Cvičení Matematika LDF, bak. 1. ročník

11. dubna 2019

Příklady, které se budou ve cvičení přeskakovat si projděte samostatně. Řešení budou zveřejněna na webu předmětu `http://user.mendelu.cz/marik/mt`.

Násobení matic. Vynásobte matice A a B pro obě pořadí násobení.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vynásobte matice B a C pro obě pořadí násobení, je-li

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soustava rovnic jako násobení matic. Zapište soustavu rovnic pomocí maticového násobení

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 21 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Matice rotace. Matice rotace o úhel θ v kladném smyslu je

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Násobením ověřte, že matice otočení o úhel $-\theta$ je k této matici inverzní.

Návod: Funkce kosinus je sudá funkce a funkce sinus je lichá funkce. Proto platí

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

a

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta.$$

Matice posunutí. Transformace pomocí násobení matic zachovává počátek a nemůže proto charakterizovat například posunutí roviny. Pokud chceme mít pomocí maticového násobení realizováno i posunutí, musíme zavést homogenní souřadnice a ztotožnit bod (x, y) s vektorem $(x, y, 1)^T$. Ukažte, že matice

$$P_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice posunutí o a doprava a b nahoru. Odhadněte, jak bude vypadat matice popisující opačnou transformaci a pro obě pořadí součinu ověřte, že součin obou těchto matic je pro obě pořadí jednotková matice.

Matice, zachovávající význačné směry. Dřevo má tři výrazné směry a pokud máme možnost zvolit souřadnou soustavu tak, aby tyto směry byly dány vektory $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ a $(0,0,1)$, formulace fyzikálních zákonů se zjednoduší. Najděte

1. nejobecnější matici 3×3, která zachovává směr vektoru $(1,0,0)$,
2. nejobecnější symetrickou matici 3×3, která zachovává směr vektoru $(1,0,0)$,
3. nejobecnější symetrickou matici 3×3, která zachovává směr vektorů $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

Určete následující determinanty

1. $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

2. $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ x-4 & y-3 \end{vmatrix}$

   ($D_2 = 0$ je přímka daná bodem $(4,3)$ a směrovým vektorem $(2,-1)$)

3. $D_3 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ (charakteristický polynom matice z prvního bodu)

4. $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

5. $D_5 = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

6. $D_5 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix}$ (charakteristický polynom diagonální matice)

Matice projekce. Matice $P = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}$ reprezentuje projekci na přímku jdoucí středem pod úhlem α.

1. Ukažte, že platí $P^2 = P$. To znamená, že body na přímce se zobrazí samy na sebe.
2. Ukažte, (nemusíte výpočtem, například graficky, nebo využitím toho, že každý bod přímky se zobrazí sám na sebe) že dva různé body se projekcí mohou zobrazit na stejný bod a proto není naděje na to mít inverzní zobrazení. Proto neexistuje inverzní matice, což můžete ověřit výpočtem determinantu.

Matice derivování Ukažte, že matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ je matice derivování polynomů stupně nejvýše 2, pokud polynom $ax^2 + bx + c$ ztotožníme s vektorem $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ověřte, že derivování je ekvivalentní maticovému násobení pro polynomy x^2, x a 1 a poté vysvětlete, proč se stačí zaměřit na tyto tři polynomy. Ukažte, že je možno výše uvedenou vlastnost ověřit i pro obecný polynom $ax^2 + bx + c$. Vysvětlete, jak bychom interpretovali matici A^2 a A^3 a tyto matice vypočtěte.