

Matematika, náhradní příklady za neúčast na cvičení

Příklady jsou povinné pro studenty, kteří mají více než dvě absence ve cvičení. Je nutné je vypočítat, odevzdat a v případě nesrovnalostí opravit před zkouškou. Odevzdání je přípustné osobně jako rukopis (přednášejícímu nebo cvičícímu), vhozením do schránky ústavu v přízemí budovy B v obálce se jménem přednášejícího nebo mailem na marik@mendelu.cz jako jedno PDF, které může být z kvalitních skenů rukopisu.

1. Matice

- (A) Najděte vlastní vektory matice $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.
- (B) Ve cvičení 10.8 se pracuje s maticí, která reprezentuje derivování polynomů druhého stupně. Mějme obecný polynom druhého stupně $ax^2 + bx + c$ zapsaný jako sloupcový vektor $(a, b, c)^T$ a ukažte, že existuje matice A taková, že po zobrazení reprezentovaném maticí A je obrazem polynomu $ax^2 + bx + c$ polynom $cx^2 + a$, tj. matice vymaže lineární člen a prohodí koeficienty u kvadratického a absolutního členu. Odhadněte, jak vypadají matice A^2 a A^3 , odpověď zdůvodněte a poté potvrďte výpočtem.

2. Punč s děkanem

Děkan pozval fakultní veřejnost na punč. Ten se koná po setkání akademické obce 9.12.2019.

- (A) Před zahájením akce je punč uvařen a ve várnici. Ochlazuje se podle Newtonova zákona tepelné výměny, tj. rychlost s jakou klesá teplota punče je úměrná rozdílu teploty punče a okolí. Zapište proces kvantitativně pomocí vhodného modelu.
- (B) Rychlost ochlazování souvisí s objemem punče. Větší objem se jistě ochlazuje jinou rychlostí než malý objem. Nechť je dána rychlost ochlazování punče (například ve stupních Celsia za minutu). Co bude vyjadřovat derivace této rychlosti podle objemu, v jakých bude jednotkách a jaké očekáváme znaménko této derivace?
- (C) Po zahájení akce lze předpokládat, že děkan bude stálou rychlostí nalévat punč nekončícímu zástupu a objem punče ve várnici se bude snižovat konstantní rychlostí. Najděte funkci udávající objem punče ve várnici jako funkci času.
- (D) Použijeme předchozí výsledky k modelování teploty punče. Rychlost poklesu teploty bude přímo úměrná rozdílu teplot (podobně jako v A) a dále bude buď přímo nebo nepřímo úměrná objemu punče, který ještě je ve várnici. Vyberte správný druh úměrnosti (podle odpovědi na část B), použijte pro objem výsledek části C a sestavte matematický model pro teplotu punče.
- (E) Setkání akademické obce se za dramatických okolností protáhlo a punč bylo potřeba přehřát. Proděkan postavil punč na zapnutý vaříč a odešel. Rostoucí teplota způsobila, že z punče se začal destilovat etanol a obsah etanolu v punči se začal snižovat. Rychlost s jakou se měnil obsah etanolu je $\frac{dc}{dt} = (-2 - t)$ procenta za hodinu, kde t je čas v hodinách měřený od okamžiku, kdy punč dosáhl teploty, při které se odděluje etanol. (Rychlost je záporná, protože obsah alkoholu klesá.) Toto "plýtvání" trvalo půl hodiny. O kolik procent klesl během této půlhodiny obsah etanolu v punči?

Robert Mařík, 2.prosince 2019