Cvičení Matematika LDF, bak. 1. ročník

4. dubna 2019

Příklady, které se budou ve cvičení přeskakovat si projděte samostatně. Řešení budou zveřejněna na webu předmětu `http://user.mendelu.cz/marik/mt`.

Derivace. Veličina y je funkce proměnné x. Najděte její derivaci.

1) $y = x^2 e^x$

2) $y = \dfrac{x^2 + a}{x^3}$

3) $y = e^{-kx}$

4) $y = \pi x^3 + 2\pi x^2$

5) $y = \sqrt{x + 1}$

Lineární aproximace. Veličina y je funkce proměnné x. Najděte její lineární aproximaci v okolí zadaného bodu.

1) $y = xe^x$ v okolí bodu $x = 0$

2) $y = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ v okolí bodu $x = 0$

3) $y = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ v okolí bodu $x = K$

4) $y = \sqrt{x}$ v okolí bodu $x = 1$

5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ v okolí bodu $x = 1$

Ve druhém a třetím příkladě aproximujeme funkci modelující růst populace v prostředí s nosnou kapacitou K. Aproximace v okolí bodu $x = 0$ odpovídá velmi malé populaci. Proto se konstanta úměrnosti ze získané lineární aproximace nazývá *invazní parametr*.

Integrály a střední hodnota.

1) $\displaystyle\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int x^2 + 3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

5) Určete střední hodnotu funkce $\sin(kx)$ na intervalu $[0, \pi]$, kde k je přirozené číslo. Vyřešte úlohu obecně a poté pro několik prvních hodnot parametru k.

Diferenciální rovnice.

1) $$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = kr^2t$$

2) $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k\frac{y}{y^2+1}$$

3) $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}$$

Střední hodnota gravitační síly. Gravitační síla od koule je stejná, jako by byla hmotnost soustředěna v centru. Podle Newtonova gravitačního zákona je proto gravitační síla nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti od středu. Uvnitř koule je gravitační síla zase přímo úměrná vzdálenosti. Ve vzdálenosti r od středu Země je tedy gravitační síla dána vzorcem

$$F = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{r^2} & r > R, \\ \beta r & r \leq R, \end{cases}$$

kde R je poloměr Země.

Zdroj: Wikipedia

1. Určete hodnotu konstanty β tak, aby tato funkce byla spojitá na $(0, \infty)$.
2. Nejhlubší vrt je hluboký přibližně 12 km (Kolský superhluboký vrt je na obrázku). Určete střední hodnotu F na intervalu od povrchu Země do hloubky 12 kilometrů.
3. Geostacionární družice létají přibližně 36 000 kilometrů nad Zemí. Určete střední hodnotu F na intervalu od povrchu Země do výšky 36 000 kilometrů nad Zemí.
4. Porovnejte přibližnou změnu velikosti F, pokud se z povrchu Země ponoříme o malou hodnotu pod povrch a pokud se vzdálíme o stejnou hodnotu nad povrch Země.

Vzdálenost k horizontu. Vzdálenost k horizontu pro pozorovatele ve výšce h je dána funkcí $H = \sqrt{2Rh}$, kde R je poloměr Země (`https://aty.sdsu.edu/explain/atmos_refr/horizon.html`). Po dosazení hodnot

$$H = 3.57\sqrt{h},$$

kde h je v metrech a H v kilometrech. Určete hodnotu této derivace $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}h}$ pro $h = 5\,\mathrm{m}$ (včetně jednotky) a slovní interpretaci této derivace.

Zdroj: pixabay.com

Výška rozhledny. Mr. X chce postavit rozhlednu. Bez dotací a proto se bude vybírat vstupné a rozhledna musí generovat zisk. Cena za postavení a údržbu rozhledny po celou dobu životnosti bude úměrná výšce rozhledny. Tržby ze vstupného za celou dobou životnosti odhadněme, že budou úměrné vzdálenosti k horizontu (jak daleko je vidět z rozhledny). Tato vzdálenost je úměrná odmocnině z výšky rozhledny. Zjistěte, zda existuje nějaká optimální výška, kdy zisk (rozdíl mezi tržbou a náklady) je nejvyšší. Zanedbejte jevy, které by v praxi úlohu také ovlivnily, jako je inflace, úročení peněz na účtu apod.