Cvičení 28. 3. 2019

(1) $\frac{dy}{dx} = xy^2$

a) konst. řešení $y = 0$

b) $y^{-2}\,dy = x\,dx$

$-\frac{1}{y} \cancel{dy} = \frac{1}{2}x^2 + C$

$y = \frac{1}{-\frac{1}{2}x^2 - C} = \frac{2}{-x^2 - 2C}$

$\begin{cases} y = \frac{2}{k - x^2} & k = 2C \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{cases}$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{y^2}$

a) konst. řešení nemá

b) $y^2\,dy = \sin x\,dx$

$\frac{1}{3}y^3 = -\cos x + C$

$y^3 = k - 3\cos x \qquad k = 3C \in \mathbb{R}$

(3) $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$

a) konst. řešení $y = 0$

b) $\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = x\,dx$

$\begin{cases} 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + C & C \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{cases}$

(4) $\frac{dy}{dt} = t \cdot e^y$ a) konstantní řešení nemá

b) $e^{-y}\,dy = t\,dt$

$-e^{-y} \cancel{dt} = \frac{1}{2}t^2 + C \qquad C \in \mathbb{R}$

$e^{-y} = k - \frac{1}{2}t^2 \qquad k = -C \in \mathbb{R}$

(5) $\frac{dx}{dt} = x^2 - x^2 t^3$ a) konstantní řešení $x = 0$

$= x^2(1 - t^3)$

b) $x^{-2}\,dx = (1 - t^3)\,dt$

$-x^{-1} = t - \frac{1}{4}t^4 + c$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = k + \frac{1}{4}t^4 - t & k = -c \in \mathbb{R} \\ x = 0 \end{cases}$$

---

(6) $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$ ad(3): $2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + c$

$y(0) = 1$

$2 \cdot \sqrt{1} = \frac{1}{2}0^2 + c$

$c = 2$

$\cancel{y = 2}$ $2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 2$

---

(7) $\frac{dy}{dx} = (xy)^2 = x^2y^2$ $y(0) = -1$

a) konstantní řešení $y = 0$ nás nezajímá

b) $y^{-2}\,dy = x^2\,dx$

Metoda 1.

$-y^{-1} = \frac{1}{3}x^3 + c$

$+1 = \frac{1}{3} \cdot 0^3 + c$

$c = +1$

$-\frac{1}{y} = \frac{1}{3}x^3 + 1$

$\frac{1}{y} = -\frac{1}{3}x^3 - 1$

Metoda 2.

$\int_{-1}^{y} t^{-2}\,dt = \int_0^x t^2\,dt$

$\left[-t^{-1}\right]_{-1}^{y} = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^x$

$-\frac{1}{y} - 1 = \frac{1}{3}x^3$

$\frac{1}{y} = -1 - \frac{1}{3}x^3$

(8) $\frac{dr}{dt} = k \cdot r^3 \qquad r(0) = r_0$

$$r^{-3}\,dr = k\,dt$$

$$\int_{r_0}^{r} s^{-3}\,ds = k\int_0^t ds$$

$$\left[-\frac{1}{2}s^{-2}\right]_{r_0}^{r} = k\cdot t$$

$$-\frac{1}{2r^2} + \frac{1}{2r_0^2} = kt$$

---

(9) $\frac{du}{dt} = u+2 \qquad u(0) = 0$

$$\frac{du}{u+2} = dt$$

$$\int_0^u \frac{ds}{s+2} = \int_0^t ds$$

$$\left[\ln|s+2|\right]_0^u = t$$

$$\ln(u+2) - \ln 2 = t$$

$$\ln(u+2) = t + \ln 2$$

$$u+2 = e^t \cdot e^{\ln 2} = 2e^t$$

$$u = -2 + 2e^t$$

---

(10) $\frac{du}{dt} = u+2 \qquad u(0) = -2$

$$u(t) = -2$$

Nádrž

$$\frac{dV}{dt} = k_1 \cdot \sqrt{h}$$

a) Válec: $V = k_2 \cdot h \quad (V = \pi r^2 \cdot h)$

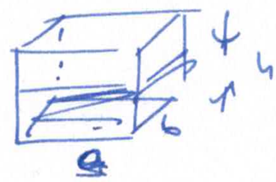
$$\frac{dV}{dt} = k_2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = k_2 \frac{dh}{dt} = k_1 \sqrt{h}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \sqrt{h}$$

$$\frac{dh}{dt} = k \cdot \sqrt{h}$$

b) kvádr $V = a \cdot b \cdot h = k_2 h$



stejné jako a)

c) kužel $V = k_3 \cdot h^3$

$$\frac{dV}{dt} = 3 k_3 h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 3 k_3 h^2 \frac{dh}{dt} = k_1 \sqrt{h}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k_1}{3 k_3} \cdot h^{-3/2}$$

$$\frac{dh}{dt} = k \cdot h^{-3/2}$$

Stavebniny: a) r ... rychlost přisypávání v m^3/hod

$$\frac{dV}{dt} = r - k \cdot V^{2/3}$$

$$f(V) = r - k \cdot V^{2/3}$$

$f(V) = 0 \Rightarrow V^{2/3} = \frac{r}{k} \Rightarrow V = \left(\frac{r}{k}\right)^{3/2}$

$$\frac{df}{dV} = -\frac{2}{3} k \cdot V^{-1/3} < 0$$

stabilní řešení $V = \left(\frac{r}{k}\right)^{3/2}$

Kapka : r .. poloměr t .. čas

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k}{r^2} \Rightarrow r^2 dr = k . dt \Rightarrow \frac{1}{3} r^3 = k.t + c$$

Učení : L ... objem naučené látky
M ... maximum –"–
t ... čas

$$\frac{dL}{dt} = k(M-L)$$

Chemická směs : $V = 20 + 2t$ ... objem směsi

$$\frac{dy}{dt} = -k . \frac{y}{V} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -k\frac{y}{20+2t}$$

Buňka : a) příjem: $f_1 = k_1 . S = \alpha V^{2/3}$
výdej: $f_2 = \beta . V$
rozdíl: $f_1 - f_2 = \alpha V^{2/3} - \beta V$

$$\frac{dV}{dt} = k(\alpha V^{2/3} - \beta V) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = a V^{2/3} - bV$$

b) příjem: $f_1 = k_1 S = \tilde{\alpha} r^2$
výdej: $f_2 = \beta V = \tilde{\beta} r^3$
rozdíl: $f_1 - f_2 = \tilde{\alpha} r^2 - \tilde{\beta} r^3$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = k(f_1 - f_2)$$

$$4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = k(\tilde{\alpha} r^2 - \tilde{\beta} r^3)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k\tilde{\alpha}}{4\pi} - \frac{k\tilde{\beta}}{4\pi} r$$

$$\frac{dr}{dt} = A - Br, \quad \frac{dr}{dt} = 0 \text{ pro } r = \frac{A}{B}$$ ... konstantní řešení

$$\frac{d}{dr}(A - Br) = -B < 0$$ ... konstantní řešení je stabilní