**Příklady Matematika.**

Povinné pro studenty s více než dvěma absencemi (odevzdat osobně nebo mailem), doporučené pro všechny (neodevzdávat, ale je možnost si přijít nechat zkontrolovat řešení).

**Příklad 1. Vypočtěte derivace a integrály.**

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}x^2\sin(x)\right)$
- $\left(2+6x\sqrt{x}\right)'$
- $\int 2x^2\sin(x^3)\,\mathrm{d}x$
- $\int_0^1 \frac{2}{x+3}\,\mathrm{d}x$

**Příklad 2. Vlastní čísla.** Určete alespoň jedno vlastní číslo a příslušný vlastní vektor matice

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

**Příklad 3. V nádrži je díra.** Nádrž má tvar válce neomezené výšky. Máme tři různé úlohy.

(A) Do nádrže teče voda konstantní rychlostí. Rychlost, s jakou roste hladina, je konstantní.

(B) Z nádrže vytéká dírou ve dně voda. Rychlost, s jakou klesá hladina, je úměrná odmocnině z výšky hladiny.

(C) Součet obojího, voda přitéká konstantní rychlostí a odtéká rychlostí úměrnou odmocnině z výšky hladiny.

Vyřešte následující úlohy.

(1) Modelujte pomocí diferenciální rovnice každý z jednotlivých dějů.

(2) Nejjednodušší z těchto tří modelů vyřešte.

(3) U každého z modelů najděte konstantní řešení (pokud existuje).

*Poznámka:* Je snadné vidět, že jeden s modelů skončí s nulovou hladinou, jeden s hladinou shora neohraničenou a u jednoho se ustálí hladina na nenulové hodnotě. To znamená, že přesto, že třetí model je v jistém smylu součtem prvních dvou, řešení tohoto modelu není součtem řešení prvních dvou modelů.

**Příklad 4. O Otesánkovi.** Otesánek se vykrmil do tvaru koule o průměru 2,4 m a dále baští. Jeho objem roste konstantní rychlostí $0{,}002\mathrm{m}^3/\mathrm{hod}$. Jak rychle roste jeho průměr?