9.5.2019

	1D	2D	3D
GRADIENT ∇f grad $\vec{F}$	$\frac{\partial f}{\partial x}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$
DIVERGENCE div $\vec{F}$ $\nabla \vec{F}$	$\frac{\partial P}{\partial x}$ $\vec{F} = (P)$	$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ $\vec{F} = (P, Q)$	$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ $\vec{F} = (P, Q, R)$

ROVNICE KONTINUITY

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \delta - \operatorname{div}(\vec{F}) \qquad (1)$$

u... stavová veličina

δ... vydatnost zdrojů veličiny u

$\vec{F}$... vektorové pole popisující proudění veličiny u

FICKŮV ZÁKON

$$\vec{F} = -D \nabla u \qquad (2)$$

D... difuzní koeficient

ROVNICE KONTINUITY S FICKOVÝM ZÁKONEM

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \delta + \operatorname{div}(D \nabla u) \qquad (3)$$

ROVNICE VEDENÍ TEPLA (RCE (3) pro teplo, bez zdrojů a vyjádřená pomocí teploty)

$$\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(D \nabla T) \qquad (4)$$

T.. teplota

ρ... hustota

c... měrná tepelná kapacita

Materiálové charakteristiky

1) **Anizotropní materiál** (v každém směru jiná materiálová odezva na podnět) ... dif. koef. je matice

2D : $D = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} \end{pmatrix}$ 3D : $D = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{xy} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{xz} & D_{yz} & D_{zz} \end{pmatrix}$

2) **Ortotropní materiál** (3 roviny symetrie, 3 charakteristické směry, např. anatomické směry dřeva, souřadné osy volíme v těchto směrech) ... dif. koeficient je diagonální matice.

2D : $D = \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 \\ 0 & D_{yy} \end{pmatrix}$ 3D: $D = \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix}$

3) **Izotropní materiál** (stejné vlastnosti ve všech směrech, odezva materiálu má stejný směr jako podnět) difuzní koeficient je skalární veličina (není matice).

A) **Homogenní materiál** (materiálové charakteristiky nejsou funkcí polohy)

Výraz $\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ se dá zjednodušit na $D_{xx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ podle pravidla pro derivaci konstantního násobku

I.) **Stacionární úloha** : hledáme řešení, které není funkcí času. Odpovídá stavu po dosažení rovnováhy. Řešení nezávisí na čase, tj. $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ a odpovídající člen v difuzní rovnici nefiguruje.

Příklad 1

(i) $D = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} \end{pmatrix}$

$$\nabla T = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$D\nabla T = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{xx}\frac{\partial T}{\partial x} + D_{xy}\frac{\partial T}{\partial y} \\ D_{xy}\frac{\partial T}{\partial x} + D_{yy}\frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}(D\nabla T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial T}{\partial x} + D_{xy}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{xy}\frac{\partial T}{\partial x} + D_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

Po dosazení a použití pravidla pro derivaci součtu dostaneme

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xy}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{xy}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

(ii) 1-D gradient a divergence jsou jenom parciální derivace

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

(iii)

ortotropie $\Rightarrow D_{xy} = 0$

~~izot~~ homogenita $\Rightarrow D_{xx} \in \mathbb{R}$ a $D_{yy} \in \mathbb{R}$ tj. $\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}\right) = D_{xx}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

a $\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}\right) = D_{yy}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

Po dosazení do (i) dostaneme

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = D_{xx}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + D_{yy}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Pozn: Je-li materiál navíc izotropní, platí $D_{xx} = D_{yy} = D$ a rovnice má tvar

$$\frac{\rho c}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Příklad 2

Stacionární rovnice : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

Rovnice vedení tepla v 1D a pro stacionární stav je

$$0 = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

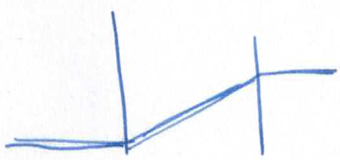
Protože v tomto případě T závisí jenom na x, je $T = T(x)$ a rovnice je

$$T''(x) = 0 \qquad \text{kde} \quad ' = \frac{d}{dx}.$$

Odsud

$$T'(x) = \int T''(x)\,dx = \int 0\,dx = C_1$$

$$T(x) = \int T'(x)\,dx = \int C_1\,dx = C_1 x + C_2$$



T_1 $\qquad$ T_2

Příklad 3

Stacionární rovnice vedení tepla ve 2D:

$$0 = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Je-li $T = T(r)$, dostáváme (viz zadání)

$$0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

tj. $0 = \frac{1}{r}\left(r\,T'(r)\right)'$ kde $' = \frac{d}{dr}$.

Odsud postupně $\left(r\,(T'(r))\right)' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r\,T'(r) = C_1 \Rightarrow T'(r) = \frac{1}{r} C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow T(r) = \int \frac{1}{r} C_1\,dr = C_1 . \ln r + C_2$

Příklad 4.

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \;\; \frac{\partial}{\partial y} \;\; \frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{F}$$

Příklad 5.

V rovnicích je u všech veličin explicitně napsáno, na čem závisí. Pokud tyto závislosti pro stručnost vynecháme, mají rovnice tvar

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \nabla \left(\bar{\delta} \, \nabla x \right)$$

a

$$\rho \, c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \left(\bar{\lambda} \, \nabla T \right).$$

Jedná se o rovnici (3) bez zdrojů pro vlhkostní pole x a rovnici vedení tepla (4) pro teplotní pole T.

$\bar{\delta} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ $\Rightarrow$ umožňujeme anizotropní materiálové vlastnosti.

Příklad 6.

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_e \frac{\partial P_c}{\partial x} + \delta_v \frac{\partial P_v}{\partial x} \right)$$

Rovnice kontinuity v 1D, bez zdrojů

$\frac{\partial \rho_w}{\partial t}$ ... rychlost s jakou v daném bodě roste ρ_w

$\frac{\partial}{\partial x}(\dots)$ ... jednorozměrná divergence vektorového pole $k_e \frac{\partial P_c}{\partial x} + \delta_v \frac{\partial P_v}{\partial x}$

$k_e \frac{\partial P_c}{\partial x} + \delta_v \frac{\partial P_v}{\partial x}$ ... tok ρ_w je vyvolán gradientem veličin P_c a P_v. Veličiny k_e a δ_v jsou příslušné difuzní koeficienty.

$$\left(\rho_0 c_0 + \rho_w c_w\right)\frac{\partial T}{\partial t} + c_w T \frac{\partial \rho_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + L_v \delta_v \frac{\partial P_v}{\partial x}\right)$$

Rovnice vedení tepla včetně zdrojů $\left(-c_w T \frac{\partial \rho_w}{\partial t}\right)$.

$\rho_0 c_0 + \rho_w c_w$ ... uvažujeme dvě látky současně (dřevo + voda) a dodané teplo se spotřebuje na zvýšení teploty obou částí

$c_w T \frac{\partial \rho_w}{\partial t}$ ... na opačné straně bude mít výraz záporné znaménko, tj. půjde o spotřebu této intenzity.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + L_v \delta_v \frac{\partial P_v}{\partial x}\right)$ ... jednorozměrná divergence vektorového pole $\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + L_v \delta_v \frac{\partial P_v}{\partial x}$

$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + L_v \delta_v \frac{\partial P_v}{\partial t}$ .... vektorové pole popisující vedení tepla, proudění tepla je vyvoláno gradientem teploty (člen $\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$) a gradientem tlaku (člen $L_v \delta_v \frac{\partial P_v}{\partial x}$)

Příklad 7

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial t}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial t}{\partial z}\right)$$

Klasické rovnice vedení tepla v ortotropním nehomogenním materiálu

Příklad 8

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \tau} = \nabla \cdot \left(D_w \nabla \theta_w \right) - \frac{R_w}{\rho_w}$$

Difuzní rovnice s Fickovým zákonem, tj. rovnice (3).

$\frac{\partial \theta_w}{\partial t}$ je rychlost růstu veličiny θ_w (obsah vody ve dřevě)

$\nabla \cdot (\ \dots\ )$ je divergence vektorového pole $D_w \nabla \theta_w$

$D_w \nabla \theta_w$ říká, že difuze veličiny θ_w je způsobena gradientem $\nabla \theta_w$. Je-li D_w matice, je v tomto zachycen v anizotropní nebo ortotropní případ

$-\frac{R_w}{\rho_w}$ je člen související se spotřebičem o vydatnosti $\frac{R_w}{\rho_w}$ tj. dřevo se zbavuje vlhkosti θ_w buď díky difuzi (první člen na pravé straně), nebo díky vypařování (druhý člen na pravé straně).

Rovnice modeluje sušení dřeva na vzduchu, tj. veličina $\frac{\partial \theta_w}{\partial t}$ je záporná a θ_w klesá s časem.