Cvičení Matematika LDF, bak. 1. ročník

28. března 2019

Příklady, které se budou ve cvičení přeskakovat si projděte samostatně. Řešení budou zveřejněna na webu předmětu `http://user.mendelu.cz/marik/mt`.

Řešení ODE a IVP.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^2$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\sin x}{y^2}$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{y}$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = te^y$

(5) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 - x^2t^3$

(6) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$

(7) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (xy)^2, \quad y(0) = -1$

(8) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = kr^3, \quad r(0) = r_0$

(9) $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2, \quad m(0) = 0$

(10) $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2, \quad m(0) = -2$

Vypouštění nádrže. Z fyziky je známo, že rychlost s jakou vytéká tekutina otvorem u dna nádoby je úměrná odmocnině výšky hladiny (protože se mění potenciální energie úměrná výšce na kinetickou energii úměrnou druhé mocnině rychlosti). Proto je i rychlost s jakou se zmenšuje objem vody v nádrži úměrná odmocnině výšky hladiny. Modelujte proces pomocí diferenciální rovnice

- pro nádrž cylindrického tvaru (válec postavený na podstavu),
- pro nádrž ve tvaru kvádru
- pro nádrž ve tvaru kužele otočeného vrcholem dolů (trychtýř).

Zdroj: www.rodovystatek.cz

Stavebniny vedle čebínského nádraží. Hromada sypkého materiálu má tvar kužele. Úhel u vrcholu je konstantní, daný mechanickými vlastnostmi materiálu a je nezávislý na objemu. Předpokládejme, že personál stavebnin přisypává na hromadu materiál konstantní rychlostí (v jednotkách objemu za jednotku času). Tato hromada je však v poměrně otevřené krajině a vítr rozfoukává materiál po okolí. Je rozumné předpokládat, že rozfoukávání se děje rychlostí úměrnou povrchu, tj. rychlostí úměrnou druhé mocnině některého délkového parametru, například průměru, poloměru nebo výšky. Modelujte proces pomocí diferenciální rovnice. Sestavte diferenciální rovnici pro objem hromady.

- Může hromada skončit i při neustálém přisypávání celá rozfoukaná?
- Mohou pracovníci navršit hromadu do libovolné výšky anebo pro velkou hromadu je již rozfoukávání rychlejší než přisypávání?

Odpovědi zjistíte, když rozhodnete, zda existuje konstantní řešení a zda je toto řešení stabilní.

Ropná skvrna. Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že poloměr roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Sestavte diferenciální rovnici popisující tento proces a vyřešte ji.

Učení. Rychlost učení (tj. časová změna objemu osvojené látky nebo procento z maximální manuální zručnosti) je úměrná objemu dosud nenaučené látky. Sestavte diferenciální rovnici modelující proces učení probíhající podle těchto pravidel.

Chemická směs. Chemikálii rozpouštíme v nádrži tak, že do nádrže pumpujeme vodu a směs odčerpáváme. Objem směsi roste podle vztahu $20 + 2t$. Množství chemikálie y klesá rychlostí, která je úměrná y a nepřímo úměrná objemu roztoku v nádrži.

Růst buňky. Buňka ve tvaru koule o poloměru r získává živiny rychlostí úměrnou povrchu a spotřebovává živiny rychlostí úměrnou objemu. Získávání živin a spotřeba živin jsou tedy úměrné po řadě r^2 a r^3. Předpokládejme, že rychlost s jakou roste objem je úměrná rozdílu mezi příjmem a výdejem. Sestavte diferenciální rovnici pro poloměr buňky, najděte její konstantní řešení a posuďte jeho stabilitu. Sestavte i diferenciální rovnici pro objem buňky. (Podobnou úvahu lze provést i pro jiné živé organismy a odsud plynou omezení daná efektivitou stavby těla. Například buňky větší než 1 mm se nevyskytují příliš často. Volně podle L. Edelstein-Keshet: Differential Calculus for the Life Sciences.)