Cvičení Matematika LDF, bak. 1. ročník, 7.3.2019

Základní lineární aproximace. Najděte lineární aproximace funkcí $\sin x$, $\cos x$ a $(1+x)^n$ v okolí nuly. Tím dokážete platnost následujících přibližných vzorců platných pro x blízko nuly.

$$\sin x \approx x$$
$$\cos x \approx 1$$
$$(1+x)^n \approx 1+nx$$

První dvě aproximace využijeme později pro odvození tvaru matice malých rotací, což je důležité při studiu deformace materiálů. Poslední můžeme využít například pro to, abychom z relativistického vzorce pro celkovou energii extrahovali část závislou na rychlosti, tj. kinetickou energii.

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2 = m_0c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\approx m_0c^2\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)\right) = m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2$$

Kinetika chemických reakcích pro malé koncentrace. Rychlost mnoha chemických reakcí je dána vzorcem

$$f(x) = \frac{ax}{b+x}, \tag{1}$$

kde x je koncentrace substrátu a a, b jsou parametry (konstanty). Tento vzorec se nazývá kinetika Michaelise a Mentenové. Funkci můžeme přepsat do tvaru

$$f(x) = x\frac{a}{b+x}.$$

Pro malé koncentrace je x ve jmenovateli zanedbatelné proti konstantě b a proto

$$f(x) \approx x\frac{a}{b}. \tag{2}$$

Ve cvičení 28.2.2019 jsme vypočítali derivaci

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{ab}{(b+x)^2}.$$

Použijte tento výpočet k lineární aproximaci funkce (1) a ukažte, že vzorec (2) opravdu platí. Modře vyznačená úvaha, která se zdá býti poněkud vágní, je tedy korektní. Po trošce zkušeností se člověk, který to potřebuje často, naučí podobné vhodné aproximace “sypat z rukávu” v okamžiku potřeby i bez diferenciálního počtu. Vždy však je k dispozici i přesný postup, založený na derivacích.

Lokální extrémy bez slovního zadání. V úlohách z praxe často víme, že existuje optimální řešení a studovaná funkce má jediný bod s nulovou derivací. Pokud studujeme funkci bez jakéhokoliv kontextu, musíme posuzovat to, zda v daném bodě opravdu extrém je a jaký. Nejlépe tak, že současně určíme i intervaly monotonie. Za povšimnutí stojí, že při hledání bodů, kde jsou lokální extrémy, vlastně ani nemusíme znát původní funkci. Stačí nám o ní informace týkající se spojitosti a poté stačí znát derivaci. I s takovým případem se v praxi setkáváme.

Najděte lokální extrémy a intervaly monotonie následujících funkcí. Spolu s funkcí je zadána i její derivace.

(1) $y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$, $y' = \dfrac{1-x}{(x+1)^3}$

(2) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$, $y' = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

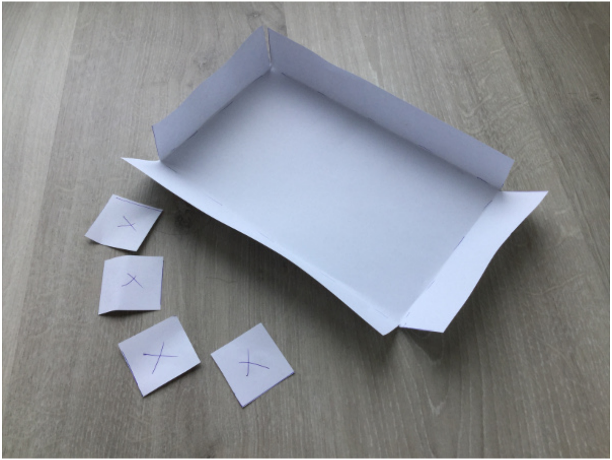
(3) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

(4) $y = (5-x)\sqrt{x}$, $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(5-3x)$

(5) $y = x^2 e^{-x}$, $y' = -(x-2)xe^{-x}$

(6) y je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{2\}$,
$y' = \dfrac{(x^2+3)(x^2-3)}{2-x}$

Krabička z papíru. V každém rohu papíru A4 vystřihneme čtverec a zbylý papír podél stran poohýbáme nahoru, aby vznikla (až se to slepí) krabička bez horního víka. Jak velké čtverce musíme odstříhat, pokud chceme, aby výsledná krabička měla co největší objem?



Zdroj: vlastní

Plot ze tří stran pozemku. Chceme oplotit pozemek obdélníkového tvaru, jehož jedna strana je rovná přirozená hranice. Stavíme plot tedy jenom na zbylých třech stranách.

(1) Jaký tvar pozemku zvolit, pokud je dána délka pletiva a chceme mít plochu pozemku co největší?

(2) Jaký tvar pozemku zvolit, pokud je dána plocha pozemku a chceme mít co nejmenší spotřebu pletiva?

Zdroj: pixabay.com

Než začnete řešit, tak si zkuste tipnout jestli optimální je čtverec nebo obdélník. Pokud obdélník, tak zda podél přirozené hranice nebo kolmo na ni. Také si zkuste tipnout, zda je řešení obou úloh stejné (tj. stejný tvar obdélníku, například stejný poměr stran). Úlohy řešte s co nejmenším množstvím parametrů. Uvažujte tedy, že máte jednu délkovou jednotku pletiva v prvním případě a že chcete oplotit pozemek o jednotkovém obsahu v případě druhém.

Ryba migrující proti proudu. Ryba ve vodě vydává za časovou jednotku energii úměrnou třetí mocnině rychlosti vzhledem k vodě. Pro překonání určité vzdálenosti proti proudu o rychlosti v je proto potřeba energie

$$E = k\frac{1}{x}(x+v)^3,$$

kde x je rychlost ryby vzhledem ke břehu a $x+v$ rychlost vzhledem k vodě. Najděte pro rybu optimální cestovní rychlost při migraci na dlouhé vzdálenosti, tj. rychlost, při které je minimalizován nutný energetický výdaj.

Zdroj: pixabay.com

Než začnete řešit, uvědomte si, že pokud měříme rychlosti v jednotkách rychlosti vody v řece, platí $v = 1$ a že vhodnou volbou jednotek ve kterých měříme energii můžeme dosáhnout toho, že hledáme lokální minimum funkce

$$\frac{(x+1)^3}{x}.$$

(Podle Stewart, Day: Biocalculus. Calculus for the life siences.)

Pozorování potvrdila, že migrující ryby "znají" řešení předchozího příkladu a proto plavou proti proudu rychlostí o polovinu větší než rychlost proudu. Vzhledem ke břehu je tedy jejich "cestovní rychlost proti proudu" poloviční jako je rychlost proudu. Mimo jiné, v rychlé vodě plavou rychle a v pomalejší pomaleji.

Příklad typu jaký jsme řešili u migrace ryb se ale ve skutečnosti často objevuje naopak. Například následovně.

- Pozorujeme specifické chování ryb. Někdo si to toho nevšímá, někdo to bere jako fakt, ale někomu to vrtá hlavou. Proč to tak je? Asi si přirozeně minimalizují energii.
- Jakou musíme učinit hypotézu aby tato hypotéza vedla k pozorovanému jevu? Jaká musí být souvislost energie s rychlostí, aby minimalizace energie vedla k tomu, co pozorujeme?
- Po nalezení odpovědi na předchozí otázku je přirozené předpokládat, že jsme našli podstatu jevu. Tedy třeba, že energie je úměrná třetí mocnině rychlosti. V tomto smyslu matematika zviditelnila neviditelné.
- Někdy je potřeba při konfrontaci s jinými pozorováními hypotézu poopravit, zpřesnit nebo bohužel zamítnout. To však je přirozené při poznávání světa.