

Cvičení Matematika LDF, bak. 1. ročník

21. března 2019 – mezinárodní den lesů

Příklady, které se budou ve cvičení přeskakovat si projděte samostatně. Řešení budou zveřejněna na webu předmětu <http://user.mendelu.cz/marik/mt>.

Výpočet integrálu. Najděte následující integrály.

$$(1) \int (x + 1) \cos x \, dx$$

$$(6) \int \cos x \sqrt{\sin(x)} \, dx$$

$$(11) \int \frac{3}{5x - 1} \, dx$$

$$(2) \int (x - 1)e^{-x} \, dx$$

$$(7) \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} \, dx$$

$$(12) \int \frac{x^2}{x^3 - 1} \, dx$$

$$(3) \int \sqrt{x} \ln x \, dx$$

$$(8) \int \sin x \cos^5 x \, dx$$

$$(13) \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} \, dx$$

$$(4) \int x^2 \sin x \, dx$$

$$(9) \int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \, dx$$

$$(14) \int x e^{x^2} \, dx$$

$$(5) \int x \sin(x^2) \, dx$$

$$(10) \int \frac{x}{x^2 + 1} \, dx$$

$$(15) \int x^2 e^x \, dx$$

Střední hodnota funkce. Určete střední hodnotu funkce na zadaném intervalu.

- (1) funkce \sqrt{x} na intervalu $[1, 4]$
- (2) funkce $\sin x$ na intervalu $[0, \pi]$
- (3) funkce $\sin x$ na intervalu $[0, 2\pi]$
- (4) funkce ax^2 na intervalu $[0, 1]$

V posledním příkladě určete hodnotu konstanty a tak, aby střední hodnota byla rovna jedné.

Růst populace a jejich přežívání. Populace živočišného druhu činí 5600 jedinců a tato populace roste rychlostí

$$R(t) = 720e^{0.1t}$$

jedinců za rok. (V tomto čísle je zahrnuta přirozená natalita, mortalita a povolený lov.) Vlivem znečištění životního prostředí se však jedinci dožívají kratšího věku, než je zahrnuto v popsaném modelu. Zlomek populace, který přežije po době t je

$$S(t) = e^{-0.2t}.$$

Odhadněte počet živočichů za 10 let a odhadněte, jaký by tento počet byl, kdyby k žádnému znečištění nedocházelo, tj. kdyby bylo $S(t) = 1$.

Napište jenom příslušné integrály a okomentujte, jakými metodami bychom je počítali. Vlastní výpočet provádět nemusíte.

(Podle J. Stewart, T. Day: Biocalculus, Calculus for Life Sciences.)



Zdroj: pixabay.com

Mezinárodní den lesů. Při obnově lesů je nutné velké množství sadebního materiálu. Kromě školek hrají při obnově lesa důležitou roli rodičovské stromy. Plošná hustota semen (například v počtu semen na metr čtvereční) ve vzdálenosti r od stromu je dána funkcí

$$D(r) = D_0 e^{-r^2/a^2}.$$

Pro vhodnou volbu jednotek dosáhneme toho, že platí $a = 1$. Pracujme proto s funkcí

$$D(r) = D_0 e^{-r^2}.$$

Určete množství semen uvnitř kruhu o poloměru R .

Napište jenom příslušný integrál a okomentujte, jakou metodou bychom ho počítali. Vlastní výpočet provádět nemusíte.

(Volně přeformulováno podle L. Edestein–Keshet: Differential calculus for the life sciences. Strom na obrázku je rodičovský strom ekotypu Posázavského smrku ztepilého. Slouží k záchraně genových zdrojů lesních dřevin.)



Zdroj: <https://slp.czu.cz>

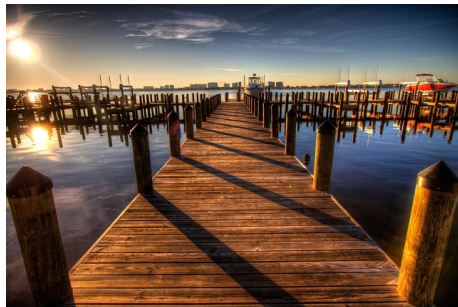
Hmotnost dřeva s proměnnou vlhkostí.

Součástí mola je dřevěný svislý metrový trám konstantního průřezu. Blížkost hladiny, vlhkost, občasné zašplouchání nebo zanesení kapek vody větrem, vynoření při odlivu a další efekty způsobily, že směrem dolů roste vlhkost a tedy i hustota dřeva. Předpokládejme, že hustota v bodě h (měřeno shora dolů) je dána funkcí

$$\rho(h) = \rho_0(1 + kh),$$

kde ρ_0 je hustota dřeva nahoře (nejdál od hladiny, kde je trám nejsušší) a k je konstanta úměrnosti související s hustotou vody a s tím, jak směrem dolů narůstá vlhkost. Potřebujeme odhadnout hmotnost trámu bez zásahu do mola, tj. nemůžeme vážit na vahách. Určete hmotnost trámu výpočtem.

Napište jenom příslušný integrál a okomentujte, jakou metodou bychom ho počítali. Vlastní výpočet provádět nemusíte. Všimněte si, že úloha je v podstatě stejná jako úloha o vysílači Kojál z minulého cvičení, ale vzhledem k jinému tvaru funkce popisující hustotu tentokrát integrujeme lineární funkci. Pro výpočet integrálu lineární funkce je možné využít střední hodnotu, která je průměrem funkční hodnoty na začátku a na konci oboru integrace (viz přednáška).



Zdroj: pixabay.com

Mrkev a vitamín A. Mrkev má tvar rotač-
ního tělesa, které vznikne rotací křivky

$$f(x) = \sqrt{14 - x}$$

okolo osy x na intervalu $[0, 12]$, kde x je v cen-
timetrech. Koncentrace vitamínu A se mění
podle vztahu

$$c(x) = \frac{1}{12} e^{-x/12} \text{ mg cm}^{-3}.$$

Jaký je objem mrkve, obsah vitamínu A a
průměrná koncentrace vitamínu A v mrkvi?

Napište jenom potřebné integrály a vztahy, integrály nepočítejte.

*(Volně přeformulováno podle University of British Columbia, Sessional Examinations
April 2009.)*



Zdroj: pixabay.com

Pesticidy a játra býložravců. Přibližná hodnota C koncentrace jistého pesticidu v játrech býložravců (měřená v mikrogramech pesticidu na gram jater) v čase T po zanesení tohoto pesticidu do životního prostředí je dána vztahem

$$C = e^{-0.25T} \int_0^T 0.32e^{-0.64t} dt.$$

Vypočtěte hodnotu C jako funkci T a ukažte, že maximální hodnota C je přibližně po dvou letech.

(Podle J. Berry, A. Norcliffe, S. Humble: Introductory mathematics through science applications.)



Zdroj: Wikipedie