Cvičení Matematika LDF, bak. 1. ročník

9. května 2019

Řešení budou zveřejněna na webu předmětu `http://user.mendelu.cz/marik/mt`.

Příklad 1.

(i) Rovnici vedení tepla

$$\varrho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(D \nabla T)$$

ve dvou dimenzích (pro plošný materiál) rozepište do složek v kartézských souřadnicích. Uvažujte co nejobecnější případ (nehomogenní, anizotropní).

(ii) Poté upravte rovnici z předchozího bodu pro jednu dimenzi (tyčový materiál).

(iii) Poté upravte rovnici z prvního bodu pro ortotropní materiál orientovaný tak, že souřadné osy odpovídají vlastním směrům difuzní matice a koeficienty difuzní matice nezávisí na prostorových souřadnicích (materiál je homogenní).

Příklad 2. Stěnu oddělující dvě prostředí rozdílné teploty můžeme modelovat jako tyč (velmi krátkou a tlustou, ale jednorozměrnou), u které udržujeme konce na konstantních teplotách. Ukažte, že ze stacionární rovnice vedení tepla plyne, že v homogenním prostředí se teplota mění lineárně.

Příklad 3. Budeme studovat rozložení teploty v dutém válci, u kterého udržujeme na dvou rozdílných konstantních teplotách vnitřní a vnější stěnu. Ukažte, že teplota se nemění lineárně.

Návod: Pro tyto případy je vhodné mít teplotu zapsánu nikoliv pomocí kartézských souřadnic, ale jako funkci vzdálenosti r od počátku. Podle Wikipedie je

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2},$$

kde r a φ jsou polární souřadnice, vzdálenost od osy válce a odchylka od kladného směru osy x.

Příklad 4. Ukažte, že operátor divergence je možné psát ve tvaru

$$\nabla \cdot \vec{F},$$

kde $\vec{F}$ je vektorové pole, tečka značí skalární součin vektorů, pseudovektor ∇ je definován vztahem

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

a pseudosoučin výrazů $\dfrac{\partial}{\partial x}$ a u, tj výraz $\dfrac{\partial}{\partial x} u$ chápeme jako parciální derivaci.

Příklad 5. V publikaci *Berner et al, POD and Galerkin-based reduction of a wood chip drying model, IFAC PapersOnLine 50-1 (2017) 6619–6623* je studován model teplotního pole $T(y,t)$ a vlhkosti $x(y,t)$ v následujícím tvaru.

$$\frac{\partial x(y,t)}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\bar{\delta}(T(y,t))\nabla x(y,t)\right) \qquad (1)$$

and Fourier's thermal conduction law for inhomogeneous materials

$$\rho(x(y,t))c_{\mathrm{p}}(x(y,t))\frac{\partial T(y,t)}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\bar{\lambda}(x(y,t))\nabla T(y,t)\right) \qquad (2)$$

where y is the spatial coordinate. Here the density $\rho(x(y,t))$ and the heat capacity $c_{\mathrm{p}}(x(y,t))$ are material parameters and depend on the local moisture content. The diffusion coefficients $\bar{\lambda}(x(y,t))$ and $\bar{\delta}(T(y,t))$ are of dimension $\mathbb{R}^{3\times 3}$ due to anisotropic material behavior. Note that the coupling of (1) and (2) is obvious. Both state variables $x(y,t)$ and $T(y,t)$ appear in both equations.

Okomentujte rovnici a její jednotlivé členy. Jsou to difuzní rovnice, jak jsme se s nimi seznámili na přednášce? Je zde něco navíc? Chybí některý člen? Je možné něco říci o předpokladech implicitně obsažených v takovéto konkrétní formulaci rovnic?

Příklad 6. *Gasparina et al, An adaptive simulation of nonlinear heat and moisture transfer as a boundary value problem, International Journal of Thermal Sciences 133 (2018) 120–139*, studují úlohu dle obrázku. Okomentujte rovnici a její jednotlivé členy.

transfer through a porous material defined by the spatial domain $\Omega_x = [0, L]$ and time domain $\Omega_t = [0, \tau]$. The following convention is adopted: $x = 0$ corresponds to the surface in contact with the inside room and, $x = L$, corresponds to the outside surface. The moisture transfer occurs due to capillary migration and vapour diffusion. The heat transfer is governed by diffusion and latent mechanisms. The physical problem can be formulated as [22,23]:

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_l \frac{\partial P_c}{\partial x} + \delta_v \frac{\partial P_v}{\partial x} \right), \tag{1a}$$

$$(\rho_0 c_0 + \rho_w c_w)\frac{\partial T}{\partial t} + c_w T \frac{\partial \rho_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + L_v \delta_v \frac{\partial P_v}{\partial x} \right), \tag{1b}$$

where ρ_w is the volumetric moisture content of the material, δ_v and k_l, the vapour and liquid permeabilities, P_v, the vapour pressure, T, the temperature, R_v, the water vapour gas constant, P_c, the capillary pressure, c_0, the material heat capacity, ρ_0, the material density, c_w, the water heat capacity, λ, the thermal conductivity, and, L_v, the latent heat of evaporation. Equation (1a) can be written using the va-

Příklad 7. *Zhang et al, Simulation and validation of heat transfer during wood heat treatment process, Results in Physics 7 (2017) 3806–3812*, studují úlohu dle obrázku. Okomentujte rovnici a její jednotlivé členy.

temperature field of samples during the heat treatment. The general equation of heat flux was written according to Fourier's law:

$$\mathbf{q} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \mathbf{n} \tag{1}$$

where $\mathbf{q}$ is the heat flux vector (W), λ is the thermal conductivity (W/(m·K)), $\mathbf{n}$ is the normal direction of the isotherm level at one point in the direction of the temperature gradient, and t is temperature (°C).

It was assumed in the model that there was no heat generation from inside the wood during the heat treatment process. The 3D heat conduction differential equation was established based on Fourier's law and the law of the conservation of energy [9]:

$$\rho_c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial t}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial t}{\partial z}\right) \tag{2}$$

where ρ is density (kg/m^3), c is special heat capacity (J/(kg·K)), and τ is time (s).

Příklad 8. *Zhengbin He et al, Simulation of moisture transfer during wood vacuum drying, Results in Physics 12 (2019) 1299–1303*, studují úlohu dle obrázku. Okomentujte rovnici a její jednotlivé členy.

Water transfer occurs in two different processes during vacuum drying: a portion of the water is diffused by capillary tension as capillary flows through wood vessels, and the remaining water evaporates in wood gaps and diffuses through wood pits. The mass transfer equation can be written as follows [18]:

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \tau} = \nabla \cdot (D_w \nabla \theta_w) - \frac{R_w}{\rho_w} \tag{2}$$

where θ_w is the water volume fraction in the wood; τ is time, s; D_w is the water apparent diffusion coefficient (m^2/s); R_w is the water evaporation rate in wood vessels ($kg/m^3/s$); and ρ_w is water density, (kg/m^3).

The pressure gradient and volume fraction gradient in the inner wood and at the wood surface are considered the drying force [18,19],