1 Cvičení 28.2.2019

Základní elementární funkce derivujeme pomocí následujících vzorců.

$$(c)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c) = 0$$

$$(x^n)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$$

$$(\sin x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$$

$$(\cos x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\ln x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Zde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta a zbytek jsou vzorce, které platí vždy, když je výraz napravo definovaný.

Nechť f, g jsou funkce a $c \in \mathbb{R}$ konstanta. Platí

$$\begin{aligned}
[cf]' &= cf', \\
[f \pm g]' &= f' \pm g', \\
[fg]' &= f'g + fg', \\
\left[\frac{f}{g}\right]' &= \frac{f'g - g'f}{g^2}, \\
\left[f(g(x))\right]' &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = f'(g(x))g'(x)
\end{aligned}$$

Výpočet derivace. Určete derivace následujících funkcí, kde $a, b, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$
2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 6}$
3. $f(x) = \dfrac{ax}{x + b}$
4. $f(x) = x \ln x$
5. $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}$
6. $f(x) = 1 - e^{bx}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{ax^2}$
8. $f(x) = \dfrac{a}{(\mu x + b)^2}$
9. $f(x) = (x^2 - 1)^4$
10. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$

Výpočet derivace. Určete derivace následujících funkcí jedné proměnné. Ostatní proměnné označují parametry.

1. $f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$
2. $f(r) = \pi r^2$
3. $f(a) = 6a^2$
4. $f(v) = \frac{1}{2}mv^2$
5. $f(r) = \frac{a}{r^2}$
6. $f(y) = ae^{by}$

Rychlost s jakou roste obsahu kruhu. Váté písky je bezlesý pruh podél železniční trati nedaleko Bzence, kde je extrémní sucho (Moravská Sahara). Rostou zde cenné rostliny a dobrovolníci, včetně přednášejícího, zde od osmdesátých let pravidelně vysekávali náletové borovice. V dřívějších dobách byly v pruhu podél železnice velmi časté požáry kvůli provozu parních vlaků. Předpokládejme, že požár se ve vysušené louce šíří ve tvaru kruhu. V určitém okamžiku je poloměr 50 metrů a roste rychlostí 1.5 metrů za minutu. Zapište zadání pomocí derivací a určete jak rychle roste plocha zasažená ohněm.

Zdroj: J. Kameníček, brnensky.denik.cz

Tepelná výměna. Teplota v místnosti kde se přestalo topit se mění tepelnou výměnou s okolím. Rychlost, s jakou teplota místnosti v zimě klesá je úměrná rozdílu teplot v místnosti a venku. Sestavte matematický model popisující pokles teploty v této místnosti.

Zdroj: pixabay.com

Model růstu úměrného velikosti chybějícího množství. Mnoho živočichů roste tak, že mohou dorůstat jisté maximální délky a rychlost jejich růstu je úměrná délce, která jim do této maximální délky chybí (tj. kolik ještě musí do této maximální délky dorůst). Sestavte matematický model popisující takovýto růst.

Zdroj: pixabay.com

Kontaminace a čištění. Znečišťující látky se v kontaminované oblasti rozkládají rychlostí 8% za den. Kromě toho pracovníci odstraňují látky rychlostí 30 galonů denně. Vyjádřete tento proces kvantitativně pomocí vhodného modelu.

Zdroj: pixabay.com

Hrubý model chřipkové epidemie. Rychlost s jakou roste počet nemocných chřipkou je úměrný současně počtu nemocných a počtu zdravých jedinců. Sestavte model takového šíření chřipky.

Zdroj: pixabay.com

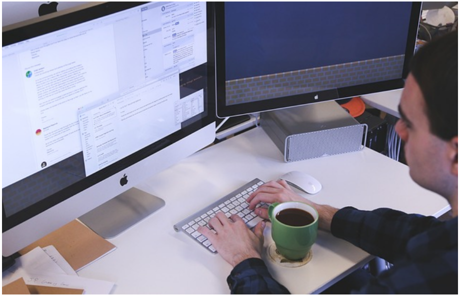
Model drancování přírodních zdrojů. Při modelování růstu populace často pracujeme s populací žijící v prostředí s omezenou úživností. Často používáme model

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

kde r a K jsou parametry modelu (reálné konstanty). Nakreslete graf funkce $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ a ověřte, že pro velká x je $f(x)$ záporné a velikost populace proto klesá. Pokud populaci lovíme konstantní rychlostí, sníží se pravá strana o konstantu, kterou označíme h. Ukažte, že pro intenzivní lov bude pravá strana rovnice pořád záporná a intenzivní lov tak způsobí vyhubení populace. Dá se najít kritická hodnota lovu oddělující vyhynutí populace a její trvalé přežívání?

Zdroj: pixabay.com

Dokončování bakalářské práce. Při dokončování bakalářské práce roste spotřeba kávy při prosezených hodinách u počítače. Student postupně zvyšuje svou denní spotřebu kávy rychlostí 0.5 litru za týden. Bohužel, situace na trhu se vyvinula tak, že roste i cena jednoho litru kávy, a to rychlostí 0.20 Kč za týden. Vyjádřete tato pozorování pomocí derivací a určete, jak rychle rostou celkové výdaje za kávu. Pokud nemáte všechny informace, rozhodněte, jaké další informace jsou nutné pro to, aby úlohu bylo možno vyřešit.



Zdroj: pixabay.com

Rychlost klesání kluzáku. Teplota klesá s výškou o 2°C na kilometr. Pilot kluzáku vidí, že teplota v okolí jeho kluzáku roste rychlostí $10^{-4}\,^\circ\mathrm{C/s}$. Vyjádřete tato pozorování pomocí derivací a určete, jak rychle ztrácí kluzák výšku.

Zdroj: pixabay.com

Změna tlaku a lupání v uších. V dopravním prostředku, který se pohybuje do kopce nebo z kopce, se mění tlak. Tím vznikne tlakový rozdíl mezi vnějším tlakem a tlakem ve středním uchu. Vyrovnání tlaku při rychlé změně se projeví lupnutím v uších. Lupnutí tedy nastane, pokud je derivace $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ velká. (Velká v absolutní hodnotě, tj. numericky hodně kladná nebo hodně záporná.) Tuto veličinu však je těžké měřit. Umíme měřit změnu nadmořské výšky u a víme, jak se tlak p mění s nadmořskou výškou. Nechť například $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u} = -0.12\,\mathrm{g cm^{-2} m^{-1}}$ (údaj meteorologů) a vezměme $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Okomentujte význam toho, že derivace jsou záporné a určete rychlost, s jakou rychlostí se mění tlak vzduchu.

Zdroj: pixabay.com

Derivace objemu koule a souvislost s povrchem. Derivace obsahu kružnice. Určete, jak souvisí rychlost změny poloměru kruhu s rychlostí, jakou roste obsah kruhu. Měli byste vypozorovat, že rychlost změny obsahu je rovna obvodu násobenému rychlostí změny poloměru. Platí analogické tvrzení i pro obsah čtverce a délku strany čtverce? Nakreslete si i obrázek pro vysvětlení tohoto pozorování. Poté stejně prozkoumejte vztah mezi objemem koule, povrchem koule a rychlostí změny poloměru koule. Zjistěte, jestli anaogický vztah platí i pro objem krychle, povrch krychle a rychlost změny délky hrany krychle.