ vegetace), pro modelování změn druhového složení v lese nebo v krajině, ale i v hydrologických modelech, předpovědi počasí a jinde. Základní model má řadu rozšíření a ukážeme si jej jen v nejjednodušší formě a na případě dvou stavů.

Slovní formulace: Každý rok měříme velikosti populací ve městě a na venkově. Na počátku 60% populace žije ve městě a 40% na venkově. Každý rok zůstane 95% městské populace ve městě a 5% se stěhuje na venkov. Podobně 97% obyvatelstva venkova zůstává a 3% se stěhuje do města.

Matematický model: Procentuální složení zaznamenáváme ve formě vektoru. Na počátku bude

$$\vec{q}_0 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

Po jednom roce je rozložení populace dáno vektorem

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 0.95 \\ 0.05 \end{pmatrix} 0.6 + \begin{pmatrix} 0.03 \\ 0.97 \end{pmatrix} 0.4.$$

Intenzita migrace jednotlivými směry je ve sloupcových vektorech na pravých stranách. Koeficienty v této lineární kombinaci jsou koeficienty vektoru $\vec{q}_0$.

Podobně, rozložení po dvou letech bude dáno lineární kombinací s koeficienty, danými vektorem $\vec{q}_1$. Pokud bychom potřebovali znát rozložení populace po k letech, situace se komplikuje. Dostali bychom rekurentní vzorec, který je nutno stále opakovat. Pro odstranění tohoto nepohodlí se zavádí pojem matice, viz níže.

Matice a jejich lineární kombinace

Definice (matice). *Maticí řádu* $m \times n$ rozumíme schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde a_{ij} pro $i = 1..m$ a $j = 1..n$ jsou reálná čísla nebo funkce. Množinu všech matic řádu $m \times n$, jejichž prvky jsou reálná čísla, označujeme symbolem $\mathbb{R}^{m\times n}$. Zkráceně zapisujeme též $A = (a_{ij})$.

Je-li $m = n$ nazývá se matice A *čtvercová matice*, jinak *obdélníková matice*. Je-li A čtvercová matice, nazýváme prvky tvaru a_{ii}, tj. prvky, jejichž řádkový a sloupcový index jsou stejné, *prvky hlavní diagonály*.

Pro matice definujeme *sčítání* a *násobení číslem* stejně jako u vektorů, tj. po složkách. Má potom smysl mluvit o lineární kombinaci matic a o jejich lineární závislosti či nezávislosti. Tyto operace přirozeně přebírají všechny důležité vlastnosti operace sčítání, jako jsou asociativita, komutativita, existence neutrálního prvku nebo existence opačného prvku.

V této fázi je vlastně jedno, jestli prvky jsou uspořádány jako řádkový nebo sloupcový vektor nebo jako matice. Odlišení matic a vektorů provedeme zavedením maticového součinu.

Maticový součin

Definice (součin matic). Buďte $A = (a_{ij})$ matice řádu $m\times n$ a $B = (b_{ij})$ matice řádu $n \times p$. *Součinem matic* A a B (v tomto pořadí) rozumíme matici $G = (g_{ij})$ řádu $m \times p$, kde

$$g_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

pro všechna $i = 1..m$, $j = 1..p$. Zapisujeme

$$G = AB$$

(v tomto pořadí).

Slovy: v j-tém sloupci matice AB je lineární kombinace sloupců matice A, přičemž koeficienty této lineární kombinace jsou prvky z j-tého sloupce matice B.

Na maticový součin můžeme pohlížet i pomocí pojmů známých z analytické geometrie. Prvky v součinu matic jsou skalárními součiny řádků první matice se sloupci druhé matice.

Maticový součin

- je asociativní
$$(AB)C = A(BC) = ABC,$$
- je distributivní vzhledem ke sčítání
$$A(B + C) = AB + AC \qquad \text{a} \qquad (B + C)A = BA + CA,$$
- není však komutativní (AB je obecně různé od BA, proto v předchozím máme roznásobování závorky zleva i zprava),
- ale při násobení skalárem komutativní je:
$$A(\lambda B) = \lambda(AB),$$
kde λ je reálné číslo a A a B jsou matice.

Můžeme tedy měnit uzávorkování, můžeme roznásobovat závorky, nesmíme však měnit pořadí matic při násobení.

Neutrální prvek maticového součinu

U každé operace nás zajímá neutrální prvek, což je prvek, který se v dané operaci nijak neprojeví. Třeba u sčítání čísel je neutrálním prvkem nula, při násobení čísel je neutrálním prvkem jednička. Pokud nějaký prvek potřebujeme zapsat ve tvaru součinu, zapíšeme ho jako součin sebe sama s jedničkou. To využijeme například při vytýkání ve kterém u vytýkaného prvku nefiguruje v některém členu druhý součinitel, jako třeba ve výpočtu

$$3x^2 + x = 3x \cdot x + 1 \cdot x = (3x + 1) \cdot x.$$

Ukážeme si, že podobný neutrální prvek existuje i u násobení matic a trik podobný výše uvedenému využijeme později, až budeme mluvit o vlastních vektorech matice.

Neutrálním prvkem při násobení matic čtvercových je čtvercová matice, která má jedničky v hlavní diagonále a nuly mimo tuto diagonálu. Tato matice se nazývá *jednotková matice* a označuje I. Mají-li čtvercové matice A a I stejný počet řádků a sloupců, platí

$$AI = IA = A.$$

Například pro matice 3×3 je jednotková matice

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je-li A matice 3×3, kterou násobíme zprava maticí I, výsledná matice AI bude mít tři sloupce (matice I má tři sloupce), v prvním sloupci bude první sloupec matice A (lineární kombinace sloupců matice A s koeficientem 1 pro první sloupec a koeficienty 0 pro všechny další sloupce) atd. Jako výsledek součinu dostaneme přirozeně matici A. Že stejný výsledek dostaneme i pro opačné pořadí v součinu je možné pro nějaký konkrétní případ ověřit přímo a že toto funguje obecně se nejsnáze ukáže, až si představíme operaci transponování matice a její vztah k maticovému součinu.

Markovovy řetězce

Budeme pokračovat v příkladě s migrací. Viděli jsme, že po jednom roce je tedy rozložení populace dáno vektorem

$$\vec{q}_1 = 0.6 \begin{pmatrix} 0.95 \\ 0.05 \end{pmatrix} + 0.4 \begin{pmatrix} 0.03 \\ 0.97 \end{pmatrix}.$$

Koeficienty vektoru $\vec{q}_0 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$ jsou koeficienty v této lineární kombinaci. To lze zapsat jako maticový součin

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

Pro další rok tento postup opakujeme. Pro matici $A = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}$ platí

$$\vec{q}_1 = A\vec{q}_0.$$

Je-li $\vec{q}_k$ vektor charakterizující rozložení po k letech, rozložení v následujícím roce získáme ze vztahu

$$\vec{q}_{k+1} = A\vec{q}_k.$$

Pro stav po dvou letech platí

$$\vec{q}_2 = A\vec{q}_1 = A(A\vec{q}_0) = (AA)\vec{q}_0 = A^2\vec{q}_0.$$

Po k letech je rozložení populace dáno vektorem

$$\vec{q}_k = A^k\vec{q}_0.$$

Pokud pro některý vektor $\vec{q}$ platí

$$\vec{q} = A\vec{q}$$

znamená to, že systém je ve stacionárním stavu a procentuální zastoupení stavů se nemění. Například v našem modelu to znamená, že stejný počet lidí přestěhovaných z města do vesnice je stejný, jako počet lidí přestěhovaných opačným směrem. Tento stacionární stav se dá najít opakovanými iteracemi z náhodného výchozího stavu. Online výpočet.

Takový rekurentní vzorec je možno chápat jako jakýsi stavový automat, který řídí přepínání mezi dvěma stavy (obyvatel města, obyvatel vesnice). V matematice se nazývá *Markovův řetězec.* Protože uvnitř matice jsou pravděpodobnosti a v každém sloupci vždy nastane právě jeden z jevů, který tyto pravděpodobnosti reprezentují, je součet čísel v každém sloupci matice roven jedné. V obecných stavových modelech, kde se nepracuje s pravděpodobností, jako je například Leslieho model růstu populace níže, tato podmínka platit nemusí.

(Podle D. Lay, Linear algebra. Markovovy řetězce viz též Wikipedie, ale pozor: někdy se místo zde představeného zápisu používá zápis s řádkovým vektorem nalevo od matice popisující změnu stavů.)

Růst populace pomocí Leslieho matice

Leslieho model používá matice pro modelování vývoje populace, který zohledňuje věkovou strukturu populace. Model předpokládá, že populace je rozdělena do několika věkových kategorií a v každé kategorii je dána pravděpodobnost dožití se do další kategorie a průměrný počet potomků. Situace je podobná jako u Markovova řetězce s tím, že nenulový prvek matice bude jenom tam, kde dochází k přesunu do další věkové kategorie nebo tam, kde kumulujeme počet nově narozených jedinců v nejnižší věkové kategorie pro jednotlivé věkové skupiny rodičů.

Příslušný model například pro populaci rozdělenou do tří věkových kategorií by byl dán rovnicí

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}$$

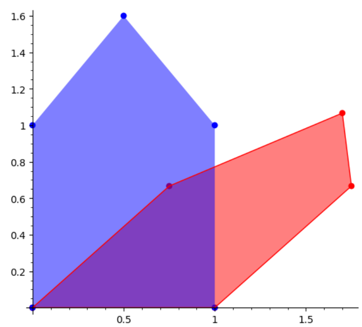
Opakovaným násobením získáme věkovou strukturu populace v další generaci a toto se opakuje podobně jako u Markovova řetězce.

Původně byl Leslieho model odvozen pro modelování populace samic, dá se však adaptovat na populaci obecně.

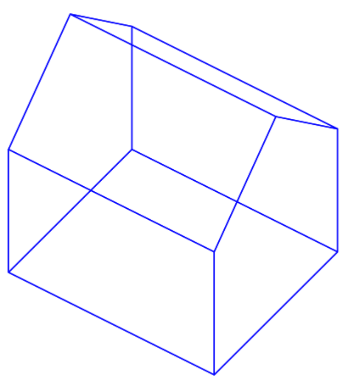
Další informace:

- Z. Pospíšil, Maticové populační modely

Matice jako zobrazení v geometrii



Obrázek 7.4: *Příklad transformace dané maticí. Zachovává se například rovnoběžnost a středy úseček. Přímky se zobrazují na přímky.*



Obrázek 7.5: *Transformace 3D objektu do roviny pomocí matice. Koeficienty matice můžou realizovat libovolné natočení.*

Je-li A čtvercová matice, můžeme každému vektoru $\vec{q}$ přiřadit vektor $Y = A\vec{q}$ a tím definovat zobrazení n-rozměrného prostoru do sebe. Dá se ukázat, že takto dostaneme všechna zobrazení, která zobrazují úsečky na úsečky, počátek nechávají v počátku a jsou pěkná v tom smyslu, že zachovávají středy úseček, rovnoběžnost a lineární kombinaci vektorů. Ukázka zobrazení ve 2D.

Podobně je možné definovat i zobrazení mezi prostory jiných dimenzí. Například projekce 3D objektu do 2D. Protože zobrazení zachovává rovnoběžnost, není možné takto jednoduše obdržet například perspektivu. Protože se zachovává počátek, není možné zahrnout ani posunutí. V obou případech si pomáháme trikem, že přidáme další souřadnici, více viz Wikipedie a heslo Grafické transformace nebo Camera matrix.

Například matice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

zobrazí vektory $e_1 = (1, 0)$ a $e_2 = (0, 1)$ na

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Proto matice R_θ definuje zobrazení, které pootočí rovinu o úhel θ a nazývá se matice rotace. Matice malých rotací je (použitím lineární aproximace $\sin\theta \approx \theta$ a $\cos\theta \approx 1$ v okolí nuly)

$$R_{\theta,0} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}.$$

Tuto matici budeme potřebovat při studiu deformace při odvození matematického popisu malých deformací.

Matice jako zobrazení v materiálovém inženýrství

Matice chápejme jako zobrazení, které má na vstupu vektor a na výstupu opět vektor. Vstupem bývá většinou podnět, kde rozhodující je nejenom síla podnětu, ale i jeho směr. Například nerovnováha tlaku. Výstupem bývá odezva, například proudění vyvolané nerovnováhou tlaku. Tato odezva v izotropním prostředí má směr podnětu, v prostředí s určitou strukturou by se však směr odezvy mohl odchýlit.

Užitečnost maticového součinu v materiálovém inženýrství si můžeme znázornit na proudění vody po povrchu země. Voda teče z kopce dolů, tento směr však můžeme ovlivnit vyoráním brázd. Hnací síla je gravitace, která směřuje z kopce dolů. Odezvou na gravitaci je tok vody, který směřuje velkou rychlostí dolů, pokud je pooráno po spádnici, malou rychlostí dolů, pokud je pooráno po vrstevnici a pokud je pooráno našikmo, tak něco mezi směrem dolů a směrem brázdy. V materiálu se může odehrávat totéž.

Výše popsané chování pozorujeme i u proudění podzemní vody, kde hnací silou kromě hladiny podzemní vody může být tlak, nebo u proudění vody ve dřevě, kde hnací silou definující pojem "z kopce dolů" je nerovnoměrnost v rozložení koncentrace vody ve dřevě (jedna část dřeva má větší vlhkost než jiná část) nebo nerovnoměrnost v teplotě (termodifuze, Sorettův efekt, transport vlhkosti vyvolaný rozdílem teplot). Výsledné proudění však nemusí přesně sledovat pokles koncentrace vlhkosti. Například dřevo vede podélně vlhkost zpravidla více než desetkrát lépe než v jiných směrech a chová se tedy, jako by v něm byly brázdy odklánějící vodu do podélného směru.

Matematický prostředek, který umožňuje snadno vektoru změnit velikost nebo i směr je právě matice a maticový součin.

Na následujícím slidu se naučíme hledat v materiálu "směry brázd".

Vlastní čísla a vlastní vektory

U zobrazování vektorů pomocí maticového násobení nás velice zajímá, které směry se zachovávají, tj. kdy bude obrazem vektoru jeho násobek.

Definice (vlastní vektor a vlastní hodnota matice). Řekneme, že nenulový vektor $\vec{u}$ je *vlastním vektorem* matice A příslušným *vlastní hodnotě* λ, jestliže platí

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}.$$

Vlastní čísla se nazývají též vlastní hodnoty matice. Každý nenulový vlastní násobek vlastního vektoru je vlastní vektor příslušný téže vlastní hodnotě.

Poznámka (vlastní vektory a materiálové inženýrství). Vlastní vektory jsou nesmírně důležité, protože definují směry, podél nichž se zobrazení chová "pěkně". Tímto zobrazením může být třeba to, jak se působení vnější síly na těleso projeví na deformaci tohoto tělesa nebo jak se gradient teploty nebo vlhkosti projeví na proudění tepla či vody ve dřevě, půdě nebo jiném materiálu. Často se v aplikacích maticové zobrazení objevuje v *konstitučních vztazích*, vztazích mezi podnětem a materiálovou odezvou. Vlastní směry jsou tedy směry, ve kterých má odezva stejný směr jako podnět.

Pro pravidelně rostlé dřevo je snadné tyto směry určit, jsou to anatomické směry dřeva. Pro zkroucené dřevo nebo při studiu proudění vody, vzduchu či ropy v půdě to již tak snadné není a je nutné tyto směry vypočítat. To se naučíme později.

Příklad. Matice rotace nemá žádnou vlastní hodnotu (pokud tedy uvažujeme vlastní hodnoty v množině reálných čísel), protože pootočením se změní směr všech vektorů. Vlastní hodnoty existují pouze pro otočení o násobky 180°.

Příklad. Matice $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ (trojnásobek jednotkové matice) zobrazuje každý vektor na trojnásobek a všechny vektory jsou vlastními vektory této matice. Příslušná vlastní hodnota je 3.

Příklad. Matice $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ má vlastní vektor $(1, 0)$ příslušný vlastní hodnotě 3 a vlastní vektor $(0, 1)$ příslušný vlastní hodnotě 0. Protože vlastními vektory jsou i nenulové násobky, je vlastním vektorem každý nenulový vektor, který má nulovou druhou komponentu (vlastní hodnota je 3) nebo první komponentu (vlastní hodnota je 0).

Příklad. Platí $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}$ a matice $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ má vlastní vektor $(2, 1)$ příslušný vlastní hodnotě 2. Vlastním vektorem je i každý nenulovvý násobek vektoru $(2, 1)$.

Příklad. Stacionární stav Markovova řetězce je vlastním vektorem matice, která tento řetězec reprezentuje. Příslušná vlastní hodnota je 1. To plyne hned z rovnosti

$$M\vec{q} = \vec{q}.$$

Kromě toho mohou existovat i další vlastní hodnoty, z praktického hlediska méně zajímavé.

Příklad. Vlastní hodnoty a vektory jsou jedním z hlavních stavebních kamenů algoritmu, kterým Google provádí hodnocení důležitosti webových stránek. Vlatní vektory se počítají iteračně, odpovídá to vlastně modelu, kdy Markovův řetězec začneme v libovolném výchozím stavu a postupným iterováním se dostaneme do stacionárního stavu reprezentovaného vlastním vektorem.

Příklad. Leslieho matice má jednu kladnou vlastní hodnotu. Příslušný vlastní vektor definuje rozložení četnosti zastoupení jednotlivých věkových kategorií u populace ve stacionárním stavu. (Toto není tvrzení patrné na první pohled, ale dá se dokázat.)

V aplikacích často bývá matice "symetrická podle diagonály" a u takové matice vlastní vektory vždy existují. Co se přesně myslí pod pojmem "symetrická matice" si uvedeme na následujícím slidu.

Transponovaná matice

Definice (transponovaná matice). Buď $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matice. Matice, která vznikne záměnou řádků matice A za sloupce se nazývá *matice transponovaná k matici* A. Matici transponovanou označujeme symbolem A^T. Platí tedy $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a

$$A^T = (a_{ji}),$$

kde a_{ij} jsou prvky matice A.

Příklad. Matice transponovaná k matici $A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 9\end{pmatrix}$ je $A^T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 9\end{pmatrix}$.

Příklad. Skalární součin sloupcových vektorů (chápaných jako matice) $u = \begin{pmatrix}1\\ -2\\ a\end{pmatrix}$ a $v = \begin{pmatrix}2\\ -4\\ 1\end{pmatrix}$ je možno zapsat jako maticový součin

$$u^T v = \begin{pmatrix}1 & -2 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -4\\ 1\end{pmatrix} = (a + 10).$$

Příklad. Matice, která se nemění transponováním, tj. $a_{ij} = a_{ji}$ se nazývá **symetrická**. Matice, která splňuje $a_{ij} = -a_{ji}$ se nazývá **antisymetrická**. Pro libovolnou čtvercovou matici A platí

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

První matice v tomto součtu je symetrická a druhá antisymetrická. Takto je možné rozložit matici na součet symetrické a antisymetrické matice. Například matice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

má tento rozklad ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tento trik použijeme pro odvození tvaru tenzoru malých deformací.

Věta (souvislost transponování matice a maticového součinu). *Pro čtvercové matice platí*

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Příklad. Pro Markovův řetězec s maticí a sloupcovými vektory $\vec{q}$ dostaneme transponováním vztahu

$$\vec{q}_{k+1} = A\vec{q}_k$$

vztah

$$\vec{q}_{k+1}^{\,T} = \vec{q}_k^{\,T} A^T$$

s řádkovými vektory a maticí, která má součet čísel v každém řádku roven 1. Takto jsou Markovovy řetězce také často zaváděny, například na Wikipedii.

Tenzor malých deformací

Zobrazení roviny do sebe, které může odpovídat deformaci tělesa působením síly, je možné popsat dvojicí funkcí $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$. Lineární aproximace těchto funkcí v okolí bodu (x_1, x_2) dávají (viz závěr prezentace z přednášky věnované derivacím, kdy ještě vpravo pro stručnost vynecháváme argument (x_1, x_2))

$$\begin{aligned} u_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) &\approx u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Delta x_2, \\ u_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) &\approx u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Delta x_2, \end{aligned}$$

což je možné zapsat maticově jako

$$\begin{pmatrix} u_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \\ u_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}.$$

Člen $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ je posunutí, proto nás zajímá až druhý člen, obsahující deformaci. Pokud matici

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

rozdělíme stejným obratem jako na předešlém slidu na součet symetrické a antisymetrické matice, dostaneme

$$D = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}}^{D_{\text{sym}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & 0 \end{pmatrix}}_{D_{\text{asym}}}.$$

Druhá část reprezentuje pootočení, což snadno nahlédneme, pokud tuto informaci sečteme s identitou reprezentovanou jednotkovou maticí na

$$D_{\text{asym}} + I = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

abychom měli celou část zobrazení (ne jenom deformaci). Porovnáním s maticí malých rotací

$$R_{\theta,0} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$$

odvozenou na jednom z předchozích slidů získáme přímo pootočení. V teorii deformace nás zajímá spíše symetrická část, tj. matice

$$D_{\text{sym}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

popisující změnu tvaru a nazývaná *tenzor malých deformací*. Ten se ještě někdy rozděluje na součet vhodného konstantního násobku jednotkové matice (souvisí se zvětšením nebo zmenšením, tj. se změnou objemu) a deviátor (souvisí se zmenou tvaru bez započtení zvětšení či zmenšení).

Pro využití v dřevařských úlohách viz též A. Požgaj, Štruktúra a vlastnosti dreva str 318 nebo P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I, str. 40. Analogicky, ale pro rychlosti, je definován tenzor rychlosti přetvoření (deformační rychlost) používaný v hydrodynamice. Můžeme ji dostat jako derivaci tenzoru malých deformací (při studiu deformací), nebo jako symetrickou část matice vytvořené gradienty jednotlivých komponent rychlosti proudění. Pro proudění vody viz J. Říha, Matematické modelování hydrodynamických a disperzních jevů, kap. 3.3.

Obrázky a online výpočty.

Rozložení teploty na tepelně vodivé desce

Uvažujme čtvercovou desku, kterou si rozdělíme sítí na 12 uzlových bodů (rohy zanedbáme) jak je uvedeno na obrázku. V uzlových bodech na okraji desky je teplota zadána (okrajová podmínka), zajímá nás rozložení teploty v ostatních uzlových bodech.

Učiníme (poměrně realistický) předpoklad, že teplota v každém uzlovém bodě je díky tepelné vodivosti desky ovlivněna sousedními uzlovými body. Každý sousední bod má stejný vliv, proto teplota v uzlovém bodě bude přibližně rovna aritmetickému průměru teplot v sousedních bodech. Kvantitativně zformulováno, platí

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}(30 + x_2 + x_4)\\ x_2 &= \frac{1}{4}(60 + x_1 + x_3)\\ x_3 &= \frac{1}{4}(70 + x_2 + x_4)\\ x_4 &= \frac{1}{4}(40 + x_1 + x_3) \end{aligned} \tag{1}$$

anebo po úpravě

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - \phantom{x_3 +{}} x_4 &= 30\\ -x_1 + 4x_2 - x_3 \phantom{{}- x_4} &= 60\\ -x_2 + 4x_3 - x_4 &= 70\\ -x_1 \phantom{{}+ x_2} - x_3 + 4x_4 &= 40 \end{aligned}$$

Dostali jsme soustavu lineárních rovnic o čtyřech neznámých. Tuto úlohu je možno zformulovat pomocí lineární kombinace

$$\begin{pmatrix}4\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix}-1\\4\\-1\\0\end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix}0\\-1\\4\\-1\end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\4\end{pmatrix} x_4 = \begin{pmatrix}30\\60\\70\\40\end{pmatrix}$$

nebo pomocí maticového násobení (s vynechanými nulami uvnitř matice)

$$\begin{pmatrix}4 & -1 & & -1\\ -1 & 4 & -1 & \\ & -1 & 4 & -1\\ -1 & & -1 & 4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}30\\60\\70\\40\end{pmatrix}.$$

Úloha je tedy převoditelná na úlohu řešení soustavy lineárních rovnic. Pro podrobnější popis použijeme stejnou myšlenku, ale mnohem více uzlových bodů. Postup je stejný, pouze vznikne soustava s více neznámými a více rovnicemi.

Poznámka. Rovnice popisující vedení tepla na základě fyzikálních principů je poměrně komplikovaně řešitelná a proto se zpravidla převádí na problém lineární algebry. Může to znít překvapivě, ale skončíme u něčeho podobného jako v našem jednoduchoučkém modelu. Výše uvedený postup se nazývá metoda konečných diferencí, ale jsou i další metody, například metoda konečných prvků. Společným znakem je rozdělení oblasti našeho zájmu na velké množství bodů a aproximace fyzikálních zákonů pro sledovaný jev v každém bodě pomocí lineární rovnice. Tím vznikne úloha na řešení soustavy rovnic. Používá se k modelování proudění tepla nebo vody, k modelování mechanického namáhání od jednoduchých nosníků po komplikované konstrukce nebo stromy. Soustava vytvořená pomocí takových modelů je velmi řídká, má hodně nul. Je proto možné ji rychle vyřešit i v případě tisíců rovnic. My se později například naučíme chytře využít toho, že každý řádek má v hlavní diagonále větší číslo, než je součet zbylých čísel v tomto řádku.

Poznámka. Ukážeme řešení soustavy (1) iterační metodou. Zatím budeme postupovat intuitivně, vyjdeme z libovolného odhadu řešení a teplotu v každém bodě budeme opakovaně nahrazovat průměrem teplot v okolních bodech, dokud se hodnoty neustálí. Kdy tento postup funguje a jak se dá zformalizovat si ukážeme později (Jaobiho metoda).

Online výpočet.

Kapitola 8

Lineární algebra (inverzní matice a determinanty)

Inverzní matice

U reálných čísel máme doplňkové operace ke sčítání a násobení. Jsou to odečítání a dělení. Odečítání matic můžeme implementovat jako sčítání matice s maticí vynásobenou minus jedničkou: $A-B = A+(-B)$. Oproti tomu operace dělení matic vůbec není implementována. U reálných čísel lze dělení nahradit násobením převrácenou hodnotou: $\frac{a}{b} = ab^{-1}$. Tuto proceduru částečně rozšíříme pro matice. Připomeňme ještě, že roli neutrálního prvku při násobení matic hraje jednotková matice. Například pro matice 3×3 je jednotková matice

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definice (inverzní matice). Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ čtvercová matice řádu n. Jestliže existuje čtvercová matice A^{-1} řádu n, splňující vztahy

$$A^{-1}A = I = AA^{-1},$$

nazýváme matici A^{-1} *inverzní maticí k matici* A.

Poznámka. Předchozí definice nezaručuje existenci inverzní matice. K některým čtvercovým maticím inverzní matice existuje, k některým ne. Později uvidíme, že existuje jednoduchá charakterizace matic, ke kterým inverzní matice existuje, pomocí determinantu matice.

Věta (inverze maticového součinu). *Inverzní matice k součinu dvou matic je součinem jednotlivých inverzních matic, ale v opačném pořadí, tj.*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Příklad. Pomocí matic a jejich součinu je možné zapsat libovolnou permutaci konečněprvkové množiny. Známým permutačním hlavolamem je Rubikova kostka. Na ní snadno vidíme, že pokud kostku zamícháme ze složeného stavu tahem v horní stěně a poté v pravé stěně, pro opětovné složení musíme vracet tahy v opačném pořadí, tj. nejdřív vrátit tah v pravé stěně a poté ve stěně horní. Pěkně to jde vidět na následující animaci, kterou můžete spustit nebo přehrávat po jednotlivých krocích.

Využití inverzní matice pro řešení soustavy lineárních rovnic

Z minulé přednášky víme, že pomocí maticového násobení je možné soustavu lineárních rovnic zapsat ve tvaru

$$AX = B,$$

kde A je matice soustavy, X je sloupcový vektor neznámých a B je vektor pravých stran. Pokud má matice A inverzní matici, můžeme pomocí této matice soustavu vyřešit. Po vynásobení rovnice inverzní maticí zleva dostáváme

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

a po uplatnění asociativního zákona

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B.$$

Protože výraz v závorce je součinem matice s maticí inverzní, je tento součin roven jednotkové matici, která je neutrálním prvkem při násobení a proto okamžitě dostáváme řešení soustavy ve tvaru

$$X = A^{-1}B.$$

Jako přirozený důsledek vidíme, že řešení je určeno jednoznačně. Známe-li inverzní matici, můžeme řešení dokonce vypočítat pro libovolnou pravou stranu velmi pohodlně a rychle pomocí maticového násobení. Bohužel, výpočet inverzní matice je zpravidla velmi drahý (vyžaduje velké množství operací) a numericky málo stabilní. Proto je tento postup užitečným teoretickým nástrojem, ale v praxi postupujeme poněkud odlišně.

Inverzní matice k matici 2×2

Inverzní matice k matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{*}$$

je

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ze vzorce vidíme, že matice inverzní k matici (*) neexistuje, pokud platí

$$ad - bc = 0,$$

tj.

$$ad = bc$$

a

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Toto nastane právě tehdy, když jeden řádek bude násobkem druhého, nebo ekvivalentně pokud jeden sloupec bude násobkem druhého.

Příklad. Pro matici rotace

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

z minulé přednášky platí

$$\begin{aligned}
(R_\theta)^{-1} &= \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\
&= R_{-\theta},
\end{aligned}$$

což je přirozené pokud si uvědomíme, že inverzní operací k pootočení roviny o úhel θ je pootočení roviny o úhel opačný.

Odsud mimo jiné vidíme, že platí

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^T,$$

tj. že inverzní a transponovaná matice jsou v případě matice rotace stejné. To je velká náhoda, ale přesto matice s touto vlastností hrají tak důležitou roli, že si vysloužily vlastní název představený na dalším slidu.

Ortogonální matice

Definice (ortogonální matice). *Ortogonální matice* je matice, jejíž transponovaná matice je současně maticí inverzní.

Řádky ortogonální matice jsou tvořeny navzájem kolmými vektory jednotkové délky. Má-li například symetrická čtvercová matice A řádu n celkem n lineárně nezávislých jednotkových vlastních vektorů, potom matice vytvořená tak, že sloupce nebo řádky matice jsou tyto vektory, je ortogonální.

Inverzní matice k diagonální matici

Diagonální matice (tj. matice, které mají nenulové prvky jenom na hlavní diagonále) se vzhledem k násobení chovají velice hezky: součinem je taková matice, která je diagonální a na hlavní diagonále má prvky vytvořené jako součin odpovídajících prvků násobených matic.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Proto je snadné zařídit, aby v hlavní diagonále vyšly jedničky. Stačí uvažovat podobně jako v následujícím příkladě.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Iterační metoda řešení soustav lineárních rovnic

Na předchozím slidu jsme viděli, že je jednoduché najít inverzní matici k matici diagonální. Toho využijeme pro řešení soustavy lineárních rovnic iterační metodou. Představíme si nejjednodušší, přesto však velmi mocnou metodu, **Jacobiho metodu**.

V minulé přednášce jsme modelovali rozložení teploty ve dvourozměrné desce pomocí soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 70 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Pro

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 70 \\ 40 \end{pmatrix}$$

tedy

$$AX = B. \tag{1}$$

Rozdělíme matici A na součet diagonální matice a matice s nulami v hlavní diagonále, tj. na součet matic

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Potom můžeme psát rovnici ve tvaru

$$(D + T)X = B$$

a odsud

$$DX + TX = B$$
$$DX = B - TX$$

a využitím inverzní matice

$$X = D^{-1}(B - TX). \tag{2}$$

Definujme nyní iterační vzorec

$$X_{k+1} = D^{-1}(B - TX_k). \tag{3}$$

Podobně jako u Markovových řetězců můžeme najít postupnými iteracemi z vhodného (nebo libovolného) počátečního stavu stacionární stav, kdy se X_k dalšími iteracemi nemění a tím dostaneme řešení rovnice (2), která je ekvivalentní rovnici (1). Protože inverzní matici počítáme pro matici diagonální, je tento výpočet velice rychlý a levný. Vlastně není vůbec nutné mít k dispozici maticový počet. Iterace dostaneme tak, že z první rovnice osamostatníme x_1, z druhé rovnice x_2 atd. Výchozí odhad dosadíme do pravých stran a obdržíme zpřesněný odhad. Postup opakujeme, dokud nejsou dvě následující iterae dostatečně blízké.

Poznámka. Předchozí postup je možné použít jenom v případě, že iterační proces (3) konverguje. Pokud by nekonvergoval, není možné o řešení rovnice nic říct, pouze to, že Jacobiho metoda nefunguje. Postačující podmínka, kdy Jacobiho metoda konverguje, je aby každý řádek měl v hlavní diagonále číslo, které je v absolutní hodnotě větší než je součet absolutních hodnot zbylých čísel v tomto řádku. Matice, která splňuje tuto podmínku se nazývá *řádkově ostře diagonálně dominantní matice* a pro takovou matici Jacobiho metoda konverguje. Podobně je možné uvažovat *sloupcově ostře diagonálně dominantní matice* porovnáním absolutních hodnot diagonálních prvků se součty absolutních hodnot ostatních prvků v daných sloupcích a i pro sloupcově ostře diagonální matice metoda konverguje. I přes jednoduchost tohoto kriteria se s diagonálně dominantními maticemi setkáváme v aplikacích poměrně často. Podíváme-li se, jak byla odvozena soustava popisující rozložení teploty na tepelně vodivé desce (poslední slajd minulé přednášky), není to až takové překvapení.

Online výpočet.

Podobnými iteračními metodami je možné efektivně řešit soustavy o tisících rovnic a neznámých. Výpočty probíhají rychle a nejsou náročné na paměť jako u přímých metod, známých například ze střední školy. Tímto způsobem se řeší soustavy rovnic při modelování namáhání konstrukcí, vedení tepla, proudění vody apod.

Determinant matice

Definice (determinant). Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ čtvercová matice řádu n. *Determinant matice* A je reálné číslo $\det A$ přiřazené matici A následujícím způsobem:

- Je-li A matice řádu 1, tj. $A = (a_{11})$, je $\det A = a_{11}$.
- Máme-li definován determinant z matice řádu $(n-1)$ označme symbolem M_{ij} determinant matice řádu $(n-1)$, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Definujme *algebraický doplněk* A_{ij} prvku a_{ij} jako součin $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.
- Konečně, definujme determinant řádu n následovně: zvolíme libovolný index $i \in \{1, 2, \dots n\}$ a definujeme

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

Uff. Zacházejme vyjímečně s touto definicí stejně jako s definicí limity: vezmeme na vědomí, že nějaká korektní definice existuje, ale učit se ji nebudeme. Není to totiž tak úplně potřeba. bude nám stačit naučit se několik málo speciálních případů.

Determinant matice A označujeme též $|A|$. Je-li $A = (a_{ij})$ píšeme zkráceně $|a_{ij}|$ místo $|(a_{ij})|$. K záměně s absolutní hodnotou může dojít jedině v případě, že matice A je řádu jedna. V praxi se však obvykle s maticemi řádu jedna nepracuje.

Definice (regulární a singulární matice). Buď A čtvercová matice. Je-li $\det A = 0$, říkáme, že matice A je *singulární*, v opačném případě říkáme, že je *regulární*.

Determinant matice 2×2 (křížové pravidlo)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Tento determinant je přesně výraz, který jsme viděli ve jmenovateli vzorce pro inverzní matici ke čtvercové matici druhého řádu.

Determinant matice 3×3 (Sarusovo pravidlo)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ x & y & z \end{vmatrix} = ajz + bkx + ciy - (cjx + biz + aky)$$

Mnemotechnická pomůcka: opsat první dva řádky pod determinant, vynásobit hlavní diagonálu a dvě diagonály pod tím, potom vynásobit vedlejší diagonálu a dvě diagonály pod tím. Příspěvky od hlavní diagonály a dvou šikmých řad pod ní se sčítají, příspěvky od vedlejší diagonály a dvou šikmých řad pod ní se odečítají.

Determinant matice ve schodovitém tvaru

Definice (schodovitý tvar). Řekneme, že matice A je ve *schodovitém tvaru*, jestliže případné nulové řádky jsou uspořádány na konci matice a nenulové jsou uspořádány tak, že každý následující řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí.

Příklad. Matice
$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
je ve schodovitém tvaru.

Věta (determinant matice ve schodovitém tvaru). *Determinant matice, která je ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků v hlavní diagonále.*

Totéž platí zejména pro matice diagonální, které mají nenulové prvky jenom v hlavní diagonále a tedy jsou ve schodovitém tvaru.

Příklad. Platí
$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) \cdot 5 = -40.$$

Souvislost některých pojmů

Pojmy lineární algebry spolu krásně souvisí.

Věta. *Buď A čtvercová matice řádu n. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

1. *Řádky matice A jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory.*
2. *Sloupce matice A jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory.*
3. *K matici A existuje matice inverzní A^{-1}.*
4. *Matice A je regulární, tj. $\det A \neq 0$.*
5. *Soustava lineárních rovnic*
$$AX = B$$
má pro libovolnou pravou stranu B jediné řešení.
6. *Homogenní soustava lineárních rovnic*
$$AX = 0$$
má pouze nulové řešení.
7. *Každý vektor z $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (sloupci) matice A, a to jednoznačně, až na pořadí.*

Například je-li $\vec{q}$ vlastním vektorem matice A příslušným vlastní hodnotě λ, platí
$$A\vec{q} = \lambda\vec{q}.$$
Odsud
$$A\vec{q} - \lambda\vec{q} = 0$$
$$A\vec{q} - (\lambda I)\vec{q} = 0.$$
$$(A - \lambda I)\vec{q} = 0$$
Pokud chápeme poslední rovnost jako soustavu rovnic s koeficienty $(A - \lambda I)$, nulovou pravou stranou a nenulovým řešením $\vec{q}$ (tj. bod 6 předchozí věty neplatí), musí být determinant matice $A - \lambda I$ nulový (tj. bod 4 předchozí věty neplatí). Tím je motivována následující definice a dokázána následující věta.

Definice (charakteristická rovnice, charakteristický polynom). Rovnice

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

s neznámou λ se nazývá *charakteristická rovnice* matice A. Výraz na levé straně této rovnice je polynom proměnné λ a nazývá se *charakteristický polynom* matice A.

Důsledek (vlastní čísla). *Vlastní čísla matice A jsou právě řešení charakteristické rovnice.*

Změna báze a matice přechodu

Předpokládejme, že obě dvojice $\mathcal{E} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ a $\mathcal{F} = [\vec{f}_1, \vec{f}_2]$ jsou báze dvourozměrného vektorového prostoru. Tedy každý vektor můžeme zapsat jako jejich lineární kombinaci a to jednoznačně. Pokud platí

$$X = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = b_1\vec{f}_1 + b_2\vec{f}_2,$$

jsou $[X]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ souřadnice v bázi $\mathcal{E}$ a $[X]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ souřadnice v bázi $\mathcal{F}$. Pro dvojici bází existuje matice P typu 2×2 taková, že

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Tato matice se nazývá matice přechodu a umožňuje najít souřadnice vektoru v jedné bázi pomocí souřadnic vektoru v jiné bázi. Matice přechodu musí být regulární a proto evidentně můžeme mezi bázemi přecházet i v opačném směru směru pomocí inverzní matice

$$P^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Ukážeme si důležité využití matice přechodu. Předpokládejme, že máme zobrazení $f\colon X \to Y$, které je možno charakterizovat maticemi. Na vstupu i výstupu jsou tedy vektory a jejich směry si obecně nemusí odpovídat. Může se jednat třeba o zobrazení, které působícím silám přiřadí deformaci tělesa, což uvidíme v Hookově zákoně na dalším slidu. Může se jednat také o zobrazení, které vektoru charakterizujícímu změnu tlaku v podzemní vodě přiřadí směr proudění. (Oba směry si nemusí odpovídat, protože voda je poháněna rozdílem tlaků ve směru největšího poklesu tlaku, ale současně si v anizotropním prostředí hledá cestu nejmenšího odporu).

Nechť je naše zobrazení vyjádřeno v nějaké bázi $\mathcal{B}$ maticí A, tj.

$$Y = AX,$$

kde X a Y jsou souřadnice vzoru a obrazu v dané bázi. Budeme chtít zobrazení vyjádřit v jiné bázi. Například v bázi $\lfloor$ takové, že platí $X = Px$ a $Y = Py$, kde malá písmena jsou souřadnice v “malé” bázi b. Dosazením získáme

$$Py = APx$$

a po vynásobení inverzní maticí

$$P^{-1}(Py) = P^{-1}(APx),$$

tj

$$y = (P^{-1}AP)x.$$

V bázi b je tedy zobrazení charakterizováno maticí $P^{-1}AP$. Pro vhodně zvolenou matici P může být matice v nové bázi podstatně jednodušší než matice v bázi původní.

V následujícím příkladě si ukážeme, že vhodně zvolenou maticí P můžeme dosáhnout toho, že $P^{-1}AP$ je diagonální matice. Na dalším slidu již rovnou zvolíme vhodnou bázi a matice, která bude sice impozantních rozměrů 6×6, bude plná nul a proto relativně pěkná.

Příklad. Pro matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ platí (po chvilce počítání)

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

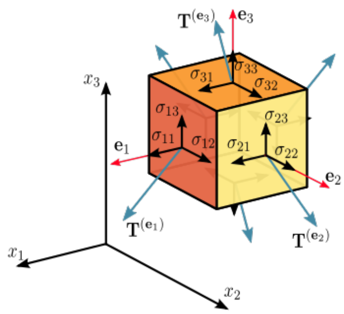
Odsud vidíme, že v souřadnicích ke kterým bychom přešli pomocí matice P je vyjádření zobrazení matice A mnohem jednodušší, protože matice $P^{-1}AP$ je diagonální.

Častým úkolem je zapsat vztahy mezi veličinami tak, aby byly co nejjednodušší a proto jeden z častých úkolů v lineární algebře bývá takovou šikovnou bázi nalézt. Nastíníme neoptimističtější variantu postupu, případné detaily a řešení zádrhelů je možné najít v odborné literatuře. Zpravidla vyjadřujeme zobrazení v bázi tvořené ortonormálními vlastními vektory matice A. Sloupce matice P jsou vlastní vektory matice A. Pokud je matice A symetrická, je matice P navíc ortogonální, její inverze je tedy matice transponovaná. Tomuto procesu se říká diagonalizace matice, protože $P^{-1}AP$ vychází diagonální a v diagonále vychází právě vlastní čísla matice.

Hookův zákon, matice tuhosti a poddajnosti

V minulé přednášce jsme odvodili tvar tenzoru malých deformací pro popis deformace tuhého tělesa ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$



Obrázek 8.1: *Složky tenzoru napětí charakterizují sílu způsobující deformaci. Zdroj: Wikiepdie.*

Toto můžeme zapsat symbolicky

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \qquad (*)$$

Pro deformaci v prostoru máme nikoliv dvě, ale tři souřadnice a tenzor deformací je tedy 3×3 symetrická matice, tj. matice, která má šest nezávislých komponent. (Zbylé tři komponenty dostaneme ze symetrie.) Tyto komponenty dostaneme postupnou volbou indexů ve vzorci (*) a můžeme je sestavit do sloupcového vektoru

$$(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12})^T$$

Podobně, působící sílu můžeme rozdělit podle působení v jednotlivých směrech a tím dostaneme tenzor napětí, šest veličin charakterizujících napětí. (Zbylé tři jsou dány podmínkou, že se deformované těleso nepohybuje.) Pro další úvahy složky tenzoru napětí uspořádáme do sloupcového vektoru

$$(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T.$$

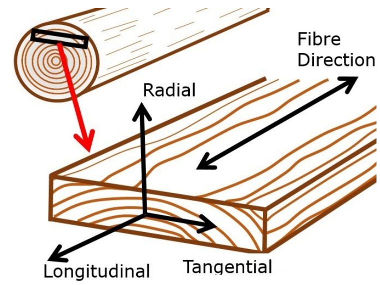
Následující poučka je fyzikálně ověřený fakt, že vztah mezi složkami tenzoru napětí a tenzoru deformace je lineární. To nás nepřekvapí, protože z přednášek o derivacích na začátku semestru víme, že **jakákoliv** funkční závislost se dá linearizovat. Podstatné zde však je, že interval, na kterém má linearizace smysl, není příliš malý, tj. že tato linearizace platí pro prakticky významné případy.

Hookův zákon deformace (volná slovní formulace). Do určité hranice zatížení je libovolná složka tenzoru deformace úměrná libovolné složce tenzoru napětí.

K tomu si přidejme, že příspěvky k deformaci, způsobené různými složkami tenzoru napětí, se přirozeně sčítají. Matematicky vyjádřeno proto platí

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{12}\end{pmatrix} = C \begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix},$$

kde C je čtvercová 6×6 matice.



Obrázek 8.2: *Ortotropie dřeva. Zdroj: researchgate.net, Mathew Legg.*

Fyzikální úvahy ukazují, že matice C je určitě symetrická a obsahuje celkem ne 36, ale jenom 21 nezávislých veličin. Nazývá se *matice tuhosti*. V obecném případě tedy musíme pro popis deformace mít celkem 21 materiálových konstant. Tento počet se však výrazně redukuje, pokud je materiál například izotropní nebo ortotropní. Například ortotropní materiál jakým je dřevo, můžeme umístit do soustavy souřadnic tak, aby byl invariantní vůči symetrii podle jednotlivých průměten. Poté je možné odvodit, že nejobecnější možný tvar matice C je

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{pmatrix},$$

tj. tvar, obsahující jenom devět materiálových konstant. Odsud vidíme, že v takovém materiálu se smykové napětí projeví jenom na jedné komponentě tenzoru deformace, protože poslední tři sloupce, které udávají složky jednotlivých deformací způsobených napětími σ_{23}, σ_{13} a σ_{12} mají jenom jednu nenulovou složku.

Pokud bychom použili k popisu obecnou soustavu souřadnic, nebylo by možné se na symetrii odvolávat. Matice C by obsahovala všechny prvky a bylo by nutné hledat bázi, v níž je její vyjádření nejjednodušší. U dřeva je však snadné rozpoznat význačné směry. Když soustavu souřadnic zvolíme tak, aby byla v souladu s těmito význačnými směry, docílíme tohot, že obdržíme matici C již přímo ve tvaru s co nejvíce nulami.

Někdy je vhodné umět určit napětí pomocí deformací. K tomu stačí Hookův zákon vynásobit maticí C^{-1} a obdržíme

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{12}\end{pmatrix}.$$

Matice C^{-1} se nazývá *matice poddajnosti* a označuje S.

Souvislostí vlastních vektorů matice tuhosti a matice poddajnosti (nebo obecněji souvislostí vlastních vektorů matice a matice inverzní) se budeme zabývat na následujícím slidu.

Vlastní vektory matice a matice inverzní

Fyzikální úvaha snadno vede k závěru, že matice a matice inverzní mají stejné vlastní vektory. To proto, že pokud v některém směru je materiálová odezva násobkem podnětu, je i opačně podnět násobkem materiálové odezvy. To, že matice A a A^{-1} mají stejné vlastní vektory plyne i z toho, že pokud definiční vztah pro vlastní vektor matice A, tj. vztah

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u},$$

vynásobíme zleva maticí $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$, dostaneme vzhledem k identitě $\frac{1}{\lambda}A^{-1}A\vec{u} = \frac{1}{\lambda}I\vec{u} = \frac{1}{\lambda}\vec{u}$ rovnici

$$\frac{1}{\lambda}\vec{u} = A^{-1}\vec{u},$$

která vyjadřuje, že $\vec{u}$ je vlastním vektorem matice A^{-1} s vlastním číslem $\frac{1}{\lambda}$.

Kapitola 9

Lineární algebra (soustavy lineárních rovnic, transformace tenzorů)

Varianty zápisu soustavy lineárních rovnic

Uvažujme následující tři problémy:

1. Najděte všechna reálná čísla x_1, x_2, splňující dvojici rovnic

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

2. Najděte všechna reálná čísla x_1, x_2, splňující vektorovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. Najděte všechna reálná čísla x_1, x_2, splňující maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Všechny problémy jsou ekvivalentní a jedná se o jiný zápis téhož. Jednou však používáme soustavu rovnic, vektory a jejich lineární kombinaci a jednou matice a maticový součin!

Soustava lineárních rovnic

Definice (soustava lineárních rovnic). *Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých* nazýváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

Proměnné x_1, x_2, ..., x_n nazýváme *neznámé*. Reálná čísla a_{ij} nazýváme *koeficienty levých stran*, reálná čísla b_j *koeficienty pravých stran* soustavy rovnic. *Řešením soustavy rovnic* rozumíme uspořádanou n-tici reálných čísel $[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ po jejichž dosazení za neznámé (v tomto pořadí) do soustavy dostaneme ve všech rovnicích identity.

Definice (matice soustavy). Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme *maticí soustavy* (1). Matici

$$A_r = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

nazýváme *rozšířenou maticí soustavy* (1).

Vektorový zápis soustavy lineárních rovnic

Soustavu (1) lze ekvivalentně přepsat do vektorového tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} x_3 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Vidíme tedy, že se vlastně jedná o problém, vyjádřit vektor složený z čísel na pravé straně soustavy rovnic jako lineární kombinaci vektorů, které tvoří sloupce matice soustavy.

Maticový zápis soustavy lineárních rovnic

Soustavu (1) lze ekvivalentně přepsat do maticového tvaru pomocí maticového součinu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Tento tvar se používá často v inženýrských výpočtech pro úspornost. Symbolicky zpravidla píšeme soustavu lineárních rovnic ve tvaru

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

nebo

$$AX = B$$

kde A je matice soustavy a $\vec{b}$ resp. B je vektor pravých stran.

Hodnost matice

Matice řádu $m \times n$ obsahuje celkem $m \cdot n$ čísel. Jedná se tedy o relativně komplikovaný objekt. V matematice se často snažíme složitější objekty nějakým způsobem charakterizovat pomocí objektů jednodušších, např. pomocí čísel. Jedno už známe, determinant. Dalším z těchto čísel je hodnost matice, kterou si nadefinujeme nyní.

Definice (hodnost matice). Buď A matice. *Hodností matice* rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků matice. Hodnost matice A označujeme $h(A)$.

Poznámka: Hodnost je v anglické literatuře označována jako *rank*.

Schodovitý tvar jsme si představili u determinantu. U matice ve schodovitém tvaru je určení determinantu velmi jednoduché. Podobný efekt vidíme i u hodnosti.

Definice (schodovitý tvar). Řekneme, že matice A je ve *schodovitém tvaru*, jestliže případné nulové řádky jsou uspořádány na konci matice a nenulové jsou uspořádány tak, že každý následující řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí.

Věta (hodnost matice ve schodovitém tvaru). *Hodnost matice, která je ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.*

Příklad. Matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je ve schodovitém tvaru a $h(A) = 3$. Matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ není ve schodovitém tvaru a její hodnost na první pohled nepoznáme.

Výpočet hodnosti

Výpočet hodnosti se provádí postupným nahrazením zadané matice maticí, která má stejnou hodnost, ale postupně se přibližuje schodovitému tvaru. Uvedeme si jenom základní postup. Tento se sice dá vylepšit, pro nás je však důležité, že i bez jakýchkoliv vylepšení vždy vede k cíli. (Alespoň teoreticky.)

Věta (řádkové operace zachovávající hodnost matice). *Následující operace nemění hodnost matice:*

1. *vynechání řádku složeného ze samých nul, nebo vynechání řádku, který je totožný s jiným řádkem, nebo vynechání řádku, který je násobkem jiného řádku,*
2. *vynásobení nebo vydělení libovolného řádku nenulovým číslem,*
3. *záměna pořadí řádků,*
4. *ponechání jednoho řádku beze změny a opakované přičtení libovolných násobků tohoto řádku k nenulovým násobkům ostatních řádků matice.*

Libovolnou matici lze konečným počtem těchto úprav převést do schodovitého tvaru.

Následující věta udává, že veškerá tvrzení, uvedená v souvislosti s hodností pro řádky matice, se dají přeformulovat i pro sloupce matice.

Věta. *Transponování nemění hodnost matice.*

Existence a jednoznačnost řešení soustavy lineárních rovnic

V případě, že matice soustavy je čtvercová již víme, že řešení je určeno jednoznačně právě tehdy, když má matice soustavy matici inverzní. O počtu řešení v obecném případě obdélníkové matice, kdy matici inverzní nemá smysl uvažovat, nám dávají informaci dvě následující věty. První se týká existence řešení a druhá identifikuje případ, kdy řešení je určeno jednoznačně.

Věta (Frobeniova věta, Kronecker-Capelliho věta). *Soustava lineárních rovnic je řešitelná právě tehdy, když její matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnost.*

Věta (jednoznačnost řešení). *Nechť soustava lineárních rovnic má řešení. Toto řešení je právě jedno, pokud je společná hodnost matice soustavy a rozšířené matice soustavy rovna počtu neznámých. V opačném případě je společná hodnost matice a rozšířené matice soustavy menší než počet neznámých.*

Gaussova eliminace

Spočívá v reprezentaci soustavy pomocí rozšířené matice soustavy a převodu této matice na schodovitý tvar pomocí řádkových operací zachovávajících hodnost. Tyto operace zachovávají i množinu řešení soustavy. Jakmile je matice ve schodovitém tvaru, zpětnou substitucí postupně dopočítáváme jednotlivé proměnné. (Formálně to u čtvercových regulárních matic odpovídá použití inverzní matice k matici, která má pod hlavní diagonálou nuly. Ale postup funguje i pro obecnější matice a dá se realizovat jednoduchými prostředky a postupným dosazováním.)

Gaussova eliminace je velice flexibilní a univerzální, umožní nám řešit i soustavy mající nekonečně mnoho řešení. V tomto případě dokážeme zapsat řešení pomocí parametrů.

Příklad.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

V prvním kroku převedeme na tvar, kdy jednom jeden řádek začíná nenulovým prvkem. První řádek už nijak neupravujeme a opíšeme jej. Místo druhého řádku napíšeme jeho součet s (-1)-násobkem prvního řádku.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

V dalším kroku převedeme na tvar, kdy z řádků začínajících jednou nulou ponecháme jenom jeden a ostatní upravíme tak, aby začínaly alespoň dvěma nulami. K tomu je vhodné nejprve přehodit poslední dva řádky, abychom mohli použít k vytváření nul jedničku.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Nyní provedeme potřebnou úpravu. První dva řádky opíšeme. Místo třetího řádku napíšeme jeho součet s trojnásobkem druhého řádku.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

Nyní přepišme do tvaru soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\ -7x_3 \qquad &= 7 \end{aligned}$$

Z poslední rovnice máme snadno $x_3 = -1$. Tutho hodnotu použijeme ve druhé rovnici. Protože však máme pořád dvě neznámé, jednu z nich zvolíme za parametr.

$$\begin{aligned} x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 + 2 + x_4 &= 2 \\ x_2 + x_4 &= 0 \\ x_4 &= t \\ x_2 &= -t \end{aligned}$$

Vypočtené hodnoty dosadíme do první rovnice a určíme zbývající neznámou x_1.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2t - 2 + t &= 0 \\ x_1 &= 2 + t \end{aligned}$$

Řešení je $x_1 = 2+t$, $x_2 = -t$, $x_3 = -1$, $x_4 = t$, kde t je libovolné reálné číslo. Vektorově (maticově) máme řešení ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t \\ -t \\ -1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gaussova-Seidelova iterační metoda

Gaussova-Seidelova iterační metoda je jakýsi mezikrok mezi Jacobiho iterační metodou a Gausovou eliminací. Postupujeme jako v Jacobiho metodě, ale všechny zpřesněné hodnoty použijeme okamžitě, když jsou k dispozici. Nikoliv až v další iteraci jako u Jacobiho metody. Metoda konverguje za stejných podmínek jako Jacobiho metoda, ale rychleji a přesto nevznikají vyšší nároky na výpočetní výkon.

Použijeme příklad z Wikipedie. Soustavu

$$\begin{array}{rrrrl} 10x_1 & -x_2 & +2x_3 & & = 6, \\ -x_1 & +11x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 25, \\ 2x_1 & -x_2 & +10x_3 & -x_4 & = -11, \\ & 3x_2 & -x_3 & +8x_4 & = 15. \end{array}$$

s diagonálně dominantní maticí převedeme na iterační tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2/10 - x_3/5 + 3/5, \\ x_2 &= x_1/11 + x_3/11 - 3x_4/11 + 25/11, \\ x_3 &= -x_1/5 + x_2/10 + x_4/10 - 11/10, \\ x_4 &= -3x_2/8 + x_3/8 + 15/8. \end{aligned}$$

Poté vyjdeme z počátečního odhadu řešení a dosazujeme do pravých stran.

U Jacobiho metody pro počáteční odhad vypočteme nejprve všechny pravé strany a dosadíme do proměnných na levé straně jako zpřesnění počáteční aproximace. Tento postup opakujeme.

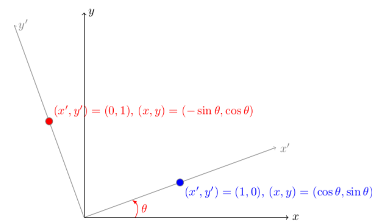
U Gaussovy-Seidlovy metody nejprve pomocí počátečního odhadu vypočteme z první rovnice x_1 a tuto hodnotu ihned použijeme při výpočtu x_2 z další rovnice. Obojí, x_1 i x_2 už využijeme při výpočtu x_3 a tak dále. Po výpočtu x_4 je první iterace dokončena a postup opět opakujeme, dokud dvě po sobě jdoucí iterace nejsou dostatečně blízké.

S nulovou počáteční aproximací dostáváme v prvním průchodu

$$\begin{aligned} x_1 &= 3/5 = 0.6, \\ x_2 &= 0.6/11 + 25/11 = 2.3272, \\ x_3 &= -0.6/5 + (2.3272)/10 - 11/10 = -0.9873, \\ x_4 &= -3(2.3272)/8 + (-0.9873)/8 + 15/8 = 0.8789. \end{aligned}$$

Jak vidno, vypočtenou hodnotu x_1 ihned použijeme pro výpočet x_2. Obě tyto hodnoty ihned použijeme pro výpočet x_3 a tak dále. V dalších iteracích postup opakujeme. Mimo jiné hodnoty v paměti přímo přepisujeme a nemusíme držet v paměti starou a novou hodnotu.

Pootočení souřadnic v rovině



Obrázek 9.1: *Soustava s čárkovanými souřadnicemi (x', y') je pootočena o úhel θ oproti soustavě (x, y).*

V inženýrských problémech je častou aplikací lineární algebry transformace úlohy do vhodných souřadnic, ve kterých je popis jednodušší. Zpravidla se jedná o prosté otočení. Toto se používá při studiu dřeva, které má anatomicky význačné směry, při studiu vrstvených materiálů, při studiu chování vodorovně uložených geologických vrstev. Nemusí však vždy jít jenom o materiál s charakteristickými směry. Transformace mezi souřadnicemi se používá například v letectví, kdy je jedna souřadná soustava spojena s trupem a další dvě jsou pootočené ve směru křídel šípovitě připojených k trupu.

Je-li v rovině dána souřadná soustava (x, y) a soustava (x', y') pootočená o úhel θ proti směru hodinových ručiček je vztah mezi souřadnicemi popsán vztahem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

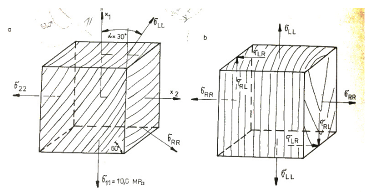
To je možné zkontrolovat podle obrázku a souřadnic dvou bodů $(x', y') = (1, 0)$ a $(x', y') = (0, 1)$. Pro další body roviny to poté funguje automaticky.

Matici transformace budeme zkráceně označovat R, pokud budeme potřebovat zdůraznit velikost úhlu, použijeme $R(\theta)$ a pokud budeme potřebovat matici rozepsat ve složkách, budeme zkracovat výrazy $\cos\theta$ a $\sin\theta$ na C a S a psát

$$R = \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix}.$$

V minulé přednášce jsme viděli, že je-li A matice zobrazení v souřadnicích (x, y), v souřadnicích (x', y') má zobrazení vyjádření $R^{-1}AR$, kde $R^{-1} = R(-\theta) = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix}$ je matice pootočení v opačném směru. Stejným způsobem se transformují i tenzory.

V knize A. Požgaj a kol., Štruktúra a vlastnosti dreva je následující úloha. Dřevo v konfiguraci podle obrázku je namáháno pouze tahovou silou svisle, tedy tenzor napětí má jenom jednu nenulovou složku. Naším cílem je pootočit souřadnou soustavu tak, aby byl tenzor napětí vyjádřen v anatomických směrech dřeva. Úloha je v knize vyřešena pomocí směrových kosinů.



Obrázek 9.2: *Úloha na transformaci tenzoru napětí do anatomických směrů dřeva. Znázorněná krychlička je jenom reprezentující element většího tělesa. Zdroj: A. Požgaj a kol., Štruktúra a vlastnosti drevá.*

Ukážeme si alternativní způsob, který je výhodný v tom, že využívá pouze základní aparát lineární algebry. Původní souřadnice (x_1, x_2) označíme (x, y), osa x směřuje vodorovně vpravo (v obrázku x_2) a osa y nahoru (v obrázku x_1). Tenzor napětí je $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ (tah pouze ve směru osy y). Souřadnice je nutno pootočit o 30 stupňů po směru hodinových ručiček, tj. v záporném směru. Nový tenzor napětí je

$$R(30^\circ)AR(-30^\circ) = \begin{pmatrix} 2.5 & -4.3 \\ -4.3 & 7.5 \end{pmatrix}.$$

V nových souřadnicích je směr x' radiální a proto $\sigma_{RR} = 2.5$ a $\sigma_{LL} = 7.5$. Mimodiagonální složka udává komponentu $\sigma_{RL} = -4.3$. Tento výsledek je stejný, jako výsledek získaný jiným postupem v knize. Použili jsme však jenom základní nástroje lineární algebry.

Transformace tenzoru

Úloha na transformaci tenzoru, kterou jsme řešili na minulém slidu je v aplikacích velmi důležitá. Proto existuje řada grafických nebo inženýrských metod na řešení tohoto úkolu. Tyto metody jsou důvtipné a názorné, například metoda Mohrovy kružnice, oproti lineární algebře však mají zásadní nevýhodu: uživatel se musí stále učit něco nového a dostává návod "jak", nikoliv "proč". Použitím aparátu lineární algebry, stejně jako dokážeme v pootočených souřadnicích vyjádřit libovolné zobrazení, dokážeme vyjádřit v pootočených souřadnicích i libovolný tenzor. Vzorce jsou stejné a navíc při otočení v rovině je matice rotace ortogonální, tj. inverzní matice je maticí transponovanou. Pro symetrický tenzor $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ dostáváme v souřadnicích otočených o úhel θ proti směru hodinových ručiček

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix},$$

kde po výpočtu

$$\begin{aligned} a'_{11} &= C^2 a_{11} + S^2 a_{22} + 2CS a_{12}, \\ a'_{22} &= S^2 a_{11} + C^2 a_{22} - 2CS a_{12}, \\ a'_{12} &= -CS a_{11} + CS a_{22} + (C^2 - S^2) a_{12}. \end{aligned} \tag{*}$$

Tento vztah je lineání vzhledem ke všem komponentám a je možné jej zapsat pomocí maticového násobení

$$\begin{pmatrix} a'_{11} \\ a'_{22} \\ a'_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & S^2 & 2CS \\ S^2 & C^2 & -2CS \\ -CS & CS & C^2 - S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{12} \end{pmatrix}.$$

Tento vztah je uveden i v literatuře A. Požgaj a kol., Štruktúra a vlastnosti drevá a v e-opoře Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva. Zde je také uvedena jedna z aplikací, transformace tenzoru deformací naměřených při bobtnání dřeva. V této úloze je nutno tenzor deformací transformovat do anatomických směrů dřeva. To je možné udělat po změření sklonu vláken a pootočení tenzoru o příslušný úhel.

Inverzní operací je pootočení o úhel $-\theta$ a proto je snadné najít inverzní transformaci: vzhledem k sudosti funkce cos a lichosti funkce sin stačí změnit znaménko u členů s S, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & S^2 & -2CS \\ S^2 & C^2 & 2CS \\ CS & -CS & C^2 - S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} \\ a'_{22} \\ a'_{12} \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Pokud vypočteme derivaci členů a'_{11} a a'_{22} podle θ, dostaneme použitím

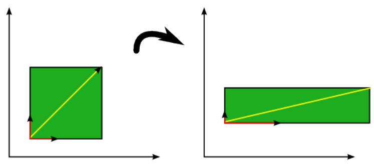
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} C^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \cos^2\theta = 2\cos\theta(-\sin\theta) = -2CS,$$

a analogicky $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} S^2 = 2SC$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} CS = -S^2 + C^2$ derivace

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}a'_{11}}{\mathrm{d}\theta} &= -2CS a_{11} + 2SC a_{22} + 2(C^2 - S^2) a_{12} = 2a'_{12}, \\ \frac{\mathrm{d}a'_{22}}{\mathrm{d}\theta} &= 2SC a_{11} - 2CS a_{22} + 2(S^2 - C^2) a_{12} = -2a'_{12}. \end{aligned}$$

To znamená, že lokální extrémy diagonálních prvků nastávají v okamžiku, kdy jsou prvky mimo diagonálu nulové. Toto pozorování perfektně ladí s výsledky, které známe v lineární algebře i bez hledání lokálních extrémů a bez derivací. Náznak tohoto konceptu si představíme na dalších stránkách. Budeme potřebovat připomenout definici vlastních vektorů.

Pozor. V případě tenzoru deformace se někdy se namísto mimodiagonální komponenty bere její dvojnásobek, protože ten má názorný význam jako úhel smyku. Proto se někdy v literatuře uvádí transformační vzorec pro deformace v upraveném tvaru, kdy u složek se součinem CS ve třetím sloupci není koeficient 2 a u odpovídajících složek ve třetím řádku tento koeficient naopak figuruje. Je proto potřeba dávat pozor na to, s jakými komponentami je tenzor malých deformací uvažován.



Obrázek 9.3: *Eigenvectors (red) do not change direction when a linear transformation (e.g. scaling) is applied to them. Other vectors (yellow) do. Zdroj: http://www.visiondummy.com.*

Role vlastních vektorů při transformaci matic

Budeme zkoumat, kdy platí

$$P^{-1}AP = D$$

pro čtvercové matice P, A a diagonální čtvercovou matici D. Vynásobením maticí P zleva dostaneme

$$AP = PD.$$

Ve cvičení jsme násobili čtvercovou matici s maticí diagonální a není těžké vidět obecný princip, že matice PD má za sloupce násobky sloupců matice P s odpovídajícím číslem z hlavní diagonály matice D. Například pro první sloupec matice P a první číslo v hlavní diagonále matice D, které označíme $\vec{p}_1$ a λ_1, dostáváme

$$A\vec{p}_1 = \lambda_1 p_1,$$

tj. (viz předchozí přednášky) p_1 je vlastní vektor matice A příslušný vlastní hodnotě λ_1. Podobný princip platí pro všechny sloupce. Je otázkou, jestli vlastních hodnot a vlastních vektorů je tolik, kolik pro diagonalizaci "potřebujeme". Částečně pozitivní odpověď na tuto otázku udávají věty na následujícím slidu.

Transformace symetrické matice na diagonální tvar

Věta (vlastní čísla symetrické matice). *Symetrická čtvercová matice A řádu n má n reálných vlastních čísel (počítáno i s případnou násobností).*

Věta (diagonalizace symetrické matice). *Nechť má symetrická čtvercová matice A řádu n celkem n reálných různých vlastních čísel λ_i. Označme odpovídající vlastní vektory jednotkové délky $\vec{v}_i$.*

- *Matice P sestavená tak, že sloupce této matice jsou tvořeny vektory $\vec{v}_i$ je ortogonální.*
- *Matice D definovaná vztahem*

$$D = P^T AP$$

  je diagonální.
- *Diagonální prvky matice D jsou právě vlastní čísla λ_i a jsou ve stejném pořadí jako odpovídající vlastní vektory v matici P.*

Matice transformace P z předchozí věty je ortogonální (její transponovaná matice je současně její inverzní matice) a její determinant je roven 1 nebo -1. Pokud je determinant kladný, reprezentuje matice pootočení soustavy souřadnic. Pokud je determinant záporný, jedná se o pootočení spojené se zrcadlením jedné osy. Protože tento případ většinou z fyzikálních důvodů nepreferujeme, sestavujeme matici transformace tak, aby měla determinant kladný. V případě záporného determinantu stačí prohodit dva vektory (sloupce matice transformace) mezi sebou, nebo jeden vynásobit faktorem -1.

Pro kontrolu je zajímavé vědět, že determinant matice se pootočením nemění a je tedy stejný pro původní i transformovanou matici. Totéž platí pro součet prvků v hlavní diagonále (v lineární algebře se nazývá stopa matice), pro charakteristický polynom a pro vlastní hodnoty. Tenzor, jak jej uvažujeme v tomto textu, je matice, která má navíc fyzikální význam a vzhledem ke své povaze pro ni platí speciální transformační pravidla. Nicméně je to mimo jiné i matice a proto vše výše uvedené platí i pro tenzory.

Ve videu https://www.youtube.com/watch?v=xdxVpC856ms je pomocí vzorců odvozován diagonální tvar tenzoru napětí

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 30 & -10 \end{pmatrix}.$$

Ukážeme si řešení úlohy bez použití vzorců, jenom prostředky lineární algebry. Charakteristický polynom této matice je

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 20-\lambda & 30 \\ 30 & -10-\lambda \end{vmatrix} = (20-\lambda)(-10-\lambda)-30^2 = \lambda^2-10\lambda-$$

s kořeny $\lambda_1 \approx 38.54$ a $\lambda_2 \approx -28.54$. To budou prvky v hlavní diagonále po transformaci tenzoru.

Pokud budeme chtít vědět, jak jsou nové osy orientovány vůči osám původním, musíme najít i vlastní vektory. Vlastní vektor příslušný hodnotě λ_1 je řešením soustavy s maticí soustavy

$$A - \lambda_1 I \approx \begin{pmatrix} -18.54 & 30 \\ 30 & -48.54 \end{pmatrix}$$

a nulami vpravo. Přibližným řešením je vektor $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 30 \\ 18.54 \end{pmatrix}$. (Toto plyne z první rovnice, druhá rovnice musí být splněna automaticky, protože jsme použili vlastní hodnotu a soustava musí mít nenulové řešení. Nicméně výpočet je zatížen zaokrouhlovací chybou.) Po vydělení normou vektoru dostáváme $\begin{pmatrix} 0.851 \\ 0.526 \end{pmatrix}$. Druhý vlastní vektor je kolmý, tj. $\begin{pmatrix} -0.526 \\ 0.851 \end{pmatrix}$. Po transformaci maticí $P = \begin{pmatrix} 0.851 & -0.526 \\ 0.526 & 0.851 \end{pmatrix}$ dostáváme (na dvě desetiná místa)

$$P^T \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 30 & -10 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 38.54 & 0 \\ 0 & -28.54 \end{pmatrix}.$$

To vlastně ani nemusíme počítat, věta v úvodu tohoto slidu zaručuje, že výsledná matice bude diagonální a bude obsahovat vlastní hodnoty. Z matice P vidíme sinus a kosinus úhlu pootočení a odsud určíme snadno, o kolik se souřadná soustava otáčí a v jakém směru.

Kapitola 10

Vektorová pole, tok, zákony zachování

Připomenutí derivací

Derivace umožňují studovat a popisovat změny veličin, vyjadřovat kvantitativně jejich vzájemné souvislosti.

(Obyčejná) derivace $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

- S touto derivací se pracuje u funkce jedné proměnné $f(t)$. Např. $f(t) = kt^2$, kde k je parametr (reálné číslo).
- Derivace je okamžitá rychlost změny veličiny f vzhledem k t, tj. nárůst veličiny f vyvolaný jednotkovým nárůstem veličiny t. (Prakticky však veličinu t změníme o malou hodnotu a nárůst přepočítáme na jednotkovou změnu.)
- Jednotka derivace je stejná, jako bychom veličiny f a t dělili.
- V modelech a při praktickém využití pracujeme s definicí derivace jako s rychlostí změny. Při výpočtu ale využíváme dostupné vzorce pro výpočet derivace. Například pro funkci z prvního bodu platí $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 2kt$.

Parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial t}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, ….

- S touto derivací se pracuje u funkce více proměnných, typicky $f(x, y, z, t)$. Např. $f(x, y, z, t) = xt^2$
- Jedná se o obyčejnou derivaci podle jedné proměnné, přičemž ostatní proměnné považujeme za parametry. Tj. v případě funkce z minulého bodu je $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 2xt$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = t^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$.
- Pro jednotku a výpočet platí totéž co u obyčejné derivace.
- Při aplikacích často pracujeme s gradientem, tj. s vektorem sestaveným z parciálních derivací podle jednotlivých prostorových proměnných. Pro funkci tří proměnných x, y a z a pro potřeby matematické formulace fyzikálních zákonů gradient uvažujeme jako sloupcový vektor

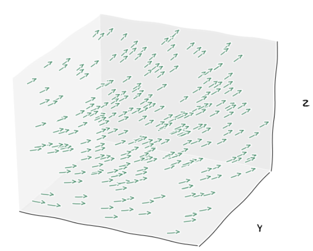
$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Pro úsporu místa jej někdy píšeme v transponovaném tvaru

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^T.$$

Gradient je vektor, který má směr odpovídající směru nejrychlejšího růstu skalární veličiny a velikost je stejná jako derivace v daném směru.

Vektorové pole



Obrázek 10.1: *Vektorové pole vykreslené v náhodných bodech v prostoru. Je vhodné pro popis proudění.*

Vektorové pole je vektorová funkce, dvou nebo tří proměnných. Můžeme si ji představit jako zobrazení, které každému bodu v rovině nebo v prostoru přiřadí vektor. Proto je vhodné tyto veličiny použít při popisu proudění. Ať už hmatatelných látek (tekutina, elektrony) nebo obecnější veličiny (teplo, elektrická intenzita).

Poznámka (stavová veličina). Veličiny charakterizující stav tělesa se nazývají *stavové veličiny*. Tyto veličiny závisí jenom na současném stavu a ne na historii, jak se těleso do daného stavu dostalo. Některé stavové veličiny se mohou měnit ("přenášet") tokem definovaným pomocí vhodného vektorového pole. Tok tohoto pole danou plochou vyjadřuje, kolik stavové veličiny projde touto plochou za jednotku času, přepočteno na jednotku povrchu plochy.

Příkladem stavové veličiny může být množství vody v jednotkovém objemu dřeva, tj. koncentrace vody ve dřevě. Protože se voda ve dřevě může pohybovat, je tato stavová veličina přenášena jistým vektorovým polem (rychlostní pole). Tok tohoto pole v daném bodě vyjadřuje, kolik vody projde rovinnou plochou v daném místě za jednotku času. Orientace plochy se volí dle potřeby (podle toho, se kterou komponentou proudění chceme pracovat) a tok se přepočítává na jednotkovou plochu.

Tok a gradient v konstitutivních zákonech

Poznámka (konstitutivní zákony). V aplikacích často formulujeme pomocí gradientu a toku vektorového pole *konstitutivní zákony*. To jsou zákony nebo vztahy mezi fyzikálními veličinami specifickými pro danou látku nebo materiál a udávají odezvu tohoto materiálu na externí stimul. Viz též Wikipedie.

Například vítr (tok molekul vzduchu) je vyvolán nerovnoměrným rozložením vzduchu (jeho hustoty a tím i tlaku) v prostoru a směřuje z míst s vyšším tlakem do míst s tlakem nižším. Větší rozdíl tlaků způsobí "větší vítr" a tím větší tok vzduchu. Toto platí i pro jiné proudění, jak ukážeme dále.

Nerovnoměrnost v prostorovém rozložení charakterizuje gradient. V ustáleném stavu je pro široké rozmezí fyzikálních problémů závislost intenzity toku na gradientu lineární. A protože nulovému gradientu (nulovému stimulu) odpovídá nulový tok (nulová odezva), bude tato lineární funkce přímou úměrností.

V dalším shrneme důležité praktické příklady, kdy je tok úměrný gradientu. Konstanta úměrnosti je obecně pouze konstantou pro daný problém a dané hodnoty parametrů. Může se měnit s velikostí studovaného objektu (například obsah průřezu geologické vrstvy, kterou proudí voda), s fyzikálními vlastnostmi proudící látky (např. viskozita nebo hustota tekutiny, stlačitelnost vzduchu), s fyzikálními vlastnostmi prostředí (např. velikost pórů v pórovitém prostředí nebo vlhkost dřeva). Proto je možné tyto zákony najít v různých tvarech, s různými členy a případnými přídavnými konstantami, které například odseparují vliv vlastností proudící látky a vliv vlastností prostředí. Vždy záleží na konkrétní situaci, zvyklostech v příslušném podoboru, nebo na přístupu autora. Není proto naší ambicí vést výklad dopodrobna, všímejme si jenom základních myšlenek.

Vícerozměrné konstitutivní zákony

Zákony uvedené níže byly často odvozeny v jednorozměrném případě a letmo zmíněny v přednášce Derivace II. V moderní formulaci používáme obecný vektorový zápis, který zohledňuje i směr. Konstanta úměrnosti potom zprostředkovává vztah mezi dvěma vektory. Jedná se tedy z matematického pohledu o matici, která umožní nejenom změnit délku vektoru a jeho jednotku, ale i směr. Tato matice se navíc při změně báze transformuje speciálním způsobem, tak jako vektory. Takové objekty nazýváme **tenzory**. Níže budeme pojmem tenzor rozumět matici 3×3 nebo 2×2, podle kontextu. (Obecněji je možno považovat skalární veličiny a vektory za tenzory nižších řádů, toto my však dělat nebudeme.)

Fickův zákon (difuze)

V roce 1855 německý lékař A. Fick objevil, že difuzní tok $\vec{J}$ (množství látky které projde při difuzi jednotkovou plochou za jednotku času) je úměrný gradientu koncentrace c této látky. Matematicky vyjádřeno pomocí moderní terminologie to znamená, že platí

$$\vec{J} = -D\nabla c.$$

Veličina D se nazývá difuzní koeficient. Pokud má $\vec{J}$ stejný směr jako ∇c, je D skalární veličina. Pokud směry nejsou stejné, je D tenzor. Z fyzikálních důvodů je tenzor D symetrický.

Difuzí se například dřevo zbavuje vlhkosti při vysoušení.

Darcyho zákon (proudění podzemní vody)

V letech 1855 a 1856 francouzský inženýr H. Darcy pokusy prokázal přímou úměru mezi rozdílem tlaků na koncích trubice naplněné porézní zeminou (jednalo se vlastně o rozdíl výšek pro šikmou trubici) a rychlostí proudění vody touto trubicí. Tok (množství vody, která proteče jednotkovou plochou za jednotku času) je dán vztahem

$$\vec{q} = -K\nabla p,$$

kde p je tlak a K je koeficient vodivosti (někdy též koeficient filtrace), v obecném případě symetrický tenzor, v izotropním případě, kdy $\vec{q}$ a ∇p mají stejný směr, veličina skalární.

Někdy se tento zákon neformuluje pomocí gradientu tlaku, ale pomocí gradientu jiné veličiny, kterou zavádíme v hydrologii pro názorné studium efektů, souvisejících s prouděním vody. Nejčastěji se jedná o *vodní potenciál* a hydraulickou výšku či piezometrickou hladinu. Piezometrická hladina je veličina používaná k tomu, abychom do jednoho jednoduše modelovatelného faktoru (má rozměr stejný jako délka) započítali všechny veličiny mající vliv na proudění podzemní vody, od rozdílu nadmořských výšek, přes kapilární a osmotické jevy až po vnější síly vyvolané tlakem geologických vrstev a jiné. Jedná se vlastně o celkovou energii vody s tím, že některé části považujeme za zanedbatelné. Například často neuvažujeme kinetickou energii nebo osmózu a kapilární jevy.

Fourierův zákon (vedení tepla)

Fourierův zákon se týká vedení tepla a vyjadřuje, že vektor hustoty tepelného toku $\vec{q}$ je úměrný gradientu teploty ∇T a má opačný směr, tj.

$$\vec{q} = -D\nabla T.$$

Je-li materiál anizotropní, což je nejobecnější případ, je veličina D symetrickým tenzorem. Je-li materiál izotropní, je k skalární veličinou, případně skalární veličina násobená jednotkovou maticí, pokud potřebujeme zachovat její maticový charakter.

Soretův efekt (termodifuze)

Tok tepla je vyvolaný nerovnoměrným rozložením teploty. Difuze chemické látky je vyvolána nerovnoměrným rozložením koncentrace této látky. Většinou je hybatelem procesu nerovnoměrnost v rozložení látky, která se tímto procesem transportuje. Nemusí to však být vždy. Příkladem je termodifuze, což je pohyb prvků vyvolaný nerovnoměrným rozložením teploty. Například při difúzi vody ve dřevě s nerovnoměrným rozložením teploty je tok dán vztahem

$$\vec{J} = -D\nabla c - sD\nabla T,$$

kde s je koeficient termodifuze. Na rozdíl od předchozích zákonů, u Soretova efektu dochází k transportu nejenom ve směru maximálního poklesu (záporného gradientu) teploty, ale někdy i ve směru gradientu teploty. Viz Wikipedia a heslo Thermophoresis.

Speciální případy vztahu mezi gradientem a tokem

Uvažujme vztah mezi gradientem a tokem ve tvaru

$$\vec{j} = -K\nabla\varphi,$$

kde K je symetrický tenzor. Gradient má ve trojrozměrném případě vyjádření

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^T$$

a ve 2D

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^T.$$

Obecný případ (anizotropní)

Veličina K je matice

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$

jejíž komponenty splňují $k_{ij} = k_{ji}$. Často jsou všechny veličiny kladné a prvky v hlavní diagonále jsou dominantní.

Komponenty vektoru $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)^T$ jsou

$$\begin{aligned} j_x &= -k_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - k_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - k_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \\ j_y &= -k_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - k_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - k_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \\ j_z &= -k_{31}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - k_{32}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - k_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \end{aligned}$$

což zjistíme prostým maticovým násobením. Prostor pro další úpravu není.

Ortotropní případ, vhodně zvolené osy

V obecném případě je zpravidla možné transformovat soustavu souřadnic tak, aby tenzor K byl diagonální. Pro praktické výpočty se toto však často nevyplatí. Pokud však je studovaný problém ortotropní, má charakteristické směry (přesněji, má tři roviny symetrie materiálových vlastností), je možné zvolit souřadnice v souladu s těmito směry a matice K je diagonální.

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix}$$

Komponenty vektoru $\vec{j}$ jsou

$$\begin{aligned} j_x &= -k_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ j_y &= -k_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ j_z &= -k_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{aligned}$$

S diagonální maticí se pracuje velmi dobře, protože má v hlavní diagonále vlastní čísla. Tato vlastní čísla jsou fyzikální charakteristikou úlohy. Například největší vlastní číslo a odpovídající vlastní směr charakterizují směr, ve kterém je odezva materiálu na vnější podnět maximální a vlastní číslo udává velikost této reakce. Tyto fyzikální charakteristiky nemohou být závislé na volbě souřadné soustavy, ve které úlohu popisujeme. Co se mění s volbou souřadné soustavy jsou pouze souřadnice vlastního vektoru. Vlastní čísla jsou však skalární a proto jsou invariantní při otočení soustavy souřadnic. Pokud bychom neměli možnost zvolit soustavu souřadnic tak, aby matice byla diagonální, máme alespoň jistotu, že vlastní čísla zůstanou stejná.

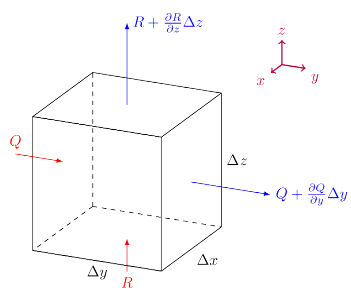
Ortotropní případ ve 2D

Stejné jako ve 3D, pouze chybí třetí rovnice.

Izotropní případ

Stejné jako ortotropní případ, ale navíc platí $k_{11} = k_{22} = k_{33} = k$. Potom $\vec{j} = -k\nabla\varphi$, kde k je konstanta a vektory toku a gradientu mají opačný směr.

Divergence



Obrázek 10.2: *Divergence a tok pole $\vec{q} = (0, Q, R)$ tělesem nenulového objemu. Tok je zobrazen vždy ve středu stěny. Červené vektory vstupují do krychle a příslušné toky se počítají záporně. Modré vystupují ven a počítají se kladně. V tomto případě je celková bilance kladná, z objemu více vyteče, než vteče dovnitř. Divergence je kladná. Pokud v krychli množství veličiny neubývá, musí tam být zdroj této veličiny.*

Budeme sledovat tok vektorového pole a bude nás zajímat, o kolik se tok v daném místě mění.

- Pro jednoduchost rozdělíme tok na tři nezávislé části ve směru jednotlivých os a vztáhneme vše k jednotkám času a průřezu, tj. budeme uvažovat hustotu toku nějaké fyzikální veličiny.
- Je-li tato hustota toku popsána vektorovým polem $\vec{q} = (P, Q, R)$ v jednotkách kilogram na metr čtvereční za sekundu, znamená to, že kolmým průřezem jednotkového obsahu projde za jednotku času P kilogramů sledované látky, jejíž tok popisujeme. Často se pracuje i s objemovým tokem, kdy množství neměříme v kilogramech ale v metrech krychlových a například při ustáleném proudění v trubici (hydrodynamika) je tok roven vektoru rychlosti a při proudění porézním materiálem (proudění podzemní vody) je roven filtrační rychlosti.
- Derivace $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ udává, o kolik studovaný tok v daném místě vzroste ve směru osy x a tento nárůst je vztažený na jednotku délky.
- Ve směru osy y máme tok vyjádřený veličinou Q a proto nás podobně zajímá $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$.
- Analogicky $\dfrac{\partial R}{\partial z}$.
- Celková změna toku bude součtem všech tří příspěvků. Pokud je kladná, znamená to, že z daného místa více veličiny vytéká, než kolik teče dovnitř. Pokud je záporná, je tomu naopak. Jestli se v případě nerovnováhy v daném místě může proudící veličina tvořit nebo spotřebovávat nebo akumulovat nebo jestli jí v daném místě může zbývat již nezjistíme, záleží na charakteru proudící veličiny a na okolnostech s tímto prouděním spojených. Tuto informaci nám pro další popis musí dodat externí věda (obecná fyzika, fyzika materiálu, fyzika životního prostředí, hydrologie, pedologie, ...).
- Při preciznější argumentaci dávající do souvislosti parciální derivace jednotlivých komponent toku s tím, co se reálně s vektorovým polem děje, je nutné si pomoci stejně jako u derivací, tj. uvažovat ne dané místo, ale jistý konečně velký objem (viz obrázek), vztáhnout dané veličiny na jednotku objemu a rozměry tohoto objemu limitně stáhnout k nule. Toto však již přesahuje ambice v našem kurzu a jedná se o formalismus, kterému se vyhneme přímým představením hotového výsledku.

Výše uvedenými úvahami je motivována následující definice a věta. (Definice je maličko nepřesná, protože nemáme nástroje pro pečlivější formulaci.)

Definice (divergence). *Divergence* vektorového pole $\vec{F}$ v daném bodě je převis toku vektorového pole z tohoto místa nad tokem do tohoto místa. Tento tok se počítá přes hranici infinitezimálně malého referenčního tělesa a je vztažený na jednotku objemu. Divergenci vektorového pole $\vec{F}$ označujeme $\operatorname{div}\vec{F}$ nebo $\nabla\cdot\vec{F}$.

Věta (výpočet divergence). *Pro vektorovou funkci*

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k},$$

kde P, Q a R jsou funkce tří proměnných x, y a z vypočteme divergenci vztahem

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Pro vektorovou funkci dvou proměnných vypočteme divergenci analogicky, pouze chybí třetí člen.

Pokud při ustáleném proudění je v některém místě kladná divergence, znamená to, že v tomto místě musí být zdroj této veličiny. Proto se vektorové pole, jehož divergence je rovna nule, se nazývá **nezřídlové pole**.

Ze střední školy z fyziky umíme modelovat vektorové pole pomocí siločar. Siločáry nezřídlového pole nikde nezačínají ani nekončí a jsou to uzavřené křivky. Například stacionární magnetické pole je nezřídlové. Absence zdrojů magnetického pole se projevuje tak, že rozříznutím tyčového magnetu vzniknou dva menší plnohodnotné magnety. Nevznikne samostatný jižní pól a samostatný severní pól magnetu. To je rozdíl oproti poli elektrickému, kdy rozdělením tyče s opačně nabitými konci vznikne jedna kladně nabitá a jedna záporně nabitá tyč poloviční délky.

Výpočet gradientu a divergence

Viz přednáška. V ZS 2019 přeskočit (kumulace rektorských a děkanských volen, dodělávala se lineární algebra).

Rovnice kontinuity

Zformulujeme zákon zachování pro zcela obecný případ zachovávající se veličiny. Díky obecnému přístupu jsou rozsáhlé aplikace, ale k nim je nutné dodat další informace o studovaném problému (z biologie, geologie, fyziky, …).

Předpokládejme, že tok vektorového pole přenáší nějakou stavovou veličinu (veličinu, která charakterizuje stav látky nebo tělesa). Množství této veličiny v jednotkovém objemu tělesa označíme ρ. Budeme uvažovat obecný nestacionární stav, kdy se ρ může měnit s časem.

- Daným místem může protékat vektorové pole a celková bilance (tj. množství, které vyteče za jednotku času z jednotkového objemu sníženo o množství, které doteče) nemusí být nulová. Tato celková bilance je v každém místě vyjádřena divergencí vektorového pole.
- Někdy se stavová veličina může v daném místě kumulovat, nebo může ubývat. Rychlost s jakou množství stavové veličiny v daném místě přibývá je dáno parciální derivací $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$.
- V obecném případě stavová veličina přenášená vektorovým polem může vznikat nebo zanikat a tedy mohou být přítomny zdroje nebo spotřebiče této stavové veličiny. Jejich vydatnost (přesněji množství stavové veličiny, které vyprodukují v jednotkovém objemu za jednotku času) označíme σ, přičemž spotřebiče bereme jako zdroje se zápornou vydatností.

Rovnice kontinuity je matematické vyjádření zákona zachování. Udává, že pro libovolnou malou reprezentativní část tělesa je rychlost změny množství stavové veličiny dáno celkovou vydatností zdrojů v této části snížené o tok z této části tělesa ven.

Pro přesné odvození pro libovolnou část objemu nemáme bohužel v základním kurzu matematiky dostatečné matematické prostředky. (Bylo by nutné mít některá zobecnění integrálu.) I tak se však můžeme pokusit o jakousi bilanci v obecném místě tělesa pomocí hustoty stavové veličiny a divergence a detailnější popis je možné doplnit po prostudování dalších partií s nezbytnými matematickými nástroji.

Podle výše uvedeného platí

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma - \operatorname{div} \vec{j}$$

neboli

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = \sigma.$$

Tato rovnice se nazývá *rovnice kontinuity* a díky své obecnosti popisuje širokou škálu problémů týkajících se živé i neživé přírody.

Poznámka (fyzikální interpretace členů stavové rovnice).

- Člen $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ udává, jak rychle se mění stavová veličina ρ. Pokud studujeme systém v ustáleném stavu, kdy se stavová veličina nemění v čase, je tento člen nulový. Tomuto se říká *stacionární stav* a *stacionární rovnice kontinuity*. Stacionární rovnice kontinuity typicky popisuje systémy po dosažení rovnovážného stavu.
- Člen σ udává vydatnost zdrojů stavové veličiny, přičemž spotřebiče jsou uvažovány jako zdroje záporné vydatnosti. Tento člen tedy udává, kolik stavové veličiny v tomto místě vzniká. Pokud zdroje neexistují, jedná se o *bezzdrojovou rovnici*.
- Člen $\operatorname{div} \vec{j}$ udává v daném bodě změnu ve velikosti proudění přenášejícím stavovou veličinu. Přesněji, udává, o kolik více veličiny z daného místa vyteče ve srovnání s množstvím veličiny, které do tohoto místa vteče. Tento člen je v rovnici kontinuity přítomen vždy, bez něj by rovnice kontinuity ztratila smysl (resp. redukovala by se na triviální případ, kdy veličina v daném místě vzniká danou rychlostí a zůstává zde, tj. problém řešitelný čistě integrováním).

V matematice často rovnice uvažujeme ve výše uvedeném tvaru. Při praktickém použití většinou preferujeme názornou interpretaci jednotlivých veličin a proto se v rovnici mohou objevit další konstanty úměrnosti, které umožní sladit jednotky a fyzikální interpretaci členů. Někdy se naopak snažíme konstanty co nejvíce redukovat metodami transformace popsanými v přednášce o diferenciálních rovnicích. Proto volíme vhodné násobky veličin vystupujících v matematické formulaci tak, aby se co nejvíce konstant eliminovalo, případně shluklo do jediné veličiny. Zkušenosti ukazují, že je vhodné volit veličiny bezrozměrné. Například v publikaci P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I je zavedena bezrozměrná vlhkost, bezrozměrný čas a bezrozměrná vzdálenost na straně 61 pro rovnici popisující difuzi a charakteristická délka, Biotovo číslo (bezrozměrná tepelná vodivost) a bezrozměrná teplota, bezrozměrný čas a bezrozměrná vzdálenost pro rovnici popisující vedení tepla na stranách 88 a 89.

V této rovnici není zahrnut případ, kdy se veličina přenáší ještě i prouděním hmotného prostředí (konvekce).

Vedení tepla

Důležitým speciálním případem rovnice kontinuity je vedení tepla. V tomto případě je stavovou veličinou vnitřní energie, ale pro větší pohodlí rovnici formulujeme pro teplotu T. Vnitřní energie je přenášená tokem tepla $\vec{j}$. Rovnice kontinuity vyjadřuje, že energie nemizí ani se netvoří. Proto je rovnice vedení tepla zpravidla bezzdrojová a má tvar

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \tag{1}$$

kde T je teplota, $\vec{j}$ tok tepla. Konstanty ρ a c jsou hustota a měrná tepelná kapacita a slouží k přepočtení množství dodaného tepla na stavovou a lépe měřitelnou veličinu, na změnu teploty.

Poznámka (interpretace členů).

- Veličina $\frac{\partial T}{\partial t}$ udává rychlost růstu teploty tělesa a koeficient ρc tuto hodnotu přepočítává na údaj, jak rychle roste vnitřní energie tělesa (kinetická energie molekul.)
- Člen $\operatorname{div} \vec{j}$ udává, kolik vnitřní energie se v daném místě ubývá za jednotku času vlivem vedení tepla. Vzhledem k absenci zdrojů je to také jediný mechanismus, jak v daném místě může vnitřní energie přibývat či ubývat.
- Rovnice (1) vyjadřuje to, že pokud z daného místa více energie odtéká, než kolik do místa proudí, tj. $\operatorname{div} \vec{j}$ je kladná, dojde v tomto místě k odpovídajícímu snížení teploty.

Pokud k tomuto tvaru rovnice kontinuity přidáme Fourierův zákon a divergenci převedeme na druhou stranu rovnice, získáme

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(D \nabla T).$$

To je zobecnění rovnice vedení tepla v jedné dimenzi, kterou jsme odvodili primitivními prostředky (jenom pomocí parciálních derivací, bez gradientu a divergence) ve tvaru

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

v úvodní přednášce.

Ze střední školy známe makroskopickou formu rovnice (1)

$$mc\Delta T = Q.$$

Ta je zformulována pro těleso jako celek a Q se uvažuje v opačném smyslu než v rovnici kontinuity (teplo je kladné, pokud jej dodáváme).

V literatuře věnované problematice dřeva se rovnice vedení tepla ve dřevě označuje jako Druhý Fourierův zákon (P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I, str. 88).

V některých případech nemusí být člen charakterizující zdroje nulový. Teplo může vznikat například při tření nebo při průchodu elektrického proudu transformací z jiného druhu energie. Dále teplo vzniká například při betonování po přidání vody do cementu, známý je problém jak uchladit Hooverovu přehradu při stavbě.

Proudění tekutiny v mechanice kontinua

V mechanice kontinua podobně jako u vedení tepla neuvažujeme zdroje. Stavovou veličinou je hustota ρ, která popisuje množství látky v daném místě. Tato látka je přenášena tokem, který je roven součinu rychlosti $\vec{u}$ a hustoty ρ. Rovnice kontinuity popisující proudění dané rychlostí $\vec{u}$ má poté tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0,$$

kde ρ je hustota. Tato rovnice napsána pro vzduch je jednou z rovnic používaných při modelování vývoje počasí

Pro nestlačitelnou tekutinu je hustota dále konstantní a odsud dostáváme ve stacionárním stavu

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

Důsledkem této rovnice je zvýšení rychlosti molekul pohybující se nestlačitelné tekutiny při proudění místem s menším průřezem.

Středoškolský makroskopický tvar jednorozměrné rovnice kontinuity pro proudění nestlačitelné tekutiny je

$$Su = \text{konst.}$$

Proudění vody ve dřevě

Jedná se o rovnici kontiunity pro koncentraci vody c. Voda ve dřevě nevzniká ani nezaniká, jenom se při sušení transportuje mimo dřevo. Proto v rovnici nebudou zdroje. Příslušným konstitutivním zákonem je Fickův zákon. Rovnice popisující tento proces má tvar

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D\nabla c) \tag{*}$$

anebo (po započtení Soretova efektu)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D\nabla c + sD\nabla T).$$

Ve druhém případě musíme tuto rovnici uvažovat společně s rovnicí vedení tepla a mít tedy úlohu na soustavu dvou rovnic pro dvě modelovaná pole.

V případě dřeva volíme pokud možno souřadné osy souhlasně s anatomickými směry dřeva a matice D je poté diagonální. Proto se (*) redukuje na

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial c}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial c}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial c}{\partial z}\right)$$

Považujeme-li složky matice D za konstanty (nemusely by být, protože materiál nemusí být homogenní a může mít v jiných bodech jiné fyzikální vlastnosti, nebo odezva materiálu nemusí být přesně lineární a koeficienty D_i se mohou měnit s měnícím se c), je možné psát rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_x\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_z\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}, \tag{**}$$

protože derivace konstantního násobku je násobek derivace.

V literatuře věnované problematice dřeva se rovnice difuze použitá na modelování vlhkosti ve dřevě označuje jako Druhý Fickův zákon (A. Požgaj a kol., Štruktúra a vlastnosti dreva, str. 202, P. Horáček, Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva I, str. 60).

V praxi je dřevo často s jistou přesností homogenní, ale difuzní koeficient dřeva závisí na vlhkosti, tedy vztah mezi gradientem vlhkosti a difuzním tokem není lineární. Přesto i v tomto případě používáme Fickův zákon, ovšem složky difuzního koeficientu nepovažujeme za konstanty, jsou závislé na c a jejím prostřednictvím i na x. V takovém případě si úpravu na rovnici (**) nemůžeme dovolit.

Rovnice mělké vody

Pro jednorozměrné proudění nestlačitelné tekutiny korytem o obsahu průřezu A stavová veličina vyjadřuje množství vody v korytě a tato stavová veličina je přenášena tokem Q, který je součinem rychlosti (nebo střední rychlosti v případě, že rychlost je rozložena nerovnoměrně) a obsahu průřezu. Stavovou veličinou může být buď obsah v řezu (viz obrázek a Cross sectional area) nebo výška hladiny (Water depth). Rovnice se zpravidla uvažuje opět bez zdrojů a vyjadřuje, že při absenci zdrojů se změna toku Q se projeví ve změně průřezu. Zvýšení průtoku na jednotkové délce koryta je jednorozměrná divergence Q, tj. $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Změna množství v daném průřezu obsahu A za časovou jednotku je vzhledem k nestlačitelnosti rovna $\frac{\partial A}{\partial t}$. Rovnice popisující proudění má tvar

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Toto je jedna z forem zápisu tzv. *Saint-Venantovy rovnice*, nazývané též *rovnice mělké vody*. Používá se k modelování toku povrchové vody, modelování pohybu vzduch při předpovědích počasí nebo k modelování vln cunami.

Z matematického hlediska je to jenom rovnice kontinuity, na rozdíl od předchozích ukázek v ní nejsou konstituční vztahy. Proto v ní jsou dvě funkce, tok Q definující pohyb stavové veličiny a průřez A definující množství stavové veličiny. Někdy je vhodnější pracovat se stavovou veličinou h. Jak jsme zmínili v úvodní přednášce o derivacích, platí $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h} = B$. Abychom mohli celou rovnici převést na tvar pracující se stavovou veličinou h, je nutné udělat nějaké dodatečné předpoklady, jako například pracovat s konkrétním tvarem koryta.

Rovnice podzemní vody

Podzemní vodou se rozumí voda přítomná pod zemským povrchem, která teče porézním prostředím tvořeným propustnými horninami a geologickými vrstvami nad nepropustnou vrstvou (volná hladina) nebo mezi dvěma nepropustnými vrstvami (napjatá hladina).

Stavovou veličinou vyjadřující množství vody v daném místě při proudění podzemní vody s volnou hladinou je piezometrická výška h. (Pro jednoduchost si představme hladinu podzemní vody.) Často je vertikální proudění zanedbatelné a úloha není trojrozměrná, ale ve skutečnosti dvourozměrná a pro třetí souřadnici klademe

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

(Dupuitův předpoklad).

Obecný tvar rovnice kontinuity pro podzemní vodu, ve kterém uvažujeme nestlačitelnou kapalinu, nestacionární stav a zdroje (vsak srážek a podobně) či spotřebiče (například prosak do jiných geologických vrstev, mimo vodní kolektor) má tvar

$$\operatorname{div}\vec{q} = -S\frac{\partial h}{\partial t} + P,$$

kde $\vec{q}$ je tok (množství vody, které pod zemí teče daným místem na metr délky kolmé k toku), P je celkový objem ze zdrojů (množství vody, které dodají zdroje na metr čtvereční za jednotku času, jedná se v tomto případě o součet za celou výšku vodního kolektoru), h je piezometrická výška a S je měrná objemová zásobnost (kolik vody se uvolní na jednotkovém obsahu půdy při změně piezometrické výšky o jednotku). Tato rovnice vyjadřuje, že množství vody, které se v daném místě přidá do celkového proudění, je součtem množství, které v daném místě vygenerují zdroje a množstvím, které se v tomto místě vezme ze zásob díky snížení piezometrické hladiny (u volné hladiny jde zejména o snížení hladiny podzemní vody, u napjaté hladiny souvisí zejména se změnou pórovitosti při změně tlaku).

S Darcyho zákonem vyjádřeným pomocí piezometrické výšky, tj.

$$\vec{q} = -T\nabla h,$$

obdržíme

$$-\operatorname{div}(T\nabla h) = -S\frac{\partial h}{\partial t} + P,$$

tj.

$$S\frac{\partial h}{\partial t} = \operatorname{div}(T\nabla h) + P,$$

kde T je transmisivita (zpravidla vodivost k z 3D varianty Darcyho zákona, vynásobená tloušťkou zvodnělé vrstvy). Pokud je možnost zvolit soustavu tak, že geometrické vlastnosti jsou v souladu s fyzikálními (jedna osa je ve směru největší a druhá ve směru nejmenší vodivosti), je tenzor T diagonální a rovnice se redukuje na

$$S\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T_x\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_y\frac{\partial h}{\partial y}\right) + P.$$

Rovnice vedení tepla ve 2D v různých podmínkách

Uvažujme rovnici vedení tepla ve dvou rozměrech a v prostředí bez zdrojů.

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(D\nabla T) \tag{***}$$

Stacionární stav

Stacionární stav znamená, že stavové veličiny nezávisí na čase. Derivace podle času je v takovém případě nulová. Rovnice (***) se redukuje na

$$\operatorname{div}(D\nabla T) = 0.$$

Homogenní izotropní materiál a lineární materiálové vztahy

Materiál má ve všech místech (homogenní) a ve všech směrech (izotropní) stejné vlastnosti. Veličina D je reálná skalární veličina (konstanta).

Podle pravidla derivace konstantního násobku se rovnice (***) redukuje na

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = D\operatorname{div}(\nabla T)$$

a ve složkách

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right).$$

Pro $\tau = \dfrac{Dt}{\rho c}$ (změna jednotky času) dostáváme

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Ortotropní materiál, nehomogenní nebo nelineární

Materiál má dva charakteristické směry související s rovinami symetrie. Zvolíme soustavu souřadnic tak, aby osy byly orientovány ve směru vlastních vektorů.

Veličina D je diagonální matice. Pro

$$D = \begin{pmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{pmatrix}$$

je tvar rovnice (***) ve složkách

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Homogenní ortotropní materiál a lineární materiálové vztahy

Materiál má dva charakteristické směry související s rovinami symetrie a materiálové charakteristiky jsou ve všech místech stejné a nezávislá na T. Stejné jako předchozí případ, ale D_x a D_y jsou konstanty. Podle pravidla pro derivaci konstantního násobku se rovnice (***) redukuje na

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = D_x\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + D_y\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Shrnutí, hlavní myšlenky

- Pomocí gradientu a aparátu lineární algebry můžeme vyjádřit vztah mezi pohybem fyzikální veličiny a mechanismem, který tento pohyb iniciuje. Většinou se jedná o vztah mezi vektorovým polem toku a gradientem jistého skalárního pole.

- Pomocí parciálních derivací a divergence dokážeme určit, jestli se v nějakém místě veličina proudící tímto místem “ztrácí” nebo “přibývá”.
- Dokážeme dokonce s rozumnou interpretací, čím případné ubývání přenášené veličiny může být způsobeno (zdroje a spotřebiče nebo akumulace v daném místě), zformulovat rovnici, která dané proudění plně popisuje. Výsledkem jsou rovnice vedení tepla, rovnice difuze, rovnice proudění podzemní vody a jiné.
- Obecná rovnice odvozená podle předchozích bodů je obecná a pro práci na konkrétní úloze se ji snažíme nějak blíže specifikovat. Například zjednodušit, pokud máme informaci o charakteru materiálových vztahů (lineární/nelineární) a materiálu (homogenní/nehomogenní). Jiným zjednodušením je, pokud se zajímáme o stacionární stav, který se nastolí po dosažení rovnováhy.
- Posláním široké škály příkladů různých specifikací rovnice kontinuity (vedení tepla, proudění povrchové a podzemní vody a další) je, aby si student uvědomil široký záběr obecné formulace rovnice kontinuity. Na zkoušku se naučte obecnou rovnici a jenom informativně si přečtěte její speciální případy. Obory pracující se dřevem (dřevařství, nábytek, dřevostavby) si uložte do paměti rovnice popisující modelování tepla a vlhkosti ve dřevě. Budou se vám hodit ve studiu. Na krajinářství se zase zaměřte na modelování vody, mělké i podzemní.

Kapitola 11

Dvojný integrál

Dvojný integrál

Uvažujme plošný materiál (desku) s danou plošnou hustotou. Budeme se snažit vypočítat hmotnost.

- Pokud je deska homogenní, je její (plošná) hustota desky konstantní a její hmotnost je možno získat jednoduše jako součin této hustoty a obsahu.
- Pokud deska není homogenní, ale skládá se z konečného počtu homogenních kousků, určíme postupem z minulého bodu hmotnost každého kousku a tyto hmotnosti poté sečteme.
- Zbývá případ, kdy je hustota dána nějakou obecnou funkcí. Pokud se hustota desky mění a v obecném bodě (x, y) je dána funkcí $f(x, y)$, můžeme myšlenkově rozdělit desku na malé kousky, v rámci každého malého kousku hustotu aproximovat konstantou a postupovat jako u desky z konečného počtu (malých) homogenních částí.
- Získaná veličina je aproximací celkové hmotnosti. Pro jemnější dělení se přesnost aproximace zlepšuje.

V limitním přechodu kdy rozměry všech kousků na něž je deska dělena jde k nule dostáváme **dvojný integrál**

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde Ω je oblast v rovině (x, y) definovaná uvažovanou deskou. V aplikacích je častý též zápis

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}A$$

nebo

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}S.$$

Linearita a aditivita

Dvojný integrál je odvozen (tak jako všechny integrály) pro aditivní veličiny a proto se “dobře snáší” se sčítáním (ať už integrovaných funkcí, nebo integračních oborů) a s násobení integrované funkce konstantou. Přesněji, platí následující věty.

Věta (linearita dvojného integrálu). *Buď f_1, f_2 funkce integrovatelné v Ω a c_1, c_2 libovolná reálná čísla. Platí*

$$\begin{aligned}&\iint_\Omega [c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\quad = c_1 \iint_\Omega f_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + c_2 \iint_\Omega f_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Věta (aditivita vzhledem k oboru integrace). *Nechť je množina Ω rozdělena na dvě oblasti Ω_1 a Ω_2, které mají společné nejvýše hraniční body. Platí*

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Omega_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Výpočet (oblast mezi funkcemi proměnné x)

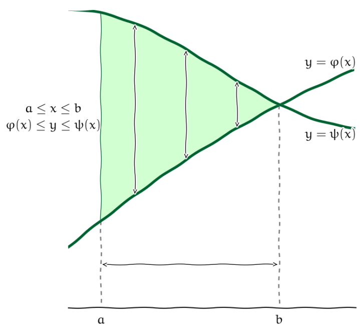
V závislosti na tom, jakými nerovnostmi množinu Ω definujeme, můžeme pro výpočet dvojného integrálu použít následující věty. Tyto věty udávají, jak je možno dvojný integrál přepsat jako dva iterované integrály funkce jedné proměnné, tzv. dvojnásobný integrál. Mají název **Fubiniovy věty**.

Věta (převod dvojného integrálu na dvojnásobný). *Nechť f je funkce spojitá v uzavřené oblasti*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ a } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Potom

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x.$$



Obrázek 11.1: *Oblast mezi funkcemi proměnné x.*

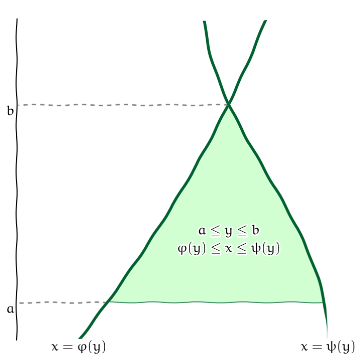
Výpočet (oblast mezi funkcemi proměnné y)

Věta (převod dvojného integrálu na dvojnásobný). *Nechť f je funkce spojitá v uzavřené oblasti*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b \text{ a } \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}.$$

Potom

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y.$$



Obrázek 11.2: *Oblast mezi funkcemi proměnné y.*

Záměna pořadí integrace

Často je možné oblast integrace zapsat pomocí obou možností uvedených na předchozích slidech. Například oblast na obrázku je možno zapsat buď jako

$$0 \leq x \leq 2$$
$$0 \leq y \leq x^2$$

nebo

$$0 \leq y \leq 4$$
$$\sqrt{y} \leq x \leq 2.$$

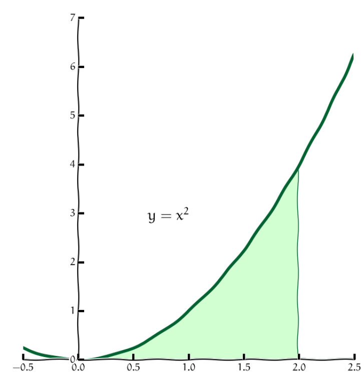
Pro integrál funkce $f(x,y)$ přes takovou množinu tedy máme dvě alternativy:

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

a

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Všimněte si, že nestačí prosté prohození integrálů. Je nutno přepočítávat meze a hraniční křivky je nutno vyjádřit jednou jako funkce proměnné x a jednou jako funkce proměnné y. V důsledku tohoto dochází v průběhu výpočtu dvěma různými způsoby k tomu, že pracujeme se dvěma různými integrály. Výsledky jsou stejné, nemusí však být dosažitelné srovnatelnou námahou, jedna z cest může být snazší.



Obrázek 11.3: *Oblast, pro kterou jsou možná obě pořadí integrace.*

Výpočet (obdélníková oblast)

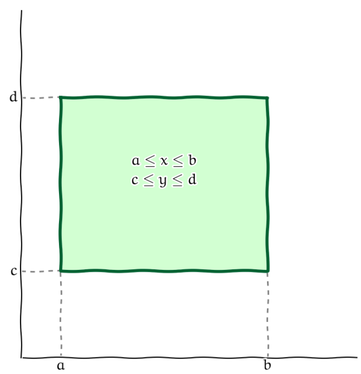
Výše uvedené problémy se stanovením a případným přepočítáváním mezí při záměně pořadí integrace se nevyskytují při integrování přes obdélníkovou oblast.

Věta (dvojný integrál na obdélníkové množině). *Nechť $R = [a,b] \times [c,d]$ je uzavřený obdélník v $\mathbb{R}^2$ a f funkce definovaná a spojitá na R. Pak platí*

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y.$$

Platí-li dokonce rovnost $f(x,y) = g(x)h(y)$, pak

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \int_c^d h(y)\mathrm{d}y.$$



Obrázek 11.4: *Integrál přes obdélník.*

Matematické aplikace dvojného integrálu

- **Obsah** $\mu(\Omega)$ množiny Ω vypočteme jako integrál

$$\mu(\Omega) = \iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- **Integrální střední hodnota** funkce $f(x,y)$ definované na množině Ω je

$$\frac{\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\mu(\Omega)},$$

kde $\mu(\Omega) = \displaystyle\iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ je obsah množiny Ω.

Fyzikální aplikace dvojného integrálu

- **Hmotnost** množiny M je

$$m = \iint_M \sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $\sigma(x,y)$ je **plošná hustota** (hmotnost vztažená na jednotku povrchu).

- **Lineární momenty** hmotné množiny M vzhledem k osám y a x jsou rovny

$$\iint_M x\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

a

$$\iint_M y\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- **Moment setrvačnosti** hmotné množiny M vzhledem k ose je

$$J = \iint_M \rho^2(x,y)\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $\rho(x,y)$ je vzdálenost bodu (x,y) od osy otáčení. Například pro osu x je $\rho(x,y) = y$ a pro osu y je $\rho(x,y) = x$. Pro osu procházející kolmo počátkem je $\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Fyzikální aplikace dvojného integrálu (pokračování)

- **Souřadnice těžiště** množiny jsou podílem lineárních momentů a celkové hmotnosti množiny.
- **Kvadratický moment průřezu** (což je moment setrvačnosti pro $\sigma(x,y) = 1$, anglicky *second moment of area*) je veličina, která hraje podstatnou roli v mechanice (nábytek, stavby) při dimenzování (polic, nosných tyčí, nosníků).
- Vzorce pro obsah x-ovou souřadnici těžiště (x_0), y-ovou souřadnici těžiště (y_0), kvadratický moment vzhledem k ose x (I_x) a kvadratický moment vzhledem k ose y (I_y) (pro množinu M s plošnou hustotou 1) jsou

$$x_0 = \frac{1}{S}\iint_M x\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad I_x = \iint_M y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$y_0 = \frac{1}{S}\iint_M y\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad I_y = \iint_M x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $S = \mu(M)$ je obsah množiny M. Poloha těžiště je tedy střední hodnotou funkcí x a y.

Aplikace dvojného integrálu - tuhost nosníků, stabilita stromů

Tuhost (odolnost vůči deformaci) pro nosník obdélníkového průřezu o výšce b a šířce a je dána kvadratickým momentem obdélníkového průřezu vzhledem k vodorovné ose procházející těžištěm.

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]\times[-\frac{b}{2},\frac{b}{2}]} y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \,\mathrm{d}y = a\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{12}ab^3 \end{aligned}$$

Odsud máme okamžitě několik pozorování

- Pokud šířka vzroste dvakrát, tuhost vzroste také dvakrát. Pokud ale dvakrát vzroste výška, tuhost vzroste dokonce osmkrát. Pro nosník s poměrem stran 1:2 je poměr tuhostí při poloze naplacato a nastojato roven 1:4.
- Pro nosník čtvercového průřezu ($a = b$) roste tuhost se čtvrtou mocninou rozměrů. Obsah (a tedy i hmotnost) roste s druhou mocninou. Pokud tedy u nosníku se čtvercovým průřezem zdvojnásobíme množství materiálu, tuhost vzroste čtyřnásobně. Toto si můžeme představit tak, že jsme původní nosník obalili trubkou vyrobenou ze stejného množství materiálu. Protože společná tuhost je čtyřnásobná, znamená to, že přidaná trubka má trojnásobnou tuhost než původní tyč. Proto se v konstrukcích nepoužívají tyče, ale trubky nebo analogické struktury (I-čka apod). I příroda zná tyto zákonitosti a kosti tvořící opěrný aparát živočichů jsou trubkovitého tvaru.
- Pro čtvercový průřez roste tuhost se čtvrtou mocninou délky strany
$$I_x = \frac{1}{12}a^4.$$
Stejná závislost (přímá úměrnost mezi kvadratickým momentem a čtvrtou mocninou rozměru) musí být u každého průřezu jednoparametrického tvaru, například pro kruh. To plyne například z věty nazývané Buckinghamův Π teorém. Jako aplikaci uvažujme strom modelovaný jako nosník s kruhovým průřezem. Například strom, ve kterém je dutina o velikosti poloviny průměru kmene většinou vyvolá obavy ze stability. I když taková dutina vypadá obrovská, tuhost se sníží o původní tuhost vynásobenou koeficientem
$$(0.5)^4 = 0.0625 \approx 6\%.$$
Vidíme, že i s hrozivě vypadající dutinou má kmen pořád tuhost 94% původní tuhosti (za předpokladu dutiny uprostřed kmene). Z hlubšího fyzikálního rozboru, který je nyní nad rámec našeho popisu, pevnost roste jenom s třetí mocninou a proto odolnost vůči zlomení klesne o něco více než tuhost.

Aplikace dvojného integrálu - těžiště složeného obrazce

Uvažujme množinu M s jednotkovou plošnou hustotou, rozdělenou na dvě disjunktní části M_1 a M_2. Tyto množiny mají x-ovou polohu těžiště v bodě

$$x_{0i} = \frac{1}{S_i}\iint_{M_i} x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad S_i = \iint_{M_i} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad i = 1, 2.$$

Poloha těžiště není aditivní veličinou. Dvojný integrál však aditivní veličinou je. Platí

$$\begin{aligned} \iint_M x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{M_1} x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{M_2} x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= S_1x_{01} + S_2x_{02} \end{aligned}$$

a těžiště množiny M je

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{S_1+S_2}\iint_M x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{S_1+S_2}(S_1x_{01} + S_2x_{02}) \\ &= \frac{S_1x_{01} + S_2x_{02}}{S_1+S_2}. \end{aligned}$$

Totéž je možné provést pro y-ovou souřadnici, nebo pro libovolný konečný počet částí. Podobně je možné odvodit vzorec s obecnou nekonstantní plošnou hustotou. Poloha těžiště složeného obrazce je tedy *váženým průměrem* těžišť jednotlivých složek, kde váha každé složky je určena její hmotností. Protože se jedná o vážený průměr, tj. vlastně o lineární kombinaci bodů, kdy součet koeficientů je roven jedné, okamžitě vidíme, že těžiště složeného obrazce je na úsečce mezi těžišťmi jednotlivých částí.

Zobecnění výše uvedených myšlenek na množinu rozdělenou na více částí je již snadné.

Aplikace dvojného integrálu - Steinerova věta

Nechť je dána množina M s plošnou hustotou $\sigma(x, y)$. *Ukážeme, že vzhledem k ose procházející těžištěm je nejmenší moment setrvačnosti.* Ukážeme si dále, že pomocí momentu setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm je možné vyjádřit momenty setrvačnosti i k libovolným rovnoběžným osám. Pro jednotkovou plošnou hustotu dostáváme jako speciální případ vzorce pro kvadratický moment, důležité ve statice.

Nechť $m = \iint \sigma(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $y_0 = \frac{1}{m}\iint_M y\sigma(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a $I_{xT} = \iint_M (y - y_0)^2\sigma(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ jsou hmotnost, y-ová poloha těžiště a moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm rovnoběžně s osou x. Moment setrvačnosti vhledem k ose x je

$$I_{x0} = \iint y^2\sigma(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Platí (píšeme zkráceně σ místo $\sigma(x,y)$)

$$\begin{aligned}
I_{xT} &= \iint_M (y-y_0)^2\sigma \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_M (y^2-2yy_0+y_0^2)\sigma \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_M y^2\sigma \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2y_0\iint_M y\sigma \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + y_0^2\iint_M \sigma \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= I_{x0} - 2y_0my_0 + y_0^2m \\
&= I_{x0} - my_0^2.
\end{aligned}$$

Odsud dostáváme

$$I_{x0} = I_{xT} + my_0^2,$$

což lze interpretovat tak, že *moment setrvačnosti vhledem k ose o je součtem momentu setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm rovnoběžně s o a momentu setrvačnosti hmotného bodu ležícího v těžišti množiny a o stejné hmotnosti jako je hmotnost množiny vzhledem k ose o.*

Aplikace dvojného integrálu - tlak na svislou plochu

Vzorec pro tlakovou sílu $F = pS$ není možné použít například pro výpočet celkové síly působící na svislou stěnu nebo hráz, protože tlak p se mění s hloubkou a není tedy konstantní na celém průřezu o obsahu S. Pro obdélníkovou stěnu jsme úlohu vyřešili (viz Mojžíšův most) pomocí integrálu, pro stěnu obecného tvaru použijeme integrál dvojný.

Uvažujme svislou rovinnou hráz M. Hrází je přitom myšlena rovinná množina s jednotkovou plošnou hustotou, ne postavený trojrozměrný objekt. Počátek kartézské soustavy souřadnic volíme u hladiny, osa y směřuje dolů, osa x vodorovně. Tlak v hloubce y je roven $p = y\rho g$, kde ρ je hustota vody a g tíhové zrychlení. Na plochu o rozměrech ΔS v hloubce y působí tlaková síla

$$\Delta F = y\rho g\Delta S.$$

Tato tlaková síla má ve všech bodech hráze stejný směr a celkovou sílu na hráz je možno zjistit sečtením sil v jednotlivých bodech. Podobná myšlenková úvaha jako v úvodu pro hmotnost desky, nebo přesný matematický popis, nás dovedou k tomu, že celková síla na hráz je dána integrálem

$$F = \iint_M y\rho g \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Protože g a ρ jsou konstanty, je možno psát

$$F = \rho g \iint_M y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Využijeme-li vzorec pro y-ovou souřadnici těžiště, má výsledný vztah tvar

$$F = \rho g y_0 S,$$

kde S je obsah hráze. Formálně tento vztah odpovídá vzorci

$$F = p_0 S, \tag{H1}$$

kde $p_0 = \rho g y_0$ je tlak v těžišti. *Proto v praxi stačí znát těžiště hráze a pro výpočet síly na hráz použít celkovou plochu hráze a tlak v těžišti.* Protože jsme pracovali s obecnou množinou M, není tento poznatek nijak vázán na konkrétní tvar hráze. Musí být však splněna podmínka, že všechny body hráze leží v jedné rovině.

Ve výpočtu výše jsme uvažovali svislou rovinu, ale zobecnění na šikmou rovinu je snadné. Stačí opravit vztah pro hloubku, protože když svislou množinu i s kartézskými souřadnicemi pootočíme okolo osy procházející hladinou, hloubka všech bodů se sníží faktorem $\sin\alpha$, kde α je úhel mezi vodorovnou hladinou a rovinou hráze. Formálně tato operace dopadne stejně, jako kdybychom tekutinu nahradili tekutinou s hustotou $\sin\alpha$-krát nižší. Protože však vztah (H1) nezávisí na hustotě, nic se na něm nezmění. Také zobecnění na několik rovin je snadné. Zobecnění na zakřivenou plochu je náročnější a vyžaduje jiný typ integrálu.

V předchozím textu jsme proměnnou veličinu popisující tlak na hráz jako funkci hloubky nahradili konstantní veličinou, udávající tlak v těžišti. Výsledný účinek na hráz se nezměnil. To je přesně smysl střední hodnoty. V matematických pojmech je možno říci, že střední hodnota tlaku na svislou hráz je rovna tlaku v těžišti hráze. (Protože hrází myslíme spíše rovinnou plochu, tak by přesnější terminologie měla používat raději pojem geometrický střed. Budeme se však držet ustálené terminologie.)

Nikde ve výpočtu jsme nepoužili konkrétní meze pro integraci. Výsledek tedy platí nejenom pro hráz dosahující k hladině, ale například i pro poklop výpusti, který je celý pod vodou.

Aplikace dvojného integrálu - působiště tlakové síly

Budeme pokračovat v předchozím příkladě a hledat působiště výsledné tlakové síly.

Tlaková síla působící na svislou hráz má celkový nulový moment vzhledem k ose proházející působištěm. Je-li hráz definována množinou M a je-li y_c působiště výsledné tlakové síly, je v hloubce y tlak na plošku o velikosti ΔS roven $y\rho g\Delta S$ a součin $(y_c - y)y\rho g\Delta S$ je příspěvek k otáčivému momentu vzhledem k ose, procházející vodorovně působištěm tlakové síly. Součet všech těchto příspěvků se nuluje, tedy musí platit

$$\iint_M (y_c - y)y\rho g \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Odsud po vydělení konstantami ρg dostáváme

$$\iint_M (y_c - y)y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

a po roznásobení závorky, rozdělení integrálu na dva a vytknutí konstanty

$$y_c \iint_M y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Nyní již snadno dostaneme výsledný vztah

$$y_c = \frac{\iint_M y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_M y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}. \tag{H2}$$

Pokud je množina M obdélník, je možné ji (po vhodné změně jednotek) brát jako jednotkový čtverec. Protože platí

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}, \quad \iint_{[0,1]\times[0,1]} y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3},$$

dostáváme $y_c = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ a působiště na obdélníkovou hráz je v hloubce odpovídající dvěma třetinám celkové hloubky.

Formálně vztah pro y_c odpovídá vztahu pro těžiště množiny s plošnou hustotou y. Na tomto pozorování a na skutečnosti, že u pravidelných množin umíme těžiště najít geometricky, je založena metoda nalezení působiště tlakové síly pomocí zatěžovacího obrazce.

Kvadratický moment v čitateli zlomku (H2) vyjadřujícího y_c je často výhodnější rozepsat pomocí Steinerovy věty. Ve jmenovateli je součin obsahu S a y-ové souřadnice těžiště y_0. Tím dostaneme

$$y_c = \frac{I_{x0} + S y_0^2}{S y_0} = \frac{I_{x0}}{S y_0} + y_0,$$

kde I_{x0} je kvadratický moment vzhledem k ose procházející vodorovně těžištěm. Působiště tlakové síly y_c je tedy posunuto směrem dolů od těžiště y_0 o hodnotu odpovídající kvadratickému momentu vzhledem k vodorovné ose těžištěm I_{x0} vyděleném součinem obsahu hráze S a y-ové polohy těžiště y_0.

Kapitola 12

Vybrané postupy numerické matematiky

Newtonova metoda

Newtonova metoda (též Newtonova Raphsonova metoda) je metoda pro numerické řešení rovnic. To používáme v případě, že není možné (nebo není účelné) řešit rovnici přesně a snažíme se najít přibližné řešení.

Budeme hledat řešení rovnice

$$f(x) = 0.$$

Budeme postupovat tak, že vyjdeme z nějaké aproximace řešení (získáme například graficky nebo zkusmo hrubou výpočetní silou) a tuto aproximaci budeme postupně zpřesňovat. Postup zpřesňování je takový, že v dosažené aproximaci funkci nahradíme lineární funkcí a další aproximace (zpřesnění předchozí aproximace) bude v nulovém bodu této lineární funkce. Za poměrně snadno splnitelných předpokladů (začneme dostatečně blízko nulového bodu a funkce má v nulovém bodě nenulovou derivaci) postup konverguje ke kořeni studované rovnice a to velmi rychle: každým krokem se přibližně zdvojnásobí počet míst, která máme správně.

Z lineární aproximace funkce f v bodě x_0

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

pro $x_0 = x_n$, $x = x_{n+1}$, $f(x_{n+1}) = 0$ dostáváme

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

a po osamostatnění x_{n+1} přímo iterační vzorec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Tento vzorec používáme opakovaně až do dosažení požadované přesnosti. Obvyklým testem pro ukončení výpočtu je porovnání dvou po sobě jdoucích iterací. Pokud se v rámci požadované přesnosti shodují, výpočet končí a známe přibližné řešení zadané rovnice.

Příklad. Zkusme najít číslo takové, jehož kosinus je stejný jako toto číslo. Rovnici

$$x = \cos x$$

nejprve přepíšeme do tvaru

$$x - \cos x = 0$$

a hledáme vlastně řešení nulový bod funkce $f(x) = x - \cos x$. Po dosazení $f'(x) = 1 + \sin x$ získáváme iterační vzorec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$$

a jednotlivé iterace s počátečním odhadem $x_0 = 1$ a s aproximací na 80 desetinných míst dávají postupně následující hodnoty.

```
0.75036386784024389303494230668217685324699306585535903096658315202443061372724844
0.73911289091136167036058529090489023400289283673565690732340797067262734474030949
0.73908513338528396976012512085680433288953312317018897963123060924114905347788420
0.73908513321516064166170262568502637232522326252964269151340253531790167136371866
0.73908513321516064165531208767387340401342077636703525840515904303894688001184009
0.73908513321516064165531208767387340401341175890075746496568063577328465488354759
0.73908513321516064165531208767387340401341175890075746496568063577328465488354759
```

Vidíme, že proces opravdu neuvěřitelně rychle konverguje k řešení rovnice.

Nondimenzionalizace a bezrozměrné veličiny

Rovnice vedení tepla v jedné dimenzi (prostup tepla stěnou, vedení tepla tyčí) má tvar (viz minulá přednáška)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{\partial T}{\partial x}\right),$$

kde $T(x,t)$ je teplota v místě x a čase t, ρ je hustota, c je měrná tepelná kapacita, D je teplotní vodivost. Pro homogenní stěnu nebo tyč a lineární materiálovou odezvu je D konstanta a můžeme ji vytknout z derivace na pravé straně a psát

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Pro úplnou formulaci úlohy na nalezení teploty v jednotlivých místech stěny musíme zadat polohu stěny, teplotu na vnějším a vnitřním okraji stěny a počáteční rozložení teploty ve stěně.

Nechť tedy okraje jsou $x = 0$ a $x = L$, a teploty na okrajích a počáteční rozložení teploty jsou

$$\begin{aligned} T(0,t) &= T_0 \\ T(L,t) &= T_1 \quad . \\ T(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

Analogicky jako u obdobného příkladu s chladnutím tělesa podle Newtonova zákona (viz přednáška o diferenciálních rovnicích) zavedeme bezrozměrnou teplotu tak, aby se podmínky na okrajích redukovaly na konstanty. Zavedeme-li bezrozměrnou teplotu

$$\xi(x,t) = \frac{T(x,t) - T_0}{T_1 - T_0}$$

a bezrozměrnou vzdálenost $\mu = \dfrac{x}{L}$, redukuje se model podle stejných pravidel, jaká jsme poznali u obyčejných rovnic, na

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial \xi}{\partial t} &= D \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mu^2}, \\ \xi(0,t) &= 0, \\ \xi(1,t) &= 1, \\ \xi(\mu,t) &= f_\xi(\mu), \end{aligned}$$

kde $f_\xi(\mu)$ je počáteční rozložení teploty transformované do nových veličin. Přepíšeme-li rovnici na tvar

$$\frac{1}{\frac{D}{L^2 \rho c}} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mu^2},$$

vidíme, že zavedení bezrozměrného času vztahem $\tau = \dfrac{Dt}{\rho c L^2}$ redukuje úlohu z původního tvaru (kde každý člen má svůj fyzikální význam a přímou interpretaci)

$$\boxed{\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 T}{\partial x}, \\ T(0,t) &= T_0, \\ T(L,t) &= T_1, \\ T(x,t) &= f(x), \end{aligned}}$$

na tvar

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2}, \\ \xi(0,\tau) &= 0, \\ \xi(1,\tau) &= 1, \\ \xi(\mu,0) &= f_\xi(\mu), \end{aligned}}$$

který je mnohem jednodušší pro následnou numerickou analýzu nebo analytické studium. Mimo jiné je tím ukázáno, že pro danou úlohu nemají podstatný význam jednotlivé veličiny samy o sobě, ale veličina $\tau = \dfrac{Dt}{\rho c L^2}$, definující bezrozměrný čas. Tato veličina se nazývá Fourierovo číslo. Obdobným postupem získáme jiná čísla důležitá pro popis jiných procesů, jako jsou Biotovo číslo (vedení tepla), Reynoldsovo číslo (proudění tekutin), Froudeho číslo (proudění tekutin) apod. Podobná nondimenzionalizace pro vlhkostní pole ve dřevě je v publikaci Horáček P., Fyzikální a mechanické vlastnosti dřeva. Viz též eopora, rovnice (144) a rovnice následující.

Metoda konečných diferencí

Vraťme se s aparátem matematického popisu vedení tepla k úloze hledání rozložení teploty na čtvercové desce, kterou jsme představili v přednášce o lineární algebře: Je dána deska čtvercového tvaru, jejíž okraje udržujeme na konstatních teplotách (každý okraj obecně na jiné teplotě) a hledáme rovnovážné rozložení teploty. Dvourozměrná rovnice vedení tepla pro homogenní izotropní desku s materiálovými charakteristikami ρ, c a D má tvar

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Ve stacionárním stavu se teplota nemění s časem a proto je levá strana nulová a rovnice se redukuje na

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Použijeme stejnou myšlenku jako v lineární algebře: rozdělíme desku čtvercovou sítí na malé oblasti a budeme studovat teplotu v bodech této sítě, tj. v rozích jednotlivých čtverců, na které je deska čtvercovou sítí rozdělena.

Z přednášky o derivacích a aproximaci víme, že funkci můžeme aproximovat v okolí námi zvoleného bodu Taylorovým polynomem a v kapitole o diferenciálních rovnicích jsme tuto aproximaci použili pro aproximaci druhé derivace konečnými diferencemi ve tvaru

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)].$$

Podobně pro parciální derivace funkce dvou proměnných $f(x,y)$ dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h^2}[f(x+h,y) - 2f(x,y) + f(x-h,y)] \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &\approx \frac{1}{h^2}[f(x,y+h) - 2f(x,y) + f(x,y-h)] \end{aligned}$$

a odsud

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}[&f(x+h,y) + f(x-h,y) + f(x,y+h) \\ &+ f(x,y-h) - 4f(x,y)]. \end{aligned}$$

Z rovnice

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

popisující rozložení teploty vyplývá, že výraz v hranaté závorce musí být nulový, tj.

$$f(x,y) = \frac{1}{4}[f(x+h,y) + f(x-h,y) + f(x,y+h) + f(x,y-h)].$$

To však znamená, že teplota v každém uzlovém bodě je průměrem teplot v okolních uzlových bodech. Přesně, jak jsme se (možná poněkud naivně) domnívali při představení úlohy v přednášce z lineární algebry. Nyní tento postup stavíme na solidní vědecký základ, založený na rovnici popisující fyzikální proces (rovnice vedení tepla) a na numerické aproximaci, která převede parciální diferenciální rovnici na soustavu lineárních rovnic.

Výše popsaná myšlenka je základem **metody konečných diferencí.** Bohužel je tato metoda poměrně omezená nutností, mít ekvidistantní rozložení uzlů. Proto se v praxi používají vyspělejší metody, metoda konečných prvků nebo metoda konečných objemů. Základní myšlenka je stejná (parciální diferenciální rovnice se převede na soustavu lineárních rovnic) a praktické provedení zpravidla matematicky triviální, protože vše potřebné pro výpočty je předprogramováno v softwaru určenému pro danou úlohu. Máme takto software umožňující simulovat vedení tepla, tepelné úniky, tepelné nebo mechanické namáhání, tok podzemní i povrchové vody a další důležité praktické aplikace. Uživatel jenom zadá geometrii, typ problému a okrajové a počáteční podmínky a program vypočte potřebná řešení a dle požadavků je různým způsobem interpretuje.

Ukázka programu FlexPDE

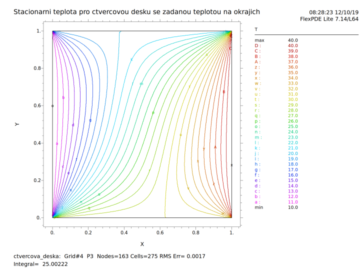
Existuje široká škála programů pro řešení diferenciálních rovnic. V mnoha jsou předpřipravené modely, předdefinované fyzikální úlohy a někdy dokonce databáze materiálových vlastností. V jiných programech je řešená rovnice plně pod kontrolou autora modelu a je možné snadno řešit i multifyzikální úlohy (například současně modelovat teplotu a vlhkost v materiálu). Zástupce druhé skupiny je FlexPDE firmy PDE Solutions Inc. Úloha s rozložením tepoty na čtvercové desce se zadanými teplotami na okrajích, na kterou jsme několikrát jako na motivaci narazili v lineární algebře a připomněli na předchozím slidu, by měla následující zápis a výstup.

```
TITLE 'Stacionarni teplota pro ctvercovou desku se zadanou teplotou na okrajich'
VARIABLES T
EQUATIONS T: div(grad(T))=0
INITIAL VALUES T=10

BOUNDARIES
REGION 1
    START(0,0) VALUE(T)=30 LINE TO (1,0)
    VALUE(T)=40 LINE TO (1,1)
    VALUE(T)=20 LINE TO (0,1)
    VALUE(T)=10 LINE TO CLOSE

PLOTS
  CONTOUR(T)
  SURFACE(T)
END
```

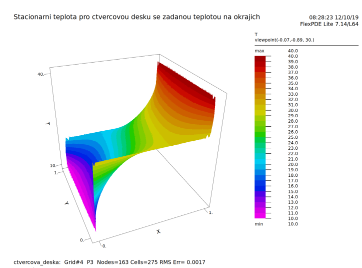
Rovnice je v popisu modelu zadána jako divergence gradientu, což v kartézských souřadnicích ve 2D vede právě na rovnici

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Jiná forma zápisu je přímo pomocí druhých parciálních derivací ve tvaru `DXX(T)+DYY(T)=0`.



Obrázek 12.1: *Teplota znázorněná pomocí izoterm.*



Obrázek 12.2: *Teplota znázorněná pomocí barev a 3D grafu.*