

Cvičení Matematika LDF, bak. 1. ročník

18. dubna 2019

Řešení budou zveřejněna na webu předmětu <http://user.mendelu.cz/marik/mt>. Další soustavy zařadí do výuky cvičící.

Soustava s jediným řešením. Vyřešte soustavu rovnic.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -1\end{aligned}$$

Soustava s nekonečně mnoha řešeními. Vyřešte soustavu rovnic.

$$3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -4$$

$$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 4$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 6$$

Vlastní čísla a vektory matice 2×2 .

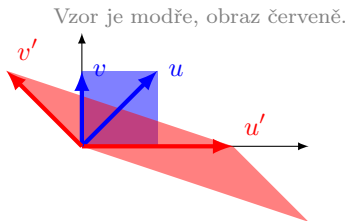
Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

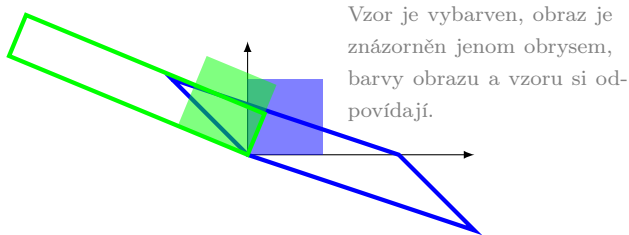
1. Určete vlastní čísla a jednotkové vlastní vektory této matice.
2. Sestavte matici P tak, aby ve sloupcích obsahovala jednotkové vlastní vektory. Pokud je to možné, napište matici P tak, aby její determinant byl kladný.
3. Ověřte, že $P^T A P = D$ je diagonální matice.

V případě nutnosti pracujte s desetinnými čísly.

Komentář k předchozímu. Zobrazení popsané maticí A je naznačeno na obrázku a jak vidno, mění tvar modrého jednotkového čtverce.



Vektor u se při zobrazení otočí po směru a v proti směru hodinových ručiček. Někde mezi nimi bude vektor, který při zobrazení směr nemění. To bude vlastní vektor a z obrázku je možné odhadnout, že bude příslušný menší vlastní hodnotě.



Zobrazení symetrickou maticí A uvažovanou v tomto příkladě si můžeme představit tak, že máme elastickou pásku, která se působením síly deformuje tak, že se natahuje v jednom směru a zužuje v příčném směru. Čtverec nakreslený na pásce tak, že jeho strany leží v těchto směrech (zelený) se deformuje na obdélník. Obecný čtverec (modrý) se deformuje tak, že se mění úhly. Na přednášce jsme si naznačili, jak se ukáže, že deformace v těchto směrech je extrémální, vrátíme se k tomu v závěrečném shrnutí na konci semestru, protože jde o kombinaci úlohy z lineární algebry a diferenciálního počtu.

Vlastní čísla a vektory matice 3×3 .

V minulém cvičení jsme ukázali, že nejjobecnější symetrická matice zachovávající směr vektoru $(1, 0, 0)^T$ má v prvním řádku a prvním sloupci jenom jeden nenulový prvek, prvek v hlavní diagonále.

Uvažujme matici

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

kteřá je tohoto typu. Určete vlastní čísla a zbylé vlastní vektory matice.