.headcolor:red; font-variant: small-caps;
definice ¡table style=”background-color: rgb(255, 204,204); width: 100%;” border=”4” cellpadding=”10” frame=”border” rules=”none” ¿ ¡tbody¿ ¡tr¿ ¡td¿ ¡/td¿ ¡/tr¿ ¡/tbody¿ ¡/table¿
charsetiso-8859-2
veta ¡table style=”background-color: rgb(255, 255, 153); width: 100%;” border=”4” cellpadding=”10” frame=”border” rules=”none” ¿ ¡tbody¿ ¡tr¿ ¡td¿ ¡/td¿ ¡/tr¿ ¡/tbody¿ ¡/table¿
textbf
obrazek[2] obrazekAAAAABBBB
crosslinks $\Rightarrow$ $\Leftarrow$ $\Uparrow$

MATEMATIKA pro krajinářství
text přednášky

Robert Mařík

15. dubna 2007

Abstrakt

Předkládaný text je komentovaným přepisem podstatné části mých přednášek z předmětu *Matematika*, který je přednášen v prvním ročníku na oboru krajinářství na FLD MZLU.
Cílem tohoto textu je shrnout teorii, která je poněkud rozstrkaná do skript různých autorů, do jediného celku. Text také nabízí oporu v oblastech, které jsou vyloženy poněkud odlišně, než je tomu v doporičovaných skriptech a může doplnit studentovy vlastní zápisky z přednášek, které jsou často neúplné nebo zkratkovité — ať už z důvodu (učitelova) zkráceného zápisu na tabuli, nebo z důvodu nízké pozornosti (studenta) při psaní poznámek.
Oproti přenáškám a skriptům jsou v textu často vypuštěny motivační, aplikační a vzorové příklady a doprovodné obrázky.
Text je šířen v elektronické podobě a je nepřípustné do něj jakkoliv zasahovat. Text je primárně určen k tisku, protože s textem na papíře se přece jenom pracuje nepohodlněji. Pro studenty kteří potřebují do textu pouze občas nahlédnout je k dispozici i verze vhodná pro prohlížení na obrazovce.
Za upozornění na případné překlepy, chyby a nepřesnosti, jakož i za další relevantní komentáře předem děkuji.

Kapitola 1

Diferenciální počet

V této kapitole se budeme zabývat funkcemi. Pomocí funkcí v praxi popisujeme vztahy mezi veličinami. Nejprve se zaměříme na nejjednodušší vlastnosti funkcí.

1.1 Funkce, vlastnosti funkcí

Definice 1.1 (funkce)**.** Buďte A a B neprázdné podmnožiny množiny reálných čísel.
Pravidlo f, které každému prvku množiny A přiřadí jediný prvek množiny B se nazývá *funkce* (přesněji: *reálná funkce jedné reálné proměnné*). Zapisujeme $\boldsymbol{f : A \to B}$. Skutečnost, že prvku $a \in A$ je přiřazen prvek $b \in B$ zapisujeme takto: $\boldsymbol{f(a) = b}$. Přitom říkáme, že b je *obrazem prvku* a při zobrazení f, resp. že a je *vzorem prvku* b při zobrazení f.

Definice 1.2 (pojmy spojené s funkcemi)**.** Množina A z definice funkce se nazývá *definiční obor funkce* f. Označujeme $\boldsymbol{D(f)}$ (resp. $Dom(f)$). Množina všech $b \in B$, pro které existuje $a \in A$ s vlastností $f(a) = b$ se nazývá *obor hodnot funkce* f. Označujeme $\boldsymbol{H(f)}$ (resp. $Im(f)$).
Je-li $y = f(x)$ nazýváme proměnnou x též *nezávislou proměnnou* a proměnnou y *závislou proměnnou.*
Grafem funkce rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ s vlastností $y = f(x)$.

Poznámka 1.1. Funkce je tedy pravidlo, které jednomu reálnému číslu přiřadí jediné, přesně definované jiné reálné číslo. Je-li toto pravidlo tvaru "$y =$ vzorec s proměnnou x", nazýváme tento předpis *explicitním tvarem funkce*, např. $y = x^2 + \ln x$.
Je-li toto pravidlo ve tvaru "vzorec s proměnnými $x, y = 0$", nazýváme tento předpis *implicitním tvarem funkce.*, např. $x - y - \ln y = 0$. Zjednodušeně řečeno se tedy jedná o pravidlo, které je buď "efektivní" (explicitní tvar) nebo "málo efektivní" (implicitní tvar) pro výpočet funkčních hodnot.

Definice 1.3 (periodičnost funkce)**.** Řekneme, že funkce f je *periodická*, existuje-li kladné číslo p s vlastnostmi: je-li $x \in D(f)$, je i $x + p \in D(f)$ a $f(x) = f(x + p)$. Nejmenší číslo p s touto vlastností nazýváme *(nejmenší) periodou.*

V následující definici se budeme zajímat o to, jestli existuje nějaký vztah mezi funkční hodnotou v bodě x z definičního oboru a v bodě opačném.

Definice 1.4 (parita funkce)**.** Nechť funkce f splňuje následující podmínku: $x \in D(x) \Rightarrow (-x) \in D(f)$.

(i) Řekneme, že funkce f je *sudá* pokud platí $f(-x) = f(x)$.

(ii) Řekneme, že funkce f je *lichá* pokud platí $f(-x) = -f(x)$.

(iii) Řekneme, že funkce f má *paritu*, je-li sudá nebo lichá.

Poznámka 1.2 (graf funkce mající paritu)**.** Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy y. Graf liché funkce je středově souměrný podle bodu $[0, 0]$.

Poznámka 1.3 (k paritě)**.** Parita funkce nás informuje o tom, že funkční hodnoty $f(x)$ a $f(-x)$ u funkce nejsou nezávislé, ale jsou definované obě současně a jsou buď stejné, nebo se liší znaménkem. V obecném případě zkoumáme sudost či lichost funkce přímo z definice. Sudost či lichost polynomu a racionální funkce poznáme přímo ze zápisu této funkce použitím následující věty.

Věta 1.1. Paritu polynomů a racionálních funkcí lze určit následovně:

(i) Polynom je sudá (lichá) funkce právě tehdy, když obsahuje právě členy se sudým (s lichým) exponentem.

(ii) Racionální funkce je lichá právě tehdy, když je podílem sudého a lichého polynomu (v libovolném pořadí).

(iii) Racionální funkce je sudá právě tehdy, když je podílem dvou sudých nebo dvou lichých polynomů.

Poznámka 1.4. Poznamenejme, že číslo nula je také sudé. Sudý polynom tedy může obsahovat i absolutní člen. To že polynom je sudý (lichý) právě tehdy, když obsahuje pouze mocniny se sudým (lichým) exponentem slouží jako "vysvětlení" toho, proč se používá pojem sudá a lichá funkce.

Příklad 1.1 (parita)**.** Následující funkce jsou sudé: $f(x) = x^4 - 6$, $g(x) = \dfrac{x^3+x}{2x^5-3x}$, $h(x) = \dfrac{x^4-6}{x^2+1}$.
Následující funkce jsou liché: $f(x) = x^3 - 6x^7$, $g(x) = \dfrac{x^3-x}{2x^4-3}$, $h(x) = \dfrac{x^6-3}{x^3-x}$.
Následující funkce nejsou ani sudé ani liché: $f(x) = x^4 + x^2 - x$, $g(x) = \dfrac{x^3-x}{2x^4-3x}$, $y = e^x$.

Definice 1.5 (ohraničenost)**.** Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f.

(i) Řekneme, že funkce f je na množině M *zdola ohraničená*, existuje-li reálné číslo a s vlastností $a \leq f(x)$ pro všechna $x \in M$.

(ii) Řekneme, že funkce f je na množině M *shora ohraničená*, existuje-li reálné číslo b s vlastností $f(x) \leq b$ pro všechna $x \in M$.

(iii) Řekneme, že funkce f je na množině M *ohraničená*, je-li na M ohraničená zdola i shora.

Nespecifikujeme-li množinu M, máme na mysli, že uvedená vlastnost platí na celém definičním oboru funkce f.

Poznámka 1.5 (grafický důsledek)**.** Funkce je shora ohraničená, jestliže existuje vodorovná přímka, která leží celá nad grafem funkce. Podobně poznáváme na grafu ohraničenost zdola.
Funkce je prostá, jestliže každá vodorovná přímka protíná graf nejvýše jednou.

Motivace. Pro libovolnou dobře definovanou funkci f platí implikace

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

nyní se budeme zajímat o to, za jakých podmínek lze tuto implikaci obrátit. Obrácení implikace by totiž mohlo být užitečné při řešení některých nelineárních rovnic.

Definice 1.6 (prostost)**.** Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f. Řekneme, že funkce f je *prostá*, jestliže každý obraz má jen jediný vzor, tj. pro každé $y \in f(M)$ existuje jediné $x \in M$ s vlastností $f(x) = y$.
Nespecifikujeme-li množinu M, máme na mysli, že uvedená vlastnost platí na celém definičním oboru funkce f.

Poznámka 1.6 (k prostým funkcím)**.** Ekvivalentně lze říci, že funkce f je prostá na množině M, jestliže stejné obrazy mají nutně i stejný vzor, neboli různým vzorům jsou přiřazeny různé obrazy. Matematicky formulováno: platí implikace

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \tag{1.1}$$

tj. je-li funkce f prostá, můžeme tuto funkci "odstranit" z obou stran rovnice a místo $f(x_1) = f(x_2)$ psát ekvivalentně $x_1 = x_2$.

Definice 1.7 (inverzní funkce)**.** Nechť funkce $f : A \to B$ je prostá. Pravidlo, které každému x z množiny $f(A)$ přiřadí to (jediné) y, pro které platí $f(y) = x$ se nazývá *inverzní funkce* k funkci f, označujeme $\boldsymbol{f^{-1}}$.

Poznámka 1.7. Symbol $f^{-1}(x)$ lze tedy chápat buď jako hodnotu inverzní funkce k funkci f v bodě x, nebo jako převrácenou hodnotu k číslu $f(x)$, tj jako $[f(x)]^{-1} = \dfrac{1}{f(x)}$. Nebude-li z kontextu zřejmé, o kterou variantu se jedná, musíme toto upřesnit.

Poznámka 1.8 (geometrický význam inverzní funkce)**.** Ihned z definice plyne, že graf funkce f a graf funkce k ní inverzní f^{-1} jsou souměrné podle přímky $y = x$, tj. podle osy prvního a třetího kvadrantu.

Poznámka 1.9 (výpočet inverzní funkce)**.** Inverzní funkci k funkci $y = f(x)$ určíme takto: zaměníme formálně v zadání funkce proměnné x a y, máme tedy $x = f(y)$. Tato rovnice definuje implicitně inverzní funkci $y = f^{-1}(x)$. Z této rovnice vyjádříme proměnnou y (pokud toto nelze provést, ponecháme inverzní funkci v implicitním tvaru). Toto vyjádření je jednoznačné (jinak by to znamenalo, že funkce f není prostá a inverzní funkce neexistuje) a definuje explicitně inverzní funkci f^{-1}. U základních elementárních funkcí (viz dále) je zpravidla inverzní funkce jednoduše jiná základní elementární funkce, například inverzní funkce k logaritmické funkci je exponenciální funkce a podobně (viz Tabulka 1.1). Protože vlastnost "být inverzní funkcí" je vlastnost vzájemná, je také logaritmická funkce inverzní k funkci exponenciální.

Funkce $y = f(x)$	Funkce inverzní $y = f^{-1}(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y = x^2,\ x > 0$
$y = x^2,\ x > 0$	$y = \sqrt{x}$
$y = e^x$	$y = \ln x$
$y = \ln x$	$y = e^x$
$y = a^x$	$y = \log_a x$
$y = \sin x,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$	$y = \arcsin x$
$y = \cos x,\ x \in [0, \pi]$	$y = \arccos x$
$y = \operatorname{tg} x,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$	$y = \operatorname{arctg} x$

Tabulka 1.1: Inverzní funkce k základním elementárním funkcím.

Příklad 1.2 (výpočet inverzní funkce)**.** Nalezneme inverzní funkci k funkci $y = \dfrac{2x-1}{x}$. Záměnnou proměnných získáváme implicitní tvar inverzní funkce

$$x = \frac{2y-1}{y}$$

odsud

$$\begin{aligned} xy &= 2y - 1 \\ 1 &= (2 - x)y \end{aligned}$$

a inverzní funkce má předpis

$$y = \frac{1}{2-x}$$

Příklad 1.3 (výpočet inverzní funkce)**.** Nalezneme inverzní funkci k funkci $y = x + e^x$. Tato funkce je zřejmě prostá, protože je rostoucí. Záměnnou proměnných obdržíme implicitní tvar inverzní funkce

$$x = y + e^y.$$

Odsud již proměnnou y neumíme vyjádřit. Ponecháme proto inverzní funkci v implicitním tvaru.

Poznámka 1.10 (zápis čísla jako výsledku předem zadané operace)**.** Je zřejmé, že $f(f^{-1}(x)) = x$ a $f^{-1}(f(x)) = x$ pro všechna, pro která má tento zápis smysl. Toto nám umožňuje zapsat dané číslo jako výsledek nějaké operace. Např. číslo 1 lze zapsat libovolnou z následujících možností

$$1 = \ln e^1 = \log_5 5^1 = 6^{\log_6 1} = \sin(\arcsin 1) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1) = (\sqrt{1})^2$$

Poznámka 1.11 (nelineární rovnice)**.** Má-li funkce f inverzní funkci f^{-1} a je-li tato inverzní funkce definována v bodě x, potom má nelineární rovnice s neznámou y

$$f(y) = x$$

právě jedno řešení dané vzorcem

$$y = f^{-1}(x).$$

Příklad 1.4 (nelineární rovnice)**.** Řešme rovnici

$$e^{\frac{2}{x-1}} = 2.$$

Protože k exponenciální funkci je inverzní logaritmická funkce, plyne odsud

$$\frac{2}{x-1} = \ln 2,$$

odkud již snadno vyjádříme

$$x = \frac{2}{\ln 2} + 1.$$

Jinou možností je přepsat rovnici do tvaru, který obsahuje exponenciální funkci na obou stranách rovnice

$$e^{\frac{2}{x-1}} = e^{\ln 2}$$

a odstranit tuto exponenciální funkci z obou stran rovnice (exponenciální funkce je totiž prostá a lze použít (1.1) a připojenou poznámku). Obdržíme samozřejmě stejný výsledek.

Motivace. V následující definici jsou nejdůležitější pojmy rostoucí a klesající funkce. Názorně řečeno, jsou to funkce které zachovávají (rostoucí) nebo obracejí (klesající) směr nerovnosti při aplikaci funkce na obě strany nerovnice.

Definice 1.8 (monotonie funkce)**.** Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f.

(i) Řekneme, že funkce f je na množině M *rostoucí* jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ s vlastností $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.

(ii) Řekneme, že funkce f je na množině M *klesající* jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ s vlastností $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.

(iii) Řekneme, že funkce f je na množině M *(ryze) monotonní* je-li buď rostoucí, nebo klesající na M.

Nespecifikujeme-li množinu M, máme na mysli, že uvedená vlastnost platí na celém definičním oboru funkce f.

Poznámka 1.12 (k monotonnosti)**.** U vlastností monotonie nás zajímá nejčastěji případ, kdy množinou M je interval. Potom má monotonie a ryzí monotonie názornou geometrickou interpretaci na grafu funkce (obrázek!). Pozor: funkce $y = 1/x$ není klesající na celém svém definičním oboru, ale pouze na každém z intervalů $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Poznámka 1.13 (nelineární nerovnice)**.** To, že je funkce rostoucí názorně znamená, že jsou-li vzory funkce (hodnoty x) uspořádány podle velikosti, platí pro jejich obrazy (hodnoty $f(x)$) stejné uspořádání. Je-li $f(x)$ tedy rostoucí funkce, jsou nerovnosti $a < b$ a $f(a) < f(b)$ ekvivalentní. Totéž platí i pro neostré nerovnice.
Můžeme tedy libovolnou (ostrou nebo neostrou) nerovnici např. "logaritmovat", nebo "odlogaritmovat" logaritmem o základu větším než 1. Pozor! Je-li funkce $f(x)$ klesající, obrací se při aplikaci funkce (nebo při vynechání funkce) na obě strany nerovnice znaménko nerovnosti.

Příklad 1.5 (nelineární nerovnice)**.** Nerovnici

$$\ln(x^2 - 4x - 4) > 0$$

lze řešit například tak, že ji přepíšeme do tvaru s logaritmy na obou stranách nerovnice

$$\ln(x^2 - 4x - 4) > \ln 1$$

a odlogaritmujeme:

$$x^2 - 4x - 4 > 1.$$

Odsud poté dostáváme postupně:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 5 &> 0 \\ (x-5)(x+1) &> 0 \\ x &\in (-\infty, -1) \cup (5, \infty), \end{aligned}$$

přičemž kvadratickou nerovnici vyřešíme například graficky.

Okamžitě z definice vyplývá následující věta.

Věta 1.2. Je-li funkce f na množině M ryze monotonní, je na této množině i prostá.

Následující věta ukazuje, že při přechodu k inverzní funkci se zachovává ryzí monotonie a lichost.

Věta 1.3. Je-li funkce $f(x)$ rostoucí (klesající, lichá), má tutéž vlastnost i funkce inverzní $f^{-1}(x)$.

Poznámka 1.14. Sudá funkce není prostá, nemá proto inverzní funkci.

Poznámka 1.15 (shrnující poznámka)**.** Shrňme si, jak nám znalost vlastností funkcí umožňuje pracovat s rovnicemi a nerovnostmi.

$$a = b \overset{f \text{ je prostá}}{\iff} f(a) = f(b)$$

$$a < b \overset{f \text{ je rostoucí}}{\iff} f(a) < f(b) \qquad a \le b \overset{f \text{ je rostoucí}}{\iff} f(a) \le f(b)$$

$$a < b \overset{f \text{ je klesající}}{\iff} f(a) > f(b) \qquad a \le b \overset{f \text{ je klesající}}{\iff} f(a) \ge f(b)$$

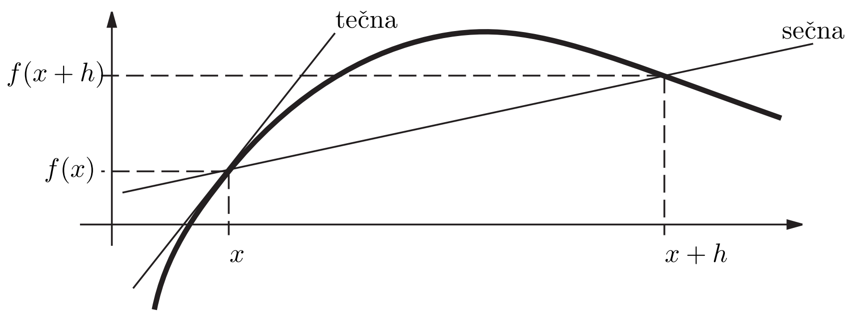
Je-li funkce f prostá, pak pro každé $y \in H(f)$ má rovnice

$$f(x) = y$$

s neznámou x právě jedno řešení a toto řešení je možno vyjádřit vztahem $x = f^{-1}(y)$.

1.2 Limita, spojitost

Motivace. Nyní budeme hledat vhodnou veličinu, která nám umožní popsat, jak rychle se mění jedna veličina při změnách veličiny druhé. U přímky je takovouto vhodnou veličinou směrnice (zpravidla označujeme symbolem k): Je-li směrnice kladná, přímka roste, je-li záporná tak naopak. Je-li směrnice blízká k nule, přímka roste pozvolna, je-li mnohem větší něž jedna, přímka rychle roste, je-li mnohem menší než minus jedna, přímka rychle klesá.



Obrázek 1.1: Geometrický význam derivace

Při studiu funkcí se ukazuje, že vhodnou mírou rychlosti růstu funkce v daném bodě je směrnice tečny v tomto bodě (tato směrnice se pochopitelně může měnit podlé křivky, křivka může nejprve rychle růst, potom například růst zpomalit a opět klesat). Jak ale najít směrnici tečny ke křivce v bodě $[x, f(x)]$? Použijeme následující úvahu: Uvažujme sečnu na grafu funkce, která prochází body $[x, f(x)]$ a $[x+h, f(x+h)]$. Směrnice této sečny je

$$k_{\text{sečny}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Přiblížíme-li bod $[x+h, f(x+h)]$ k bodu $[x, f(x)]$, přiblíží se sečna k tečně a ze směrnice sečny dostaneme směrnici tečny (sledujte na obrázku 1.1). Tímto procesem však veličina h, která je ve jmenovateli a udává vodorovnou vzálenost průsečíků na sečně, klesne na nulu a nemůže se objevit ve jmenovateli (nulou nemůžeme dělit). Proto je nutno podrobně prozkoumat, co se děje s funkčními hodnotami funcí při změnách nezávislé proměnné (x). Budeme se přitom nejvíce zajímat o případy, kdy se blížíme k nějaké "problematické" hodnotě, např. k nule ve jmenovateli, k nule uvnitř logaritmu, nebo "k nekonečnu" (viz dále).
Motivace. Definice v této podkapitole mají následující smysl: Budeme sledovat, jak souvisí funkční hodnota v daném bodě (pokud je definována) s funkčními hodnotami v nejbližších okolních bodech. Dále, pokud funkční hodnota v daném bodě není definována, budeme se zajímat o to, jestli funkční hodnoty v nejbližších okolních bodech jsou ustáleny okolo nějaké význačné hodnoty, či nikoliv. Nejprve je vhodné rozšířit si množinu reálných čísel o dva další body, plus a minus nekonečno.

Definice 1.9 (rozšířená množina reálných čísel)**.** *Rozšířenou množinou reálných čísel* $\mathbb{R}^*$ rozumíme množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšířenou o body $\pm\infty$ následovně: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, přičemž pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

$$a + \infty = \infty, \qquad a - \infty = -\infty, \qquad \infty + \infty = \infty, \qquad -\infty - \infty = -\infty$$

$$\infty.\infty = -\infty.(-\infty) = \infty, \qquad \infty.(-\infty) = -\infty, \qquad \frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$$

$$-\infty < a < \infty, \qquad |\pm\infty| = \infty,$$

je-li $a > 0$ definujeme

$$a.\infty = \infty \qquad a.(-\infty) = -\infty,$$

a je-li $a < 0$ definujeme

$$a.\infty = -\infty \qquad a.(-\infty) = \infty.$$

Další operace definujeme pomocí komutativnosti operací "+" a ".". Body $\pm\infty$ nazýváme *nevlastní body*, body množiny $\mathbb{R}$ nazýváme *vlastní body*.

Poznámka 1.16. Nejsou tedy definovány operace "$\infty - \infty$", "$\pm\infty.0$" a "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$". Poznamenejme, že samozřejmě není definováno dělení nulou.

Definice 1.10 (okolí)**.** *Okolím* bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme libovolný otevřený interval, který ve svém vnitřku obsahuje bod a, značíme $\boldsymbol{O(a)}$. *Ryzím (též prstencovým) okolím* bodu a rozumíme množinu $O(a) \setminus \{a\}$, značíme $\boldsymbol{\overline{O}(a)}$. *Okolím bodu* ∞ rozumíme libovolný interval tvaru (A, ∞), kde A je reálné číslo a *okolím bodu* $-\infty$ interval $(-\infty, A)$. Ryzím okolím nevlastních bodů rozumíme totéž, co okolím těchto bodů.

Definice 1.11 (limita funkce)**.** Nechť $a, L \in \mathbb{R}^*$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nechť je funkce f definovaná v nějakém ryzím okolí bodu a.
Řekneme, že funkce f má v bodě a *limitu* rovnu číslu L, jestliže ke každému okolí $O(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\overline{O}(a)$ bodu a takové, že pro libovolné $x \in \overline{O}(a)$ je $f(x) \in O(L)$. Píšeme

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = L}, \tag{1.2}$$

nebo $\boldsymbol{f(x) \to L}$ pro $\boldsymbol{x \to a}$.

Definice 1.12 (vlastní a nevlastní limita)**.** Je-li v předchozí definici $L \in \mathbb{R}$, nazývá se limita *vlastní*, je-li $L \in \{\infty, -\infty\}$, nazývá se limita *nevlastní*.

Vlastní limitu ve vlastním bodě je někdy vhodné ekvivalentně definovat následovně:

Definice 1.13 ($\varepsilon\delta$-definice limity)**.** Nechť $a, L \in \mathbb{R}$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě a *limitu* rovnu číslu L, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné $x \in (a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

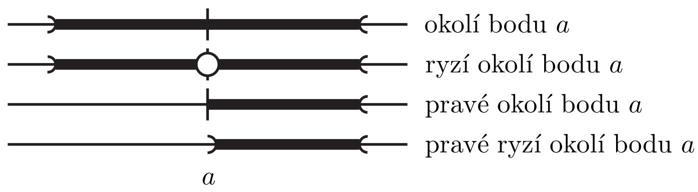
Poznámka 1.17. Místo $x \in (a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$ lze ekvivalentně psát $0 < |x - a| < \delta$. Podobně místo $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ lze psát $|f(x) - L| < \varepsilon$

Poznámka 1.18. Definice limity je naprosto nevhodná pro výpočet. Jednodušší je ukázat pomocí definice, že číslo L *není* limitou funkce v bodě a.

Definice 1.14 (jednostranné okolí)**.** *Pravým (resp. levým) okolím* bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme libovolný interval tvaru $[a, b)$,(resp. tvaru $(b, a]$, pro levé okolí), kde b je reálné číslo splňující $b > a$ (resp. $b < a$). Značíme $O^+(a)$ $(O^-(a))$. *Ryzím pravým (resp. levým) okolím* bodu a rozumíme odpovídající jednostranné okolí, ze kterého vyjmeme bod a. Značíme $\overline{O^+}(a)$, $(\overline{O^-}(a))$.

Definice 1.15 (jednostranná limita)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dále nechť je funkce f definovaná v nějakém pravém (levém) ryzím okolí bodu a.
Řekneme, že funkce f má v bodě a *limitu zprava* (*limitu zleva*) rovnu číslu L, jestliže ke každému okolí $O(L)$ bodu L existuje pravé ryzí okolí $\overline{O^+}(a)$ (levé ryzí okolí $\overline{O^-}(a)$) bodu a takové, že pro libovolné $x \in \overline{O^+}(a)$ $(x \in \overline{O^-}(a))$ platí $f(x) \in O(L)$. Píšeme $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ $\left(\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L\right)$.

Poznámka 1.19 (zkrácená forma zápisu)**.** Jiná forma zápisu jednostranné limity je $f(a+) = L$ pro limitu zprava a $f(a-) = L$ pro limitu zleva. Fakt, že za argumentem funkce je znaménko přitom signalizuje, že se nejedná o funkční hodnotu v bodě a (tj. nejde o $f(a)$), ale o limitu v bodě a zprava nebo zleva. Pro oboustranné limity se symbolika tohoto typu používá zřídka, píšeme potom $f(a\pm)$.



Obrázek 1.2: Okolí a jednostranné okolí bodu a.

Poznámka 1.20. Vidíme, že nedefinujeme ani jednostranná okolí nevlastních bodů ani jednostranné limity v těchto bodech.

Poznámka 1.21. Aby existovala limita v bodě $a \in \mathbb{R}$, nemusí být funkce f v bodě a definována, protože $f(a)$ v definici limity nikde nevystupuje. Například limita funkce $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ existuje, i když tato funkce není definována v bodě 0. Funkce naopak musí být definována v nějakém ryzím okolí (nebo ryzím jednostranném okolí, v případě jednostranné limity) bodu a. Nedefinujeme tedy například $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{1-3x^2}$, nebo $\lim\limits_{x\to 0^-} \ln(x)$.

Poznámka 1.22 (”vulgární” vyjádření pojmu limita)**.** Nepřesně řečeno, předpis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ znamená, že je-li hodnota x blízká k číslu a, je funkční hodnota $f(x)$ blízká k číslu L.

Věta 1.4 (jednoznačnost limity)**.** Funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu (limitu zprava, limitu zleva).

Věta 1.5 (souvislost limity s jednostrannými limitami)**.** Funkce má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu právě tehdy, má-li v tomto bodě obě jednostranné limity a tyto limity jsou shodné.

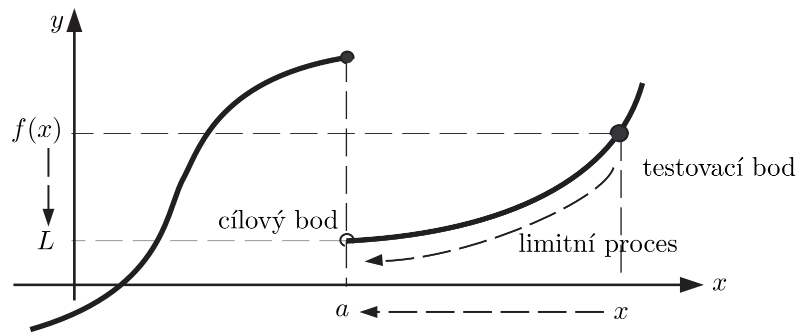
Poznámka 1.23 (technická – grafické nalezení limity)**.** Existenci a hodnotu limity poznáme pěkně z grafu funkce (umíme-li ho nakreslit). Představme si graf funkce $y = f(x)$ a hledejme hodnotu limity $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

- Uvažujme na grafu funkce testovací bod. x-ová souřadnice tohoto bodu nechť je větší než a
- Posunujme testovací bod po grafu funkce zprava doleva tak, aby se x-ová souřadnice blížila k bodu a.
- Pokud při tomto procesu dochází k tomu, že y-ová souřadnice se ustálí kolem nějakého čísla L, je číslo L limitou funkce v bodě a zprava.

Obrázek 1.3 ilustruje tuto myšlenku. Funkce na obrázku má obě jednostranné limity v bodě a, jsou však různé. Proces nalezení limity zprava je zachycen na obrázku, limita zleva se najde analogicky.

Poznámka 1.24 (”experimentální stanovení limity”)**.** Chceme-li odhadnout, zda jistá limita existuje či nikoliv, lze použít následující postup: zvolíme nějakou posloupnost čísel, která se blíží k číslu a a postupně počítáme funkční hodnoty funkce f v těchto číslech. Měla by vycházet posloupnost čísel, které se přibližují k jistému číslu L. Pokud toto skutečně vychází, je pravděpodobné, že toto číslo L je limitou funkce f v bodě a ve smyslu výše uvedené definice. Toto přibližování může být porušeno v bodech, které jsou již ”značně blízko” bodu a, což bývá způsobeno omezenou přesností počítacích strojů a následným selháním algoritmů, které jsou v těchto strojích zabudovány.

Příklad 1.6 (numerický experiment)**.** Odhadneme hodnotu limity $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$ pomocí numerického experimentu. Budeme hledat hodnoty funkce $\frac{\sin x}{x}$ na posloupnosti hodnot x, které konvergují k nule zprava. Dostáváme



Obrázek 1.3: Limitní proces $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

x	0.5	0.2	0.1	0.01	0.005	0.00001
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.95885	0.99334	0.99833	0.999983	0.9999958	1

Odsud se zdá být rozumné se domnívat, že

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Nicméně, tato domněnka může býti zavádějící.

- Kalkulátor zaokrouhluje. Z tabulky se zdá, že hodnota funkce je přesně jedna, pro x dost blízké nule. Bohužel, není tomu tak. Ve skutečnosti hodnota funkce $\sin(x)/x$ není rovna jedné nikde. Rovnice $\dfrac{\sin x}{x} = 1$ nemá řešení.
- Z tabulky je pravděpodobné, že $\sin(x)/x$ se přibližuje číslu 1 pokud se x přibližuje k číslu 0. Avšak tímto faktem si nemůže být zcela jisti. Žádné množství konkrétních dat neukazuje, že hodnoty nemohou být zcela jiné, pokud jsou hodnoty x ještě blíže k nule, než je zachyceno v tabulce.

Numerický experiment dává dobrou představu, jaká by mohla hodnota limity být, nemůže však být použit pro důkaz existence limity. Je nutno odvodit přesnou teorii pro výpočet limit, jak bude provedeno níže.

Následující vlastnost nám dává informaci o vztahu limity v bodě a funkční hodnoty v tomto bodě. Tyto mohou být zcela nezávislé – můžou existovat obě současně a být různé, nebo kterákoliv z nich existovat nemusí. Pokud však obě existují a jsou stejné, je funkce určitým způsobem "pěkná" — spojitá.

Definice 1.16 (spojitost v bodě)**.** Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *spojitá* v bodě a, jestliže a je v definičním oboru funkce f a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *spojitá zprava* (*spojitá zleva*) v bodě a, jestliže a je v definičním oboru funkce f a $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ ($\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$).

Definice 1.17 (spojitost na intervalu)**.** Řekneme, že funkce je *spojitá na otevřeném intervalu* (a, b), je-li spojitá v každém jeho vnitřním bodě. Řekneme, že funkce je *spojitá na uzavřeném intervalu* $[a, b]$, je-li spojitá v každém jeho vnitřním bodě, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Označení. Množinu všech funkcí spojitých[1] na intervalu I označujeme $C(I)$. Je-li $I = (a, b)$ nebo $I = [a, b]$, píšeme $C((a, b))$, nebo $C([a, b])$.

[1] anglicky *continuous*

Poznámka 1.25 (filozofická)**.** Všimněte si, že definice spojitosti je zcela odlišná od "běžné" představy spojité funkce jakožto funkce, jejíž graf lze nakreslit jedním tahem. Tato skutečnost je však přirozená, protože nedokonalost, která nutně provází jakoukoliv vizualizaci grafu funkce, nám nedovoluje zavést přesně jakýkoliv pojem, tedy ani spojitost, pokud se odvoláváme pouze na geometrický názor. Definice vlastně vyjadřuje fakt, že na intervalu, na kterém je funkce spojitá, se její funkční hodnoty mění "pozvolna" – malá změna proměnné x vyvolá relativně malou změnu proměnné y.

Následující definice se týká naprosté většiny funkcí, se kterými budeme pracovat.

Definice 1.18 (základní elementární funkce)**.** Všechny mnohočleny, goniometrické, cyklometrické, exponenciální a logaritmické funkce a obecná mocnina se nazývají *základní elementární funkce*.

Definice 1.19 (elementární funkce)**.** Všechny funkce, které ze základních elementárních funkcí získáme konečným počtem operací sčítání, odečítání, násobení, dělení a skládání těchto funkcí navzájem se nazývají *elementární funkce*.

Poznámka 1.26. Elementární funkce jsou tedy všechny funkce, které umíme v konečném tvaru vyjádřit explicitním vzorcem za použití funkcí známých ze střední školy a cyklometrických funkcí.

Věta 1.6 (spojitost elementárních funkcí)**.** Elementární funkce jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Poznámka 1.27 (technická)**.** Předchozí věta nám říká, že u elementárních funkcí je limita a funkční hodnota v bodech patřících do definičního oboru totéž. Limitu v bodě a proto zkusíme počítat tak, že nejprve dosadíme $x = a$. Pouze pokud "nelze dosadit", tj. pokud $a \notin D(f)$, musíme limitu počítat jinak. Díky této větě je pro nás pojem limita u elementárních funkcí zajímavý již jen v bodech, které nepatří do definičního oboru funkce.

Příklad 1.7 (výpočet limity dosazením)**.** Funkce $y = \dfrac{e^x \ln(x)}{x^2 - 1}$ je spojitá na intervalech $(0, 1)$ a $(1, \infty)$. Proto např.

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x \ln(x)}{x^2 - 1} = \frac{e^2 \ln 2}{3}.$$

Čtenář má ze střední školy pravděpodobně intuitivní představu o asymptotách ke grafu funkce. Následující definice včleňují asymptoty do konceptu limit.

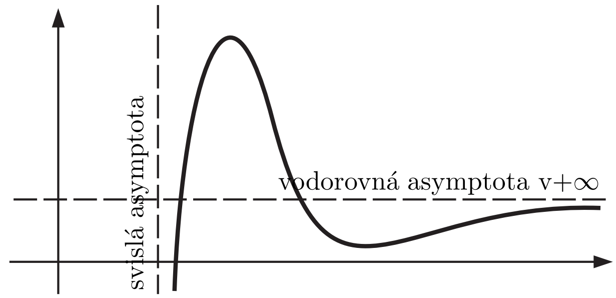
Definice 1.20 (asymptota bez směrnice, svislá asymptota)**.** Buď f funkce a $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní bod. Řekneme, že přímka $x = x_0$ je *asymptotou bez směrnice* (též *svislá nebo vertikální asymptota*) ke grafu funkce f, jestliže alespoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě x_0 existuje a je nevlastní.

Definice 1.21 (vodorovná asymptota)**.** Buď $q \in \mathbb{R}$. Přímka $y = q$ je *vodorovnou* (*horizontální*) *asymptotou* ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $+\infty$ právě tehdy, když platí

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = q.$$

Podobně definujeme horizontální asymptotu v bodě $-\infty$.

Poznámka 1.28 (souvislost mezi limitou a vodorovnou asymptotou)**.** Předchozí věta a definice říkají, že vodorovná (horizontální) asymptota v nevlastním bodě je totéž, co limita v tomto bodě. Vskutku, blíží-li se graf funkce $y = f(x)$ k přímce $y = q$ (přímka je asymptotou), znamená to, že funkční hodnoty $f(x)$ se blíží k číslu q (číslo q je limitou), a naopak.



Obrázek 1.4: Vodorovná a svislá asymptota.

Definice 1.22 (asymptota se směrnicí)**.** Buď f funkce definovaná v nějakém okolí bodu ∞. Přímka $y = kx + q$ se nazývá *asymptota se směrnicí ke grafu funkce* $y = f(x)$, jestliže platí

$$\lim_{x\to\infty} |kx + q - f(x)| = 0$$

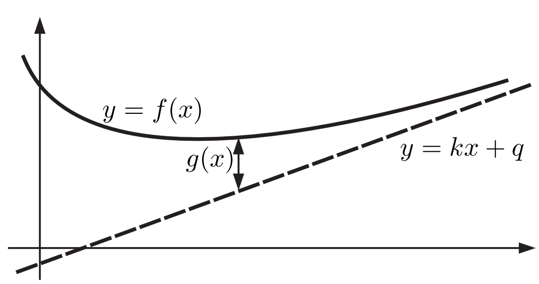
Podobně, zaměníme-li bod ∞ za bod $-\infty$, obdržíme definici asymptoty se směrnicí ke grafu funkce f v bodě $-\infty$.

Poznámka 1.29 (geometrický význam předchozí definice)**.** Asymptota se směrnicí je tedy přímka, ke které se graf přibližuje v některém z nevlastních bodů. Všimněte si, že definice nevylučuje případ, kdy $kx + q - f(x) = 0$, tj. kdy je funkce f lineární. V tomto případě je grafem funkce přímka, která je sama svojí asymptotou.
Dále podotkněme, že vodorovná asymptota je pouze speciální případ asymptoty se směrnicí, jejíž směrnice je nulová.

Věta 1.7 (asymptota se směrnicí)**.** Buď f funkce definovaná v nějakém okolí bodu ∞. Přímka $y = kx + q$ je asymptota bez směrnice ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $+\infty$ právě tehdy, když existují konečné limity

$$k := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{a} \qquad q := \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx). \tag{1.3}$$

Podobně, zaměníme-li bod ∞ za bod $-\infty$, obdržíme asymptotu se směrnicí ke grafu funkce f v bodě $-\infty$.



Obrázek 1.5: Asymptota se směrnicí v $+\infty$.

Poznámka 1.30. Graf funkce může ale nemusí mít asymptotu. U asymptot se směrnicí mohou, ale i nemusí, být obě asymptoty v nevlastních bodech $\pm\infty$ stejné. Dokonce může existovat pouze jedna (viz např funkce $y = e^x$). U asymptot ke grafům racionálních funkcí je situace jednodušší (viz následující věta).

Věta 1.8 (asymptoty racionální funkce)**.** Asymptoty se směrnicí ke grafu racionální funkce v bodech $\pm\infty$ existují současně a jsou stejné.

Poznámka 1.31. Polynom stupně alespoň 2 nemá asymptoty.

V následujícím textu si ukážeme některé techniky umožňující praktický výpočet limit.

Věta 1.9 (pravidla pro počítání s limitami)**.** Buď $a \in \mathbb{R}^*$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Platí

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) \tag{1.4}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) \tag{1.5}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \tag{1.6}$$

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|, \tag{1.7}$$

kde limita vlevo existuje, jestliže existují limity vpravo (vlastní nebo nevlastní) a výraz vpravo je definován. Totéž platí i pro jednotlivé jednostranné limity.

Příklad 1.8 (aplikace předchozí věty)**.** S využitím věty lze počítat následující limity

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \cos x = -\infty.1 = -\infty$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x} = \frac{1}{\infty.\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

Příklad 1.9 (selhání předchozí věty)**.** Větu nelze použít pro výpočet limity $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{x} + \ln x)$, protože bychom obdrželi nedefinovaný výraz "$\infty - \infty$". Stejně tak větu nelze použít např. pro výpočet limit $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin^2 x + \cos^2 x)$ nebo $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cos^2 x$, protože limity $\lim\limits_{x\to\infty} \sin^2 x$ a $\lim\limits_{x\to\infty} \cos^2 x$ neexistují. Toto však nic nevypovídá o tom, zda původní limita existuje nebo neexistuje!

Následující věta je aplikovatelná v případech, kdy hledáme limitu součinu dvou funkcí, z nichž jedna limitu nemá a druhá má limitu nulovou.

Věta 1.10. Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a nechť existuje ryzí okolí bodu a, kde je funkce $g(x)$ ohraničená. Pak $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$, tj. limita existuje a je rovna nule.

Příklad 1.10 (aplikace předchozí věty)**.** S pomocí této věty již lze vypočítat limitu z předchozí poznámky: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cos^2 x =$ "$0.$(ohraničená funkce)" $= 0$

Následující věta má použití například při výpočtu limity racionální funkce v bodech, ve kterých tato funkce není definována, tj. v bodech, pro které po dosazení vychází nula ve jmenovateli a nenulové číslo v čitateli (vychází-li nula i v čitateli, lze ve zlomku provést krácení, čímž se situace převede na některý z ostatních případů).

Věta 1.11 (limita typu "$\frac{L}{0}$")**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$. Nechť existuje ryzí okolí bodu a, ve kterém je funkce $g(x)$ nemění znaménko. Potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{pokud } g(x) \text{ a } L \text{ mají stejné znaménko,} \\ -\infty & \text{pokud } g(x) \text{ a } L \text{ mají různá znaménka.} \end{cases}$$

Totéž platí i pro jednostranná okolí a příslušné jednostranné limity.

Poznámka 1.32 (symboly "+0", "−0"). Limita typu "$\frac{L}{0}$", pokud existuje, je vždy nevlastní. Znaménko určíme pomocí běžných pravidel pro určení znaménka podílu – podíl dvou kladných nebo dvou záporných čísel je kladný, podíl kladného a záporného čísla (v libovolném pořadí) je záporný. Vyjádříme-li tedy symbolem "+0" skutečnost, že funkce ve jmenovateli má limitu (jedno- nebo oboustrannou) rovnu nule, v nějakém ryzím okolí (jedno- nebo oboustranném) je však nenulová a kladná, lze podle předchozí věty počítat např. takto: $\frac{2}{+0} = \infty$, $\frac{-\infty}{+0} = -\infty$. Podobně symbolem "−0" vyjádříme skutečnost, že funkce ve jmenovateli má nulovou limitu a v nějakém ryzím okolí je nenulová a záporná a lze psát např. $\frac{-2}{-0} = \infty$.

Poznámka 1.33 (technická). V praxi je při aplikaci předchozí věty obvyklé vyšetřovat nejprve jednostranné limity a z jejich vzájemného vztahu poté usoudit na existenci nebo neexistenci oboustranné limity.

Příklad 1.11 (limita lomené funkce ve vlastním bodě nepatřícím do definičního oboru).

(i) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1-x}{x^2-4} = \text{"}\frac{-1}{+0}\text{"} = -\infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1-x}{x^2-4} = \text{"}\frac{-1}{-0}\text{"} = \infty$

(iii) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1-x}{x^2-4}$ neexistuje, protože jednostranné limity nejsou stejné.

Následující věta ukazuje, že při výpočtu limity složené funkce lze postupovat tak, že určíme nejprve limitu vnitřní složky a poté na výsledek aplikujeme složku vnější.

Věta 1.12 (limita složené funkce se spojitou vnější složkou). Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ a $g(x)$ je funkce spojitá v bodě b, platí $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$, tj.

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)).$$

Totéž platí i pro jednotlivé jednostranné limity.

Příklad 1.12 (limita složené funkce se spojitou vnější složkou).

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos(e^{-x}) = \cos 0 = 1$

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\operatorname{arctg} x} = e^{-\pi/2}$

Předchozí větu nelze aplikovat v případě, že limita vnitřní složky je nevlastní, nebo pokud uvedeným postupem obdržíme nedefinovaný výraz, např. "$\ln 0$". V tomto případě lze využít následující větu.

Věta 1.13 (limita složené funkce). Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{y\to b} g(y) = L$ a existuje ryzí okolí $\overline{O}(a)$ takové, že pro $x \in \overline{O}(a)$ je $f(x) \neq b$. Potom $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = L$.

Poznámka 1.34 (substituce v limitě). Věta je vlastně větou o substituci v limitě. Např. v limitě $L = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln\frac{1}{x}$ substituce $y = \frac{1}{x}$ vede na limitu $L = \lim\limits_{y\to\infty} \ln y$ (protože $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$) a odsud dostáváme $L = \infty$

Příklad 1.13 (limita složené funkce). (i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(\frac{1}{x}) = \text{"}\ln\infty\text{"} = \infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(e^{-x}) = \text{" arctg}\,\infty\text{"} = \frac{\pi}{2}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(\sin x) = \text{" }\ln(0+)\text{"} = -\infty$

Následující věta umožní snadné počítání limity polynomu a racionální funkce v nevlastních bodech.

Věta 1.14 (limita polynomu a racionální funkce v nevlastních bodech)**.** Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$$

Poznámka 1.35 (technická)**.** Limita polynomu stupně alespoň jedna v nevlastních bodech je tedy vždy nevlastní, přičemž o jejím znaménku rozhoduje pouze vedoucí člen. O hodnotě limity podílu dvou polynomů rozhoduje pouze podíl vedoucího člene čitatele a vedoucího člene jmenovatele.

Příklad 1.14 (limita polynomu a lomené funkce v nevlastních bodech)**.**

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}(6x^3 - 2x + 1) = \lim\limits_{x\to\infty} 6x^3 = 6.(\infty)^3 = \infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^5 - 2x^2 + 2) = 3.(-\infty)^5 = -\infty$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2}{2x^3 - 4x^2 + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^5 - 2}{2x^3 - 4x^2 + 1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x^2 = \infty$

1.3 Derivace funkce

Nyní můžeme ve směrnici sečny na grafu funkce (viz strana 15) použít limitní přechod $h \to 0$, čímž dostaneme směrnici tečny. Tuto veličinu představujeme v následující definici.

Definice 1.23 (derivace funkce v bodě)**.** Nechť $x \in D(f)$. Řekneme, že funkce f má *v bodě x derivaci* rovnu číslu označenému $\boldsymbol{f'(x)}$, jestliže existuje konečná limita

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1.8}$$

Poznámka 1.36 (jednostranné derivace)**.** Podobně definujeme i derivaci zprava a derivaci zleva. Požíváme při tom limitu zprava a zleva místo oboustranné limity (1.8).

Definice 1.24 (derivace funkce)**.** Nechť má funkce f derivaci v každém bodě otevřeného intervalu I. Předpisem, který každému bodu x z intervalu I přiřadí derivaci funkce f v bodě x je definována funkce, kterou nazýváme *derivací funkce f* na intervalu I a označujeme $\boldsymbol{f'}$.

Definice 1.25 (vyšší derivace)**.** Buď $f(x)$ funkce a $f'(x)$ její derivace. Existuje-li derivace $(f'(x))'$ funkce $f'(x)$, nazýváme ji *druhou derivací* funkce $f(x)$ a označujeme $\boldsymbol{f''(x)}$. n-násobným opakováním tohoto postupu dospíváme k n-té derivaci funkce $f(x)$, kterou označujeme $\boldsymbol{f^{(n)}(x)}$.

Poznámka 1.37 (geometrický význam derivace)**.** Z definice derivace plyne, že se jedná přesně o tu veličinu, udávající rychlost růstu funkce, kterou jsme začali hledat v motivaci na straně 15. Geometrický význam derivace je následující: nakreslíme-li sečnu ke grafu funkce f procházející body $[x, f(x)]$ a $[x+h, f(x+h)]$ (viz obrázek 1.1, strana 17), je směrnice této sečny $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Fixujeme-li bod $[x, f(x)]$ a s bodem $(x + h)$ se k bodu x blížíme (tj. provádíme-li limitní přechod

"$\lim\limits_{h\to 0}$"), přejde sečna v tečnu v bodě $[x, f(x)]$. Limitní hodnota, tj. směrnice tečny, je potom rovna derivaci $f'(x)$.
Graf funkce má tedy v pevném bodě a tečnu právě tehdy, když funkce f má v bodě a derivaci. Body, kde funkce nemá derivaci, mohou být body, kde je limita (1.8) nevlastní (funkce má svislou tečnu), body kde existují jednostranné derivace (tečny zleva i zprava existují) ale tyto jsou různé (např. funkce $y = |x|$) a konečně body, kde neexistuje některá z jednostranných derivací.

Poznámka 1.38 (rovnice tečny)**.** Má-li funkce f v bodě a derivaci, je rovnice tečny ke grafu funkce v tomto bodě

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Poznámka 1.39 (praktický význam derivace)**.** Nechť veličina x označuje čas, měřený ve vhodných jednotkách, a nechť veličina y se mění v průběhu času, tj. $y = y(x)$. Derivace $y'(x)$ poté značí okamžitou rychlost, s níž dochází ke změně velikosti veličiny y v čase x. Značí-li např. $y(x)$ polohu pohybujícího se tělesa v čase x, je derivace $y'(x)$ rovna okamžité rychlosti tohoto tělesa (pojem rychlost užíváme ve fyzikálním smyslu tohoto slova). Značí-li veličina y velikost populace určitého živočišného druhu v čase x, značí derivace $y'(x)$ rychlost nárůstu této populace, tj. počet živočichů, který se v daném okamžiku narodil (za časovou jednotku), zmenšený o počet živočichů, který v daném okamžiku uhynul.

Věta 1.15 (souvislost derivace a spojitosti)**.** Má-li funkce v bodě (na intervalu I) derivaci, je v tomto bodě (na tomto intervalu) spojitá.

Poznámka 1.40. Opačná věta neplatí, ze spojitosti funkce obecně neplyne existence derivace. Příkladem budiž funkce $y = |x|$ v bodě $x = 0$.

Označení. Množinu všech funkcí které mají na intervalu I spojitou derivaci označujeme $C^1(I)$. Tyto funkce zpravidla nazýváme *hladké funkce*. Množinu všech funkcí které mají na intervalu I spojité všechny derivace až do řádu k včetně označujeme $C^k(I)$.

Poznámka 1.41 (filozofická)**.** Dlouho přetrvával názor, že spojitá funkce je funkce, jejíž graf lze nakreslit "jedním tahem". Kreslíme-li graf takovéto funkce, znamená to, že když při kreslení posunujeme "pisátko" nějakým směrem. Takto kreslíme graf funkce, která má tečnu (a tedy i derivaci), případně čáru "zalomíme". Těchto zalomení může být konečně mnoho, proto se věřilo, že spojité funkce mají derivaci všude, s případnou výjimkou konečného počtu bodů. To, že taková představa je nesprávná, ukázal B. Bolzano, který zkonstruoval funkci spojitou na $\mathbb{R}$, která nemá v žádném bodě derivaci. Graf takovéto funkce podle výše uvedeného nelze nakreslit. Tento příklad ukazuje, že představa spojité funkce pouze jako funkce, jejíž graf lze nakreslit jedním tahem je nesprávná.

Poznámka 1.42 (k označení)**.** Je-li funkce f ve tvaru $y = f(x)$, píšeme místo $f'(x)$ také $y'(x)$, nebo stručněji y'. V přírodních a technických vědách se často setkáváme ještě s následujícím ekvivalentním značením derivace $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Přitom výrazy $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ (které jsou v derivaci formálně "v podílu") se nazývají *diferenciály*. Je-li nezávislou proměnnou čas, označujeme jej zpravidla t namísto x a derivaci v tomto případě značíme tečkou takto: $\dot{y}$

Věta 1.16 (pravidla pro počítání s derivacemi)**.** Nechť f, g jsou funkce a $c \in \mathbb{R}$ konstanta. Platí

$$[cf(x)]' = cf'(x) \tag{1.9}$$
$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x) \tag{1.10}$$
$$[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \tag{1.11}$$
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, \tag{1.12}$$

přičemž derivace vlevo existují, existují-li derivace vpravo, a je-li výraz vpravo definován (tj. není nula ve jmenovateli zlomku).

Příklad 1.15 (aplikace předchozí věty).

$$\left[\frac{xe^x}{x+1}\right]' = \frac{(xe^x)'(x+1)-(x+1)'xe^x}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(e^x+xe^x)(x+1)-1xe^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x(x^2+x+1)}{(x+1)^2}$$

Poznámka 1.43 (technická). Protože derivace součtu je jednodušší než derivace součinu a podílu, snažíme se součin nebo podíl rozdělit (pokud to lze) na součet jednodušších výrazů.

(i) $[(x+1)(x-2)]' = (x^2-x-2)' = 2x-1$

(ii) $\left(\dfrac{x^3-x+1}{4x}\right)' = \dfrac{1}{4}(x^2-1+x^{-1})' = \dfrac{1}{4}(2x-x^{-2})$

Věta 1.17 (derivace složené funkce, řetězové pravidlo). Platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x), \tag{1.13}$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Poznámka 1.44. Výraz $f'(g(x))$ v předchozí větě znamená derivaci funkce f vypočtenou v bodě $g(x)$.

Příklad 1.16 (derivace složené funkce). (i) $(\ln(\sin x))' = \dfrac{1}{\sin x}\cos x$

(ii) $(\ln(x\sin x))' = \dfrac{1}{x\sin x}(\sin x + x\cos x)$

(iii) $\Big(\ln\big(x\sin^2(2x)\big)\Big)' = \dfrac{1}{x\sin^2(2x)}[1.\sin^2(2x) + x.2\sin(2x)\cos(2x)2]$

Následující věta nám umožní ve většině případů výpočet limit typu „$\dfrac{0}{0}$" a „$\dfrac{\infty}{\infty}$".

Věta 1.18 (l'Hospitalovo pravidlo). Nechť $a \in \mathbb{R}^*$a nechť funkce fa g jsou definovány v nějakém ryzím okolí bodu a a mají zde derivaci. Nechť dále platí buď $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, nebo $|\lim\limits_{x\to a} g(x)| = \infty$. Platí

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{1.14}$$

pokud limita na pravé straně rovnosti (1.14) existuje. Totéž platí i pro obě jednostranné limity.

Poznámka 1.45 (k použití l'Hospitalova pravidla). Pokud limita vpravo ve vzorci (1.14) neexistuje, nemůžeme ještě nic říci o limitě $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$. Tato limita může nebo nemusí existovat. Pokud limita vpravo neexistuje, případně pokud pokus o použití l'Hospitalova pravidla nevede ke zjednodušení, musíme hledat pro výpočet limity jinou cestu. Poznamenejme ještě, že l'Hospitalovo pravidlo lze použít libovolně-krát za sebou. Potom z existence poslední limity vyplývá existence všech limit předchozích.

Příklad 1.17. Vypočtěte limity $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$ a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x+x-2e^x+2}{x^3}$.

Řešení.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3(1+x^2)}=-\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{xe^x+x-2e^x+2}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x+1-2e^x}{3x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^x+xe^x-2e^x}{6x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{6}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

1.4 Průběh funkce

Jak jsem viděli výše, spojitost *není* definována, tak, jak si spojitou funkci běžně představujeme – jako funkci, kde nejsou skoky či nějaké podobné drastické změny funkčních hodnot, ale jako funkci, kde veškeré změny funkčních hodnot probíhají relativně pozvolna. Přesná definice však byla zcela odlišná od této představy.
Je tedy definice spojitosti pomocí limity přesně to, co si "běžně" představujeme pod pojmem "spojitá čára v rovině" (funkce, kde nejsou žádné "dramatické změny")?
Odpověď je poněkud překvapivá: Ne zcela. Český matematik B. Bolzano našel příklad funkce, která je spojitá na $\mathbb{R}$, ale její graf se vůbec nedá nakreslit a proto se při studiu spojitých funkcí nelze v důkazech odvolávat na "zřejmé vlastnosti rovinných křivek". Naštěstí, i když definujeme spojitost na první pohled složitě pomocí limity, ty nejpěknější vlastnosti zůstanou zachovány, jak ukazují následující důležité věty.

Věta 1.19 (Weierstrassova věta)**.** Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$. Potom je na tomto intervalu ohraničená a nabývá zde své největší a nejmenší hodnoty, tj. existují čísla $x_1, x_2 \in [a,b]$ s vlastností $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ pro všechna $x \in [a,b]$.

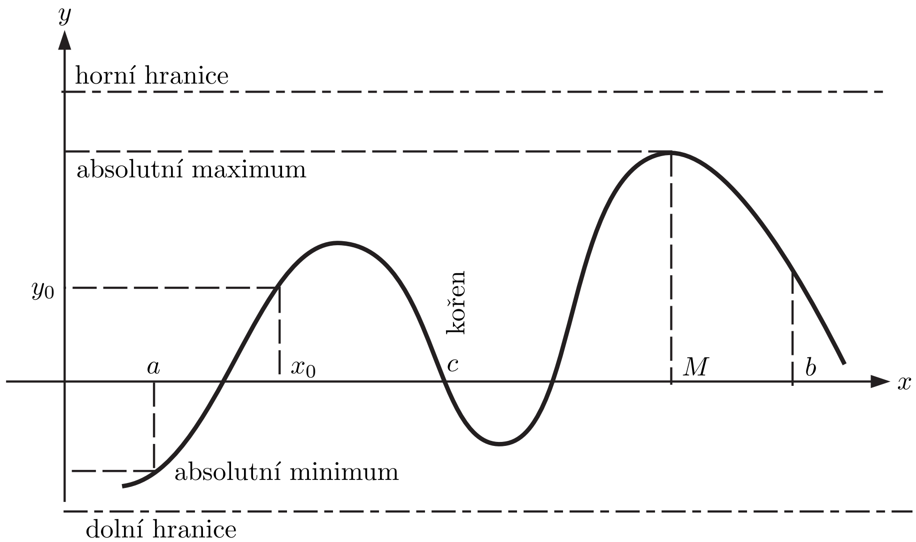
Věta 1.20 (první Bolzanova věta)**.** Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$ a platí $f(a).f(b) < 0$ (tj. $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znaménka). Pak funkce $f(x)$ má na intervalu (a,b) nulový bod, tj. existuje číslo $c \in (a,b)$ s vlastností $f(c) = 0$.

Věta 1.21 (druhá Bolzanova věta)**.** Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$. Potom nabývá všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou.

Poznámka 1.46. Předešlé věty mají jednoduchou grafickou interpretaci, jak je ukázáno na Obrázku 1.6.

- Funkce na obrázku je ohraničená na $[a,b]$, její graf leží mezi čerchovanými čarami.
- Funkce má absolutní minimum na intervalu $[a,b]$ v krajním bodě $x = a$ a absolutní maximum v bodě $x = M$. Příslušné funkční hodnoty jsou na ose y.
- Funkce mění znaménko na intervalu $[a,b]$, platí $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$. Jeden z kořenů, o kterých mluví první Bolzanova věta, je na obrázku označen symbolem c.
- Hodnota y_0 leží mezi maximální a minimální funkční hodnotou. Existuje tedy, podle druhé Bolzanovy věty, $x_0 \in [a,b]$ takové, že $f(x_0) = y_0$. Jeden z bodů s touto vlastností je vyznačen na obrázku.

Tvrzení vět jsou tedy zcela přirozená. Obrovskou zásluhou výše uvedených matematiků je mimo jiné fakt, že si uvědomili, že tyto věty nejsou žádnými snadnými důsledky definice spojitosti a je potřeba podat jejich přesný důkaz.



Obrázek 1.6: Funkce spojitá na $[a, b]$.

Poznámka 1.47 (nelineární nerovnice)**.** Bolzanova věta umožňuje řešit většinu nelineárních nerovnic. Podle Věty 1.20 totiž funkce může změnit znaménko jedině v bodě, kde je porušena její spojitost (= skokem), nebo v nulovém bodě (= graf protíná osu x). Řešíme-li tedy nerovnici $f(x) > 0$, nalezneme nejprve body nespojitosti funkce f a nulové body této funkce, tj. řešení rovnice $f(x) = 0$. Obě skupiny bodů vyneseme na reálnou osu a definiční obor se tímto rozpadne na několik podintervalů. Uvnitř každého z těchto intervalů platí buď $f(x) > 0$ nebo $f(x) < 0$. Která z těchto variant platí ve kterém z intervalů lze zjistit například postupným dosazováním reprezentantů z jednotlivých intervalů.

Definice 1.26 (lokální extrém)**.** Buď f funkce a $x_0 \in D(f)$.

- Řekneme, že funkce má v bodě x_0 *lokální maximum*, jestliže existuje ryzí okolí $\overline{O}(x_0)$, takové, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro všechna $x \in \overline{O}(x_0)$. Je-li nerovnost ostrá, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *ostré lokální maximum*.
- Platí-li opačné nerovnosti, říkáme, že funkce má v bodě x_0 *lokální minimum* a *ostré lokální minimum*.
- Lokální maximum a minimum nazýváme společným názvem *lokální extrémy*. Ostré lokální maximum a ostré lokální minimum nazýváme společným názvem *ostré lokální extrémy*.

Poznámka 1.48 (k předchozí definici)**.** Funkce má v bodě x_0 ostré lokální maximum (minimum), jestliže v nějakém ryzím okolí bodu x_0 nabývá pouze nižších (vyšších) funkčních hodnot, než $f(x_0)$. Hodnota $f(x_0)$ je tedy jediná nejvyšší (nejnižší) funkční hodnota v nějakém okolí bodu x_0. Okolí bodu x_0 z předchozí definice musí nutně celé ležet v definičním oboru funkce f. (V některé literatuře je tato podmínka poněkud oslabena. Např. u funkce $y = \sqrt{x}$ nemluvíme o lokálním minimum v bodě 0, protože nalevo od bodu 0 vůbec není definována. Jiní autoři tento bod však za lokální extrém považují.)

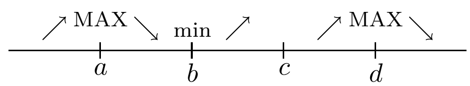
Lokální extrémy úzce souvisí s monotonií, jak ukazuje následující věta.

Věta 1.22 (postačující podmínky pro existenci a neexistenci lokálních extrémů)**.** Buď f funkce definovaná a spojitá v nějakém okolí bodu x_0.

- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce rostoucí a pravé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce klesající, je bod x_0 bodem ostrého lokálního maxima funkce f.

- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce klesající a pravé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce rostoucí, je bod x_0 bodem ostrého lokálního minima funkce f.
- Jestliže existuje okolí bodu x_0 ve kterém je funkce ryze monotonní, lokální extrém v bodě x_0 nenastává.

Poznámka 1.49. Graficky můžeme předchozí větu ilustrovat následovně.



Poznámka 1.50 (absolutní extrémy funkce)**.** Uvažujme funkci, která je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Podle Weierstrassovy věty tato funkce nabývá na intervalu $[a, b]$ své nejmenší a největší hodnoty. Tyto hodnoty nazýváme *absolutní maximum* a *absolutní minimum* funkce f na intervalu $[a, b]$. Je zřejmé (odkud?), že těchto extremálních hodnot může funkce nabývat pouze v bodech, ve kterých má lokální extrémy, nebo v některém z krajních bodů intervalu $[a, b]$.

Definice 1.27 (konvexnost, konkávnost)**.** Buď f funkce mající derivaci v bodě x_0. Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 *konvexní (konkávní)*, jestliže existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \overline{O}(x_0)$ leží body grafu funkce nad tečnou (pod tečnou) ke grafu funkce f sestrojenou v bodě x_0, tj. platí

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \Big(f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\Big). \tag{1.15}$$

Řekneme, že funkce je *konvexní (konkávní) na otevřeném intervalu I*, má-li tuto vlastnost v každém bodě intervalu I.

Definice 1.28 (inflexní bod)**.** Bod ve kterém se mění charakter funkce z konvexní na konkávní nebo naopak nazýváme *inflexním bodem* funkce f.

V následujících větách si ukážeme, že monotonie a lokální extrémy úzce souvisí s první derivací funkce, zatímco konvexnost/konkávnost a inflexní body souvisí s druhou derivací.

Definice 1.29 (stacionární bod)**.** Řekneme, že bod x_0 je *stacionárním bodem* funkce f, jestliže funkce f má v bodě x_0 nulovou derivaci, tj. $f'(x_0) = 0$.

Poznámka 1.51 (geometrický význam)**.** Geometricky jsou stacionární body body, ve kterých má graf funkce vodorovnou tečnu (proč?).

Věta 1.23 (souvislost derivace a lokálních extrémů)**.** Nechť má funkce v bodě x_0 lokální extrém. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá derivaci, nebo je tato derivace nulová, tj. platí $f'(x_0) = 0$ a x_0 je stacionárním bodem funkce f.

Poznámka 1.52 (strategie hledání lokálních extrémů)**.** Podle předchozí věty jsou body kde derivace neexistuje a stacionární body jedinými "podezřelými" kandidáty na body, v nichž by funkce mohla nabývat lokálního extrému. Nikde jinde (a takových bodů bývá naprostá většina) lokální extrém nemůže nastat. Při hledání lokálních extrémů postupujeme tak, že nejprve nalezneme všechny tyto "podezřelé" body (tj. funkci f zderivujeme a zjistíme, kde je tato derivace nulová a kde není definovaná) a poté v každém bodě samostatně rozhodneme, je-li v něm lokální extrém a případně jaký. K tomu nám může posloužit Věta 1.22 ve spojení s následující větou.

Věta 1.24 (souvislost derivace a monotonie)**.** Nechť funkce f má derivaci na otevřeném intervalu I.

- Je-li $f'(x) > 0$ na intervalu I, je funkce f rostoucí na I.
- Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu I, je funkce f klesající na I.

Věta 1.25 (souvislost druhé derivace s konvexností a konkávností)**.** Buď f funkce mající druhou derivaci na otevřeném intervalu I.

- Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu I, je funkce f konvexní na I.
- Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu I, je funkce f konkávní na I.

Definice 1.30 (kritický bod)**.** Bod, ve kterém má funkce f nulovou druhou derivaci nazýváme *kritickým bodem* funkce f.

Věta 1.26 (souvislost inflexních bodů a druhé derivace)**.** Nechť má funkce v bodě x_0 inflexní bod. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá druhou derivaci, nebo je tato druhá derivace nulová, tj. platí $f''(x_0) = 0$ a x_0 je kritickým bodem funkce f.

Věta 1.27 (souvislost druhé derivace s lokálními extrémy)**.** Buď f funkce a x_0 stacionární bod funkce f. Je-li $f''(x_0) > 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního minima, je-li $f''(x_0) < 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního maxima.

Poznámka 1.53 (technická)**.** Předchozí věta nedává odpověď na otázku zda a jaký lokální extrém nastává ve stacionárním bodě, který je současně i kritickým bodem. V tomto případě totiž nelze o existenci a kvalitě lokálního extrému pomocí druhé derivace rozhodnout. Proto je lepší při hledání lokálních extrémů využívat Věty 1.22 a 1.24.

Jak je patrné z předchozího, pomocí první a druhé derivace dokážeme získat určité informace o chování funkce v bodech, patřících do definičního oboru. Naopak o chování funkce v okolí bodů, které *nepatří* do definičního oboru funkce nás informují asymptoty.

1.5 Sestrojení grafu funkce

Diferenciální počet můžeme použít pro sestrojování grafu funkce pomocí charakteristických bodů. Mezi tyto charakteristické body počítáme především průsečíky s osami, lokální extrémy a inflexní body. Dále vyšetřujeme asymptoty ke grafu funkce. Postup může být například následující.

(i) Nalezneme definiční obor funkce, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami. Pomocí průsečíků s osou x a pomocí definičního oboru určíme intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.

(ii) Podle toho jak vypadá definiční obor zjistíme, jaké by funkce mohla mít asymptoty. Tyto asymptoty určíme. Má-li funkce body nespojitosti, vyšetříme chování funkce v okolí těchto bodů.

(iii) Pomocí první derivace určíme stacionární body, intervaly růstu a klesání a lokální extrémy. Přitom kontrolujeme, jestli výpočty souhlasí s tím co už známe — z asymptot bez směrnice nebo z průsečíků s osou x a ze znaménka napravo a nalevo od těchto průsečíků známe charakter monotonie v okolí bodů nespojitosti a v průsečících s osou x.

(iv) Pomocí druhé derivace určíme kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body. Přitom kontrolujeme, zda výpočty souhlasí s tím, co již známe — všímáme si okolí bodů nespojitosti a lokálních extrémů (v lok. minimu je funkce konvexní a v lok. maximu konkávní).

(v) Vyneseme asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) do kartézské soustavy souřadnic a načrtneme graf. Aby byly z grafu patrné všechny "charakteristické body", nemusíme přitom vždy trvat na stejném měřítku na obou osách.

V některých případech je provedení některé z popsaných částí obtížné, případně analyticky neřešitelné. V těchto případech se snažíme graf načrtnout jenom podle těch informací, které dokážeme získat. Vždy se snažíme alespoň o nalezení intervalů růstu a klesání funkce a o vyšetření limit v bodech nespojitosti a v nevlastních bodech.

1.6 Limita, spojitost a derivace

Již při budování diferenciálního počtu si matematici (a především přírodovědci) všimli, že definice spojitosti funkce pomocí limity se ocitla velmi daleko od názorné představy spojité funkce jako křivky, jejíž graf lze nakreslit jedním tahem. Nyní nám jde o to ujasnit si, jaký je mezi těmito dvěma přístupy rozdíl a co mají společného.
V technické praxi zpravidla studujeme tzv. *po částech hladké funkce* — funkce, jejichž definičním oborem je interval a tyto funkce mají derivaci ve všech bodech svého definičního oboru, s případnou výjimkou konečného počtu bodů. Toto vyplývá z faktu, že většinu přírodních zákonitostí popisujeme diferenciálními rovnicemi a řešení těchto rovnic (tj. funkce které dále studujeme) zcela přirozeně mají derivaci na intervalech, kde jsou definovány. Grafy takovýchto funkcí mají v každém svém bodě tečnu (tudíž jsou "hladké") a lze je snadno nakreslit. Potom lze vyslovit následující

- Máme-li nakreslený graf po částech hladké funkce f, lze při názorném přiblížení a studiu pojmu *limita* použít představu bodu pohybujícího se po grafu funkce — představu, která matematiky vedla k zavedení limit.
- Funkce je spojitá v bodě, kde má derivaci. Protože po částech hladké funkce mají derivaci v každém bodě, s případnou výjimkou konečného počtu bodů, znamená to, že body nespojitosti a body, kde funkce nemá derivaci budou spíše výjimečnými body definičního oboru. V naprosté většině bodů bude funkce spojitá a diferencovatelná.

Jestliže si uvědomíme tyto souvislosti, lze body nespojitosti klasifikovat do několika málo skupin

(i) Funkce má v bodě a konečnou limitu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, není však v bodě a definována, nebo je funkční hodnota $f(a)$ různá od L. Tento typ nespojitosti je nejméně nepříjemný. Často jej nazýváme *odstranitelná nespojitost*, protože malou změnou funkce f (pouze předefinováním jediné funkční hodnoty $f(a)$) lze z funkce f učinit funkci spojitou.

(ii) Funkce f má v bodě a limitu, ta je však nevlastní.

(iii) Funkce nemá v bodě a limitu, má zde však alespoň obě jednostranné limity (vlastní nebo nevlastní). V tomto případě má funkce v bodě a tzv. *skok* (konečný nebo nekonečný). V případě, že některá z jednostranných limit je vlastní, může být funkce v tomto bodě nanejvýš jednostranně spojitá (zleva nebo zprava).

(iv) Funkce nemá v bodě a ani některou z jednostranných limit. Znamená to, že pohybujeme-li se s bodem po grafu funkce f tak, aby se x-ová souřadnice bodu blížila k hodnotě a, hodnoty y-ových souřadnic se žádným způsobem neustálí. Znamená to, že funkce má v okolí bodu a velice komplikovaný průběh, zpravidla je velice rozkmitaná.

S výjimkou prvního typu, žádný z dalších vyjmenovaných typů nespojitosti nelze odstranit vhodným předefinováním $f(a)$, proto se nazývají *podstatné nespojitosti.* Podobně u funkcí které jsou po částech hladké lze charakterizovat body kde neexistuje derivace do několika málo typů. Nejdříve však připomeňme, že má-li funkce v nějakém bodě derivaci, pak je v tomto bodě spojitá. V bodě kde funkce není spojitá tedy derivace být nemůže. Budeme si tedy všímat bodů, kde funkce nemá v některém bodě derivaci, ale je v tomto bodě spojitá. Funkce má v bodě x derivaci, jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{1.16}$$

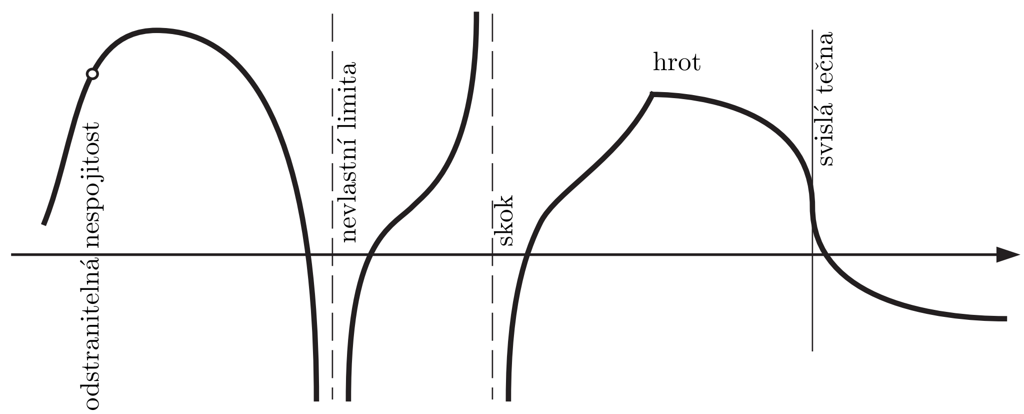
Případy, kdy tato derivace neexistuje jsou tedy následující:

(i) limita (1.16) je nevlastní, graf má tedy v tomto bodě *svislou tečnu*

(ii) limita (1.16) neexistuje, existují však jednostranné limity. Graf má tečnu zleva a tečnu zprava, tyto jsou však různé — graf má *hrot.*

(iii) limita (1.16) neexistuje, neexistuje ani jednostranná limita, graf nemá ani jednostrannou tečnu. Podobně jako v případě neexistence jednostranné limity to znamená že graf je v okolí bodu a rozkmitaný a velice komplikovaný.

Tímto je klasifikace jednotlivých možností ukončena. Z předchozích příkladů vidíme, že body, kde funkce nemá buď limitu, nebo není spojitá, nebo nemá derivaci, jsou body, kde je funkce jistým způsobem "škaredá" — zřetelně se odchyluje od představy grafu hladké křivky spojitě nakreslené jedním tahem.



Obrázek 1.7: Typy bodů nespojitosti a bodů bez derivace.

Poznamenejme, že situace je mnohem komplikovanější v případech, kdy nestudujeme po částech hladké funkce, ale obecně libovolné funkce. V tomto případě lze podat příklady funkcí, které se zcela vymykají běžnému chápání spojitosti funkce, např je možné nalézt

(i) funkci f definovanou na $\mathbb{R}$, která nemá limitu v žádném bodě, dokonce ani jednostrannou (Dirichletova funkce)

(ii) funkci f definovanou na $\mathbb{R}$, která je spojitá v bodech s iracionální hodnotou x a nespojitá v bodech s racionální hodnotou x (Riemannova funkce)

(iii) funkci f definovanou na $\mathbb{R}$, která však má jediný bod, ve kterém je spojitá (případně konečně mnoho bodů kde je spojitá), nebo jediný bod, kde má derivaci.

(iv) funkci f definovanou a spojitou na $\mathbb{R}$, která však nemá derivaci v žádném bodě, tj. v každém bodě má hrot (Weierstrassova funkce $y = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n |\sin(4^n x)|$, Bolzanova funkce)

(v) funkci f definovanou a spojitou na $\mathbb{R}$, která však nemá derivaci v žádném bodě, a to ani jednostrannou. Má tedy v každém bodě rozkmitanou tečnu (podobně jako např. funkce $y = x \sin \frac{1}{x}$ v bodě $x = 0$).

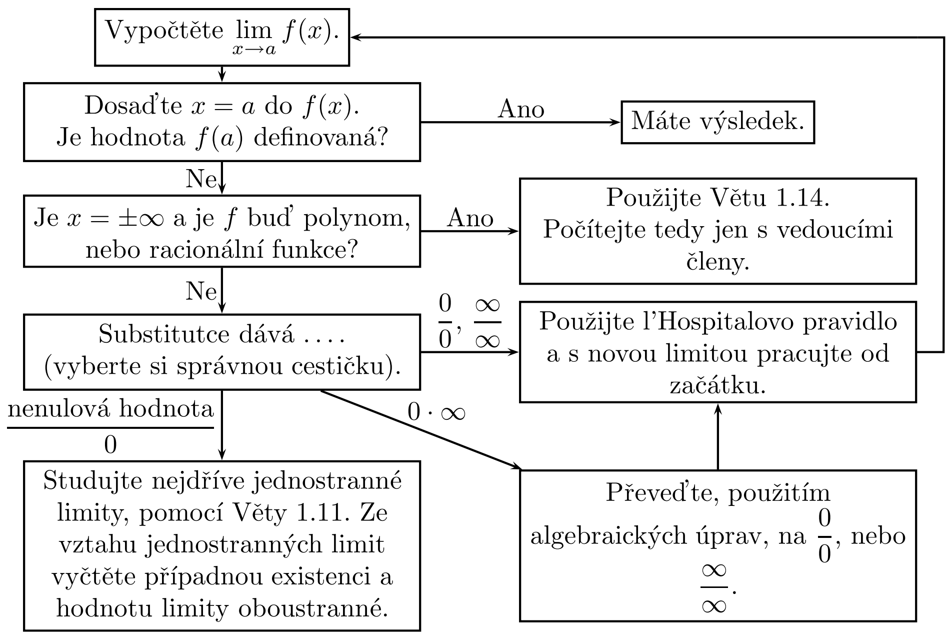
U těchto typů funkcí jakákoliv geometrická představa selhává, jsou "škaredé" ve všech bodech svého definičního oboru, grafy těchto funkcí nelze zachytit grafickými prostředky. Protože však tyto funkce zcela nezpochybnitelně také patří do matematické analýzy (některé z nich mají dokonce použití v některých speciálních aplikacích, např. tzv. "bílý šum"), je zřejmé, že při studiu funkcí se nelze opírat pouze o představu studia spojitě nakreslených křivek, ale je nutno použít některý ze způsobů, který nezávisí na konkrétní představě funkce. Proto jsme použili definice založené na pojmech okolí a limita.

1.7 Shrnutí

Funkce jsou matematickým vyjádřením vztahů mezi veličinami. Při studiu funkcí se opíráme

- o *elementární matematiku*, která nám umožní výpočet funkčních hodnot, nalézt definiční obor funkce, ověřit její sudost nebo lichost a v některých případech řešit nelineární rovnice a nerovnice (logaritmické, exponenciální, goniometrické a pod.) a dále
- o *diferenciální počet*, který nám dává pomocí derivace informaci o chování funkce na definičním oboru (růst, klesání, spojitost, lok. extrémy, konvexnost, konkávnost atd.) a pomocí asymptot informaci o chování funkce v krajních bodech definičního oboru. Základním pojmem, který umožňuje tento aparát vybudovat, je pojem *limita funkce*. Prakticky výpočet limity provádíme u spojitých funkcí dosazením, u nespojitých je možné použít Věty 1.16 pro počítání s limitami a v některých případech l'Hospitalovo pravidlo. Limity u polynomů a racionálních funkcí v bodech nespojitosti a v nevlastních bodech lze počítat pomocí Vět 1.11 a 1.14. V případech jednoduchých funkcí poznáme limitu (ve vlastním i nevlastním bodě) z obrázku.

Abychom mohli výše uvedené informace z funkce najít a použít, ukázali jsme si, které jednotlivé pojmy spolu souvisí a jak, např. z existence derivace plyne spojitost, nikoliv však naopak.
Podstatné v aplikacích jsou zejména spojité funkce. Při studiu spojitých funkcí mají velký význam Bolzanovy a Weierstsrassovy věty, které jsou geometricky velice názorné a ukazují, že i když je spojitost funkcí definována podstatně méně názorně, než jako funkce nakreslitelná jedním tahem, zachovávají se pro tyto funkce vlastnosti "běžné" pro hladké rovinné křivky.
Z teoretického hlediska jsou nejdůležitější pojmy této kapitoly *limita*, *spojitost* a *derivace*. Spojitost je vlastnost těch funkcí, u nichž malá změna nezávislé proměnné vyvolá relativně malou změnu proměnné závislé. Derivace je (poněkud jemněji) veličina, která se vyjadřuje poměr těchto změn – udává kolikrát rychleji se mění hodnoty y ve srovnání s hodnotami x. Nejdůležitější aplikací je *vyšetřování průběhu* funkce, zejména pak nalezení *lokálních extrémů* funkce.
Někdy mají studenti potíže rozpoznat, kterou metodu je třeba použít pro výpočet limit. Následující rozhodovací strom umožňuje vybrat tu správnou metodu či tu spávnou větou, kterou je nejvhodnější použít. Tento diagram pokrývá pouze typy limit, které jsme probírali na přednášce. Setkáte-li se s limitou, kterou nelze do tohoto schematu zařadit, můžete se pokusit odhadnout hodnotu limity numerickým experimentem, výpočtem funkčních hodnot v okolí zkoumaného bodu.



Obrázek 1.8: Limity elementárních funkcí.

Kapitola 2

Základní numerické metody

V této kapitole si uvedeme některé standardní postupy tzv. numerické matematiky

2.1 Algebraické rovnice

Definice 2.1 (algebraická rovnice)**.** Buď n přirozené číslo a

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \tag{2.1}$$

polynom stupně n s reálnými koeficienty a_0, a_1, $\ldots a_n$, kde $a_0 \neq 0$. Koeficient a_0 se nazýváme *vedoucí koeficient polynomu* $P_n(x)$ a koeficient a_n *absolutní člen polynomu* $P_n(x)$. Člen a_0x^n nazýváme *vedoucí člen polynomu* $P_n(x)$. *Algebraickou rovnicí stupně* n rozumíme rovnici tvaru $P_n(x) = 0$, tj.

$$\boldsymbol{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0} \tag{2.2}$$

Poznámka 2.1 (nejjednodušší polynomy)**.** Polynom nultého stupně je konstantní funkce. Polynom prvního stupně nazýváme *lineární polynom* a jeho grafem je přímka (k sestrojení grafu nám tedy stačí znát dva body, které na grafu leží). Polynom druhého stupně nazýváme *kvadratický polynom*, jeho grafem je parabola. Polynom třetího stupně nazýváme *kubický polynom*, jeho grafem je kubická parabola.

Definice 2.2 (kořen polynomu, řešení algebraické rovnice)**.** *Řešením (kořenem)* algebraické rovnice (2.2) (*kořenem polynomu* (2.1)) rozumíme číslo c, splňující $P_n(c) = 0$, tj. splňující po dosazení za x rovnost (2.2).

Příklad 2.1. Čísla $x = 1$ a $x = -2$ jsou kořeny polynomu

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2. \tag{2.3}$$

Vskutku, přímým výpočtem lze ověřit, že $P(1) = 0$ a $P(-2) = 0$. Číslo $x = 3$ naopak není kořenem tohoto polynomu, protože $P(3) = 40 \neq 0$.

O řešitelnosti algebraických rovnic vypovídá následující věta.

Věta 2.1 (základní věta algebry)**.** V oboru komplexních čísel má každý polynom kořen.

Následující věta udává jednu z ekvivalentních formulací definice kořene polynomu.

Věta 2.2 (Bezoutova věta)**.** Číslo c je kořenem polynomu (2.1) právě tehdy, když existuje polynom $Q_{n-1}(x)$ stupně $(n-1)$ s vlastností

$$P_n(x) = (x - c)Q_{n-1}(x). \tag{2.4}$$

Definice 2.3 (kořenový činitel)**.** Je-li c kořenem polynomu (2.1), pak lineární polynom $(x - c)$ s proměnnou x nazýváme *kořenový činitel příslušný ke kořeni* c.

Příklad 2.2. Polynom (2.3) může být zapsán v následujících ekvivalentních tvarech

$$y = (x-1)(x^2+3x+2), \quad y = (x+2)(x^2-1), \quad y = (x-1)(x+1)(x+2).$$

Čtenář může snadno zkontrolovat ekvivalentnost těchto vyjádření roznásobením závorek a sečtením odpovídajících mocnin.

Poznámka 2.2 (dělení kořenovým činitelem)**.** Bezoutova věta tedy říká, že polynom lze *beze zbytku* vydělit kořenovým činitelem. Toto dělení polynomu je vhodné provádět pomocí *Hornerova schematu.* Toto schema nám poslouží současně i při výpočtu funkčních hodnot polynomu, protože vyžaduje menší počet operací násobení, než jaký bychom museli provádět, kdybychom počítali funkční hodnoty přímo z vyjádření (2.1).

Je-li číslo c kořenem polynomu (2.2), může být i kořenem polynomu $Q_{n-1}(x)$ z Bezoutovy věty. Proto má smysl následující definice.

Definice 2.4 (násobnost kořene)**.** Nechť c je kořenem polynomu (2.1). Řekneme že tento kořen je *k-násobný*, jestliže existuje polynom $Q_{n-k}(x)$ stupně $n-k$ takový, že platí

$$\boldsymbol{P_n(x) = (x-c)^k Q_{n-k}(x)} \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{Q_{n-k}(c) \neq 0} \tag{2.5}$$

Věta 2.3. Polynomy $P_n(x)$ a $Q_{n-k}(x)$ z předchozí definice mají stejné kořeny včetně násobnosti, s výjimkou kořene c.

Poznámka 2.3 (technická)**.** Z předchozí věty plyne, že hledáme-li kořeny polynomu $P_n(x)$, je vhodné po nalezení jednoho z nich vydělit polynom $P_n(x)$ kořenovým činitelem příslušným tomuto kořeni "maximálně-možně-krát". Tím zjistíme násobnost kořene (je to číslo, udávající, kolikrát se nám podařilo provést dělení beze zbytku) a obdržíme polynom $Q_{n-k}(x)$ z předchozí definice (je to poslední podíl, který vyšel beze zbytku). Dále budeme hledat kořeny polynomu $Q_{n-k}(x)$. Ten je totiž nižšího stupně a tedy jednodušší.

Pojem násobnosti kořene lze ekvivalentně zavést pomocí derivací polynomu $P(x)$. Tuto ekvivalentní formulaci si uvedeme v následující větě.

Věta 2.4 (souvislost násobnosti kořene s derivací)**.** Číslo c je k-násobným kořenem polynomu (2.1) (rovnice (2.2)) právě tedy, když platí

$$P_n(c) = P_n'(c) = P_n''(c) = \cdots = P_n^{(k-1)}(c) = 0$$

a

$$P_n^{(k)}(c) \neq 0,$$

tj. číslo c je kořenem polynomu $P_n(x)$ a všech jeho derivací do řádu $(k-1)$ včetně a není kořenem derivace řádu k.

Poznámka 2.4 (souvislost násobnosti kořene se změnou znaménka)**.** V bodě, který je kořenem násobnosti alespoň 2 má polynom vždy vodorovnou tečnu. Další vlastnosti se řídí tím, jedná-li se o kořen sudé nebo liché násobnosti.

- V okolí kořene liché násobnosti polynom mění znaménko, je monotonní a jedná-li se o kořen násobnosti alespoň 3, má zde funkce inflexní bod.
- V okolí kořene sudé násobnosti polynom nemění znaménko a má zde lokální extrém.

Opakovaným aplikováním Bezoutovy věty a základní věty algebry dostáváme následující tvrzení.

Věta 2.5 (počet komplexních kořenů)**.** V oboru komplexních čísel má každý polynom (každá algebraická rovnice) stupně n právě n kořenů. Přitom každý kořen počítáme i s jeho násobností.

V praxi nás často zajímají pouze reálné kořeny. Modifikace předchozí věty pro reálné kořeny je následující.

Věta 2.6 (počet reálných kořenů)**.** V oboru reálných čísel má každý polynom (každá algebraická rovnice) stupně n celkem buď n kořenů, nebo o sudý počet méně. Přitom každý kořen počítáme i s jeho násobností.

Poznámka 2.5 (filozofická)**.** Umíme vyřešit libovolnou lineární a kvadratickou rovnici. Lze vyřešit i libovolnou algebraickou rovnici řádu 3 a 4. Není však možné sestrojit algoritmus pro nalezení kořenů rovnice řádu 5 a více! Rovnice vyšších řádů umíme vyřešit jenom v některých speciálních případech. Jsou-li například všechny koeficienty v rovnici celá čísla, umíme (jak si uvedeme níže) nalézt alespoň všechny celočíselné kořeny.

Poznámka 2.6 (technická)**.** Pro řadu úloh v matematice je vhodné umět rozložit polynom na součin polynomů jednodušších. Lze ukázat, že každý polynom lze rozložit na součin, kde jsou jenom kořenové činitele (tj. lineární polynomy tvaru $(x - c)$ u jednoduchých kořenů a tvaru $(x - c)^k$ u k-násobných kořenů) a případně kvadratické výrazy, které nemají reálné kořeny, nebo mocniny těchto kvadratických výrazů — toto však není možné provést bez znalosti kořenů tohoto polynomu. V praxi tedy dokážeme zpravidla rozložit na součin pouze kvadratické polynomy, polynomy které mají celočíselné kořeny, případně polynomy, kde rozklad na součin lze provést postupným vytýkáním.

2.2 Základní numerické metody pro algebraické rovnice

Věta 2.7 (nutná podmínka pro celočíselné kořeny)**.** Nechť všechny koeficienty polynomu (2.1) jsou celá čísla. Je-li $c \in \mathbb{Z}$ kořenem tohoto polynomu, pak je číslo a_n dělitelné číslem c, tj. $c|a_n$.

Poznámka 2.7 (praktický význam předchozí věty)**.** Předchozí věta se týká pouze polynomů s celočíselnými koeficienty a říká, že celočíselným kořenem takového polynomu může být pouze dělitel absolutního člene. Je tedy možné si všechny dělitele vypsat (je-li $a_n \neq 0$, je jich konečně mnoho!) a po řadě je otestovat, např. Hornerovým schematem. Navíc, najdeme-li takový kořen, zjistíme opakovaným dělením současně i jeho násobnost. Je-li dále algebraická rovnice normovaná, tj. $a_0 = 1$, jsou její reálné kořeny pouze celočíselné nebo iracionální.

Kořeny, které nejsou celočíselné, neumíme obecně u polynomu nalézt. Proto si ukážeme některé přibližné metody pro jejich nalezení. Naším úkolem je zjistit (odhadnout) počet reálných kořenů, najít interval ve kterém tyto kořeny leží a kořeny odseparovat, tj. nalézt systém intervalů s takovou vlastností, že každý interval obsahuje právě jeden kořen polynomu.

Věta 2.8 (ohraničenost kořenů)**.** Buďte x_i (pro $i = 1..n$) kořeny (i komplexní) polynomu (2.1) (algebraické rovnice (2.2)). Platí

$$|x_i| < 1 + \frac{A}{|a_0|}, \tag{2.6}$$

kde $A = \max\{|a_i|, i = 1..n\}$.

Příklad 2.3 (odhad velikosti kořenů)**.** Pro kořeny x_i polynomu $P(x) = 2x^6 - x^3 + 4x^2 + x - 6$ platí $|x_i| < 1 + \dfrac{6}{2} = 4$.

Pro odhad počtu reálných kladných kořenů slouží následující věta.

Věta 2.9 (Descartova věta)**.** Počet kladných kořenů polynomu (2.1) (algebraické rovnice (2.2)) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů a_0, a_1, a_2, …, a_n, nebo o sudé číslo menší. Případné koeficienty, které jsou rovny nule, přitom neuvažujeme.

Poznámka 2.8 (jeden z důsledků předchozí věty)**.** Okamžitým důsledkem této věty je následující tvrzení: Polynom, jehož všechny koeficienty jsou nezáporná čísla nemůže mít kladné kořeny.

Příklad 2.4 (počet kladných kořenů)**.** Polynom $P(x) = x^8 - x^5 + x^3 + x^2 - x + 1$ má buď 4 nebo 2 nebo žádný reálný kladný kořen.

Příklad 2.5 (počet kladných kořenů)**.** Polynom $P(x) = 2x^6 - x^3 + 4x^2 + x - 6$ má 3 nebo 1 kladný reálný kořen. Tyto kořeny leží v intervalu $(0, 4)$ — viz Příklad 2.3.

Pro odhad počtu záporných kořenů využijeme toho, že c je záporným kořenem polynomu $P(x)$ právě tehdy, když $-c$ je kladným kořenem polynomu $P(-x)$.

Věta 2.10 (varianta Descartovy věty pro záporné kořeny)**.** Uvažujme pomocný polynom $\tilde{P}(x) = P(-x)$. Koeficienty tohoto polynomu označme $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$, …, $\tilde{a}_n$ Počet záporných kořenů polynomu (2.1) (algebraické rovnice (2.2)) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$, …, $\tilde{a}_n$, nebo o sudé číslo menší. Případné koeficienty, které jsou rovny nule, přitom neuvažujeme.

Příklad 2.6 (počet záporných kořenů)**.** Pro polynom $P(x) = 2x^6 - x^3 + 4x^2 + x - 6$ platí $\tilde{P}(x) = P(-x) = 2x^6 + x^3 + 4x^2 - x - 6$ a polynom $P(x)$ má tedy jediný záporný reálný kořen, tj. má jeden kořen na intervalu $(-4, 0)$ — viz Příklad 2.3.

Poznámka 2.9 (technická)**.** Pomocný polynom $\tilde{P}(x)$ rychle obdržíme z polynomu $P(x)$ uvědomíme-li si, že stačí změnit znaménka u koeficientů polynomu $P(x)$, které přísluší mocninám lichého stupně.

Příklad 2.7 (hledání celočíselných kořenů a rozklad na součin)**.** Nalezněme v oboru celých čísel všechna řešení rovnice

$$x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0.$$

Celočíselnými kořeny mohou být pouze čísla, která dělí číslo 36, tj. ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18 a ±36. Tato čísla postupně vyzkoušíme (i jejich násobností, pokud se bude jednat o kořeny) Hornerovým schematem.

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
-2	1	-1	-3	-3	-18	$\Vert$ 0[1]
-2	1	-3	3	-9	$\Vert$ 0[2]	
-2	1	-5	13	-35[3]		
3	1	0	3	$\Vert$ 0[4]		
-3	1	-3	12			

Poznámky:
[1] $x = -2$ je kořenem násobnosti alespoň jedna. Musíme ověřit násobnost tohoto kořene. Navíc má dále smysl testovat pouze dělitele čísla 18.
[2] $x = -2$ je kořenem násobnost alespoň dva. Zkusíme ověřit, zda se nejedná o kořen násobnosti tři nebo více.
[3] $x = -2$ tedy je kořen násobnosti pouze dva. Pilnější čtenáři si jistě všimli, že tento řádek nebylo nutné psát. Dvojka totiž není dělitelem čísla -9, které je absolutním členem polynomu, který odpovídá poslednímu podtrženému řádku.
[4] $x = 3$ je kořenem násobnosti alespoň jedna. navíc má smysl testovat dále jenom dělitele čísla 3 a jenom záporná čísla, protože dále uvažujeme polynom, který má pouze kladné koeficienty. Z tohoto důvodu nemůže být číslo $x = 3$ násobným kořenem a zbývá pouze číslo -3.
Výsledky: Našli jsme tři celočíselné kořeny $x_{1,2} = -2$ a $x_3 = 3$. Rozklad levé strany rovnice na součin je

$$(x + 2)^2(x - 3)(x^2 + 3) = 0.$$

Odsud lze vidět, že zbylé dva kořeny nejsou reálná čísla, tj. $x_{4,5} \notin \mathbb{R}$ (rovnice $x^2 + 3 = 0$ nemá v oboru reálných čísel řešení).

Poznámka 2.10 (separace kořenů)**.** Další úlohou spojenou s hledáním kořenů algebraické rovnice (polynomu) je separace kořenů – tj. nalezení systému intervalů, které obsahují právě jeden kořen. Separaci kořenů provádíme zpravidla takto:

- Stanovíme interval, ve kterém všechny kořeny leží, například s použitím Věty 2.8.
- Vypočteme funkční hodnoty ve vhodných bodech — obvykle volíme celá čísla z uvažovaného intervalu a lokální extrémy. V každém intervalu typu (m, n), kde funkce mění znaménko (tj. $P(m)P(n) < 0$) leží jeden nebo lichý počet kořenů polynomu $P(x)$. V každém intervalu typu (m, n), kde funkce nemění znaménko (tj. $P(m)P(n) > 0$) neleží žádný, nebo leží sudý počet kořenů polynomu $P(x)$.

V jednoduchých případech (například u rovnic třetího řádu) dokážeme nalézt lokální extrémy polynomu, vyšetřit průběh pomocí první derivace a odtud usuzovat na přesnější odhady počtu a lokalizace kořenů.
V některých případech, obzvláště tehdy, když polynom neobsahuje mnoho členů, lze kořeny odseparovat graficky. Převedeme vhodné členy z levé strany algebraické rovnice na pravou, tak abychom dostali rovnici tvaru $p(x) = q(x)$, kde $p(x)$ a $q(x)$ jsou polynomy, jejichž grafy umíme zakreslit. Po nakreslení obrázku vidíme ihned, kolik mají grafy těchto křivek průsečíků a v kterých intervalech leží. Tyto průsečíky jsou kořeny původního polynomu (řešeními původní algebraické rovnice).

Podaří-li se kořeny polynomu odseparovat, následující metoda umožní nalezení tohoto kořene s libovolnou (předem zvolenou) přesností.
Úmluva. Řekneme, že číslo c je kořenem polynomu (2.1) *s přesností alespoň* ε (*s chybou nejvýše* ε), jestliže se od skutečného kořene polynomu liší nejvíce o hodnotu ε, tj. pokud skutečný kořen leží v intervalu $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. S přesností alespoň ε tedy kořen nalezneme, pokud najdeme interval délky nejvýše 2ε, ve kterém je tento kořen obsažen. Je-li $[a, b]$ interval na kterém polynom $P(x)$ mění znaménko je střed tohoto intervalu kořenem polynomu $P(x)$ s přesností alespoň poloviny délky tohoto intervalu. Tj. vypočteme-li $c = \dfrac{a+b}{2}$ a $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$, je kořen polynomu roven $c \pm \varepsilon$.
V praxi zpravidla chybu ε udáváme na jednu platnou číslici (zaokrouhlujeme pouze nahoru!) a přibližnou hodnotu kořene zaokrouhlujeme na stejný počet desetinných míst. Zaokrouhlujeme-li meze intervalu $[a, b]$, je nutno zaokrouhlovat tak, aby žádné číslo z tohoto intervalu po zaokrouhlení nevypadlo, tj. dolní mez zaokrouhlujeme pouze dolů a horní mez pouze nahoru.
Ke hledání kořenů polynomu, které jsou liché násobnosti, tj. souvisejí se znaménkovou změnou polynomu, lze s výhodou použít *iterační metody*, které zpřesňují postupným prováděním stále stejných kroků interval, ve kterém máme kořen lokalizován. Jedna z nejjednodušších iteračních metod je *metoda půlení intervalu*.

Metoda půlení intervalu. Předpokládejme, že polynom $P(x)$ nabývá v bodech $x = a$ a $x = b$ funkčních hodnot s opačným znaménkem. Metoda půlení intervalu spočívá v tom, že vypočteme funkční hodnotu v bodě $x = c$, který leží v polovině intervalu (a, b), tj. v bodě, pro který platí $c = \dfrac{a+b}{2}$. Pokud platí $P(c) = 0$, získali jsme kořen. Pokud platí $P(c) \neq 0$, potom na jednom z intervalů (a, c) a (c, b) polynom $P(x)$ mění znaménko. Tento interval bude novou (lepší) lokalizací kořene. Od intervalu (a, b) jsme takto přešli k intervalu poloviční délky, tj. snížili jsme maximální chybu na polovinu. Dalším provedením tohoto postupu snížíme maximální velikost chyby opět na polovinu a toto opakujeme tak dlouho, dokud není chyba dostatečně malá.

Příklad 2.8 (metoda půlení intervalu)**.** Nalezněte v oboru reálných čísel kořeny polynomu $P(x) = x^3 + x - 1$ s přesností alespoň $0,03$.
Řešení. Kořeny polynomu leží v intervalu $(-2, 2)$ (viz nerovnost (2.6)). Polynom má jeden kladný kořen (Věta 2.9) a nemá žádný záporný kořen (Věta 2.10). Výpočtem funkčních hodnot v bodech $x = 0$ a $x = 1$ zjistíme, že jediný reálný kořen rovnice leží v intervalu $(0, 1)$. Metodu půlení intervalů zapíšeme do následující tabulky.

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	
0.5	0.625	0.75	$-$	-0.13	$+$	
0.625	0.6875	0.75	$-$	$+0.01$	$+$	0.62
0.625	0.6563	0.6875	$-$	-0.06	$+$	0.0312
0.6563	0.6719	0.6875				0.0156

Kořenem je tedy $x = 0.67 \pm 0.02$, tj. kořen leží v intervalu $(0.65; 0.69)$.

2.3 Taylorův polynom

Motivace. Předpokládejme že je dána funkce f s následujícími vlastnostmi:

- Dokážeme vypočítat funkční hodnotu a hodnotu derivací (až do řádu n) v jistém bodě x_0.
- Nemáme dostatečně efektivní algoritmus na výpočet funkčních hodnot v ostatních bodech $x \neq x_0$.

Pro výpočet funkčních hodnot v bodech v okolí bodu x_0 se budeme snažit funkci aproximovat jednodušší funkcí, v našem případě polynomem stupně n. Nejlepší polynom, který funkci f v okolí bodu x_0 aproximuje je takový polynom, který má s danou funkcí totožné v bodě x_0 derivace až do řádu n. Takový polynom se nazývá Taylorův polynom a nalezneme ho pomocí následující definice.

Definice 2.5 (Taylorův polynom)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$ je přirozené číslo a f funkce, která je definovaná v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a má zde všechny derivace do řádu n včetně. Polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0}{n!}(x - x_0)^n$$

se nazývá *Taylorův polynom* stupně n funkce f v bodě x_0. Bod x_0 se nazývá *střed* Taylorova polynomu.

Poznámka 2.11. Taylorův polynom je jediný polynom stupně n, který má s funkcí f v bodě x_0 společnou funkční hodnotu a hodnotu prvních n derivací. V případě že středem polynomu je $x_0 = 0$ používáme pro Taylorův polynom název *Maclaurinův polynom.*

Věta 2.11 (Taylorova věta)**.** Nechť funkce f má v bodě x_0 a nějakém jeho okolí $O(x_0)$ spojité derivace do řádu $n + 1$, včetně. Pak pro všechna $x \in O(x_0)$ platí

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x),$$

kde $T_n(x)$ je Taylorův polynom funkce f stupně n se středem v bodě x_0 a $R_{n+1}(x)$ je zbytek. Tento zbytek splňuje

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{2.7}$$

kde c je vhodné číslo ležící mezi x a x_0.

Poznámka 2.12 (aproximace a její přesnost)**.** Z vyjádření zbytku (2.7) plyne, že tento zbytek je malý, jestliže

- x je blízko x_0, tj. absolutní hodnota rozdílu $(x - x_0)$ je malá
- n je velké

- $f^{(n+1)}(x)$ je malá v uvažovaném okolí bodu x_0

Jsou-li tyto podmínky splněny, můžeme psát v okolí bodu x_0

$$f(x) \approx T_n(x)$$

a chyba, které se při tom dopustíme bude malá. (Z (2.7) jsme schopni určit maximální hodnotu chyby, které se přitom dopustíme.)

Poznámka 2.13 (aplikační)**.** Taylorův polynom tedy slouží k tomu, abychom jistou funkční závislost aproximovali závislostí polynomickou. Tím se závislost podstatně zjednoduší, protože polynomy jsou jedny z nejjednodušších funkcí. Mějme však na paměti, že polynomická aproximace může být

- vynikající, nebo
- dostatečná pouze pro některá x, nebo dokonce
- tak špatná, že její použití nevede k rozumným výsledkům.

2.4 Lagrangeův interpolační vzorec

Motivace. Polynom n-tého stupně obsahuje $(n+1)$ koeficientů, k jeho jednoznačnému určení je tedy třeba celkem $(n+1)$ podmínek. Lze ukázat, že takovými podmínkami mohou být například funkční hodnoty v $(n+1)$ různých bodech. Zadáme-li tedy k $(n+1)$ různým bodům jejich funkční hodnoty, existuje jediný polynom stupně n, který prochází těmito body. Jde nám nyní o to, jak tento polynom nalézt. Jedna z možných metod je použití tzv. *Lagrangeova interpolačního vzorce*, který je uveden v následující větě.

Věta 2.12 (Lagrangeův interpolační vzorec)**.** Mějme $(n+1)$-prvkovou množinu uspořádaných dvojic $[x_i, y_i]$, $i \in \mathbb{N}_0$, $0 \le i \le n$. Polynom

$$L(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) \tag{2.8}$$

kde

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

splňuje $L(x_i) = y_i$ pro všechna $i \in \mathbb{N}_0$, $0 \le i \le n$.

Definice 2.6 (Lagrangeův polynom)**.** Polynom $L(x)$ z předchozí věty se nazývá *Lagrangeův polynom.* Polynomy $l_i(x)$ z předchozí věty se nazývají *pomocné Lagrangeovy polynomy* (též *malé Lagrangeovy polynomy*). Vzorec (2.8) se nazývá *Lagrangeův interpolační vzorec.*

Při odvozování Lagrangeova polynomu provádíme velké množství operací násobení, kde je možno se dopustit chyby. Proto je vhodné po nalezení a úpravě Lagrangeova polynomu provést zkoušku. Abychom provedli (alespoň orientační) zkoušku, zda máme správně nalezeny malé Lagrangeovy polynomy $l_i(x)$, můžeme využít následující věty.

Věta 2.13. Nechť jsou splněny předpoklady a označení z předchozí věty. Pak platí

$$l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) + \cdots l_n(x) = 1.$$

Poznámka 2.14 (aplikační)**.** Lagrangeův interpolační vzorec tedy slouží k tomu, abychom funkci, jejíž několik funkčních hodnot je zadáno tabulkou, aproximovali polynomem, který je co nejmenšího stupně a v zadaných bodech se jeho funkční hodnoty přesně shodují s hodnotami dané funkce.

Příklad 2.9. Najděte polynom $P(x)$ stupně 3, který splňuje $P(1) = 3$, $P(2) = -2$, $P(-1) = 0$ a $P(0) = 1$.
Řešení: Zapíšeme funkční hodnoty to tabulky.

i	0	1	2	3
x_i	1	2	-1	0
y_i	3	-2	0	1

Podle vzorce (2.8) hledáme polynom ve tvaru

$$P(x) = 3l_0(x) + (-2)l_1(x) + 0l_2(x) + 1l_3(x) = 3l_0(x) - 2l_1(x) + l_3(x).$$

Pomocné Lagrangeovy polynomy jsou

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-2)(x+1)x}{(1-2)(1+1)1} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{-2} \\
&= -\frac{1}{2}(x^3 - x^2 - 2x), \\
l_1(x) &= \frac{(x-1)(x+1)x}{(2-1)(2+1)2} = \frac{x^3 - 1}{6} \\
&= \frac{1}{6}(x^3 - x), \\
l_3(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x+1)}{(0-1)(0-2)(0+1)} = \frac{(x^2-1)(x-2)}{2} \\
&= \frac{1}{2}(x^3 - 2x^2 - x + 2).
\end{aligned}$$

Všimněte si, že nemusíme hledat polynom $l_2(x)$, protože $y_2 = 0$ a polynom $l_2(x)$ je tedy násobený nulou. Lagrangeův interpolační vzorec poté dává

$$\begin{aligned}
P(x) &= -\frac{3}{2}(x^3 - x^2 - 2x) - 2\frac{1}{6}(x^3 - x) + \frac{1}{2}(x^3 - 2x^2 - x - 2) \\
&= x^3\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + x^2\left(\frac{3}{2} - 1\right) + x\left(3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + 1 \\
&= -\frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{17}{6}x + 1.
\end{aligned}$$

Je snadné ověřit, že polynom má vlastnosti požadované v zadání.

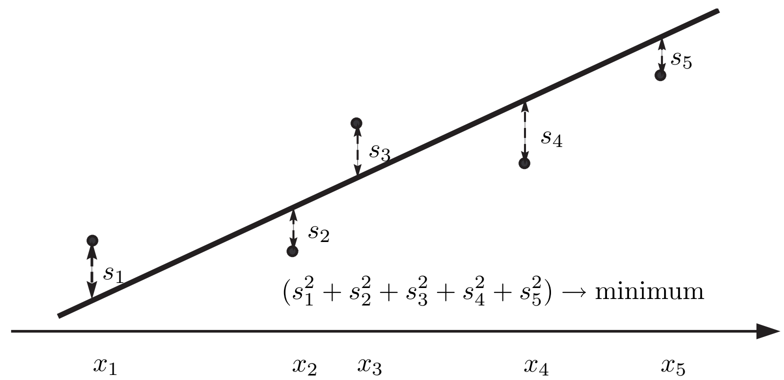
2.5 Metoda nejmenších čtverců

Motivace. Podobně jako v případě Lagrangeova polynomu mějme n prvkový soubor bodů $[x_i, y_i]$ $(i = 1..n)$ v rovině zadaný tabulkou. Jde nám o to nalézt polynom (co nejjednodušší, zpravidla lineární polynom) $y = f(x)$ předem zadaného stupně, který co nejlépe vystihuje chování těchto bodů. Kriterium optimálnosti přitom volíme tak, aby byl součet kvadrátů odchylek y-ových souřadnic bodů x_i (tj. čísel y_i) od funkční hodnoty $f(x_i)$ byl co nejmenší, tj. $\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i)]^2 \to \min$.

Věta 2.14 (prokládání souboru bodů přímkou)**.** Přímka $y = ax + b$ je přímka, proložená metodou nejmenších čtverců souborem bodů $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, …, $[x_n, y_n]$, jestliže pro koeficienty a, b platí

$$\begin{aligned}
a\sum x_i^2 + b\sum x_i &= \sum x_i y_i \\
a\sum x_i + bn &= \sum y_i
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Poznámka 2.15 (technická)**.** Předchozí věta udává přímo i metodu, jak proložit přímku (tj. lineární funkci) souborem bodů. Tato metoda spočívá v tom, že sestavíme soustavu rovnic z předchozí věty a nalezneme její (jediné) řešení. Podobně, avšak s použitím většího počtu rovnic, lze proložit souborem bodů libovolnou polynomickou závislost.



Obrázek 2.1: Přímka proložená metodou nejmenších čtverců

Příklad 2.10. Proložte přímku následujícím souborem bodů.

x_i	0	1	3	5	6
y_i	5	3	3	2	1

Řešení: Body v souboru jsou $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$ a $[6,1]$. Celkem tedy máme pět bodů, tj. $n = 5$.
Výpočty potřebné pro nalezení koeficientů v soustavě (2.9) provedeme v následující tabulce.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3
3	3	3	9	9
4	5	2	25	10
5	6	1	36	6
$\sum$	15	14	71	28

Podle (2.9) sestavíme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 71a + 15b &= 28, \\ 15a + 5b &= 14. \end{aligned}$$

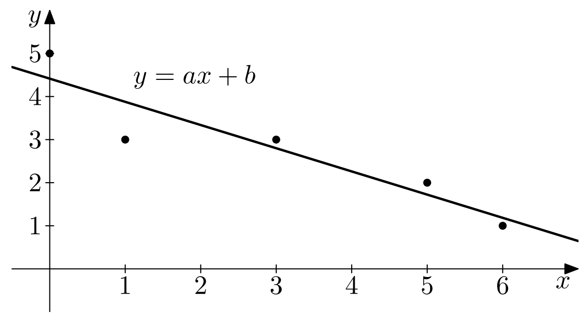
Řešením této soustavy je $a = -\dfrac{7}{13} \doteq -0.538$ a $b = \dfrac{287}{65} \doteq 4.415$. Nejlepší lineární aproximace souboru bodů je tedy přímka

$$y = -0.538x + 4.415.$$

Graf souboru bodů a výsledná přímka jsou zachyceny na obrázku 2.2.

2.6 Shrnutí

Jedněmi z nejjednodušších nelineárních funkcí jsou *polynomy.* I při studiu těchto funkcí však narazíme na řadu netriviálních problémů. Jedním z těchto problémů je nalezení nulových bodů (*kořenů*) polynomu, tj. řešení *algebraické rovnice.* Tento problém je beze zbytku řešitelný, pokud hledáme celočíselné kořeny polynomu s celočíselnými koeficienty. V ostatních případech pro nalezení kořenů používáme *odhady polohy a počtu kořenů*, *separaci kořenů* a *přibližné metody výpočtu kořenů*, z nichž jsme se seznámili s *metodou půlení intervalu.*



Obrázek 2.2: Metoda nejmenších čtverců

Každý kořen polynomu nemusí nutně souviset se znaménkovou změnou v okolí tohoto kořene. Pro pochopení souvislosti mezi kořenem polynomu a touto znaménkovou změnou je nezbytný pojem *násobnosti kořene*.
Nejdůležitější pojmy, týkající se polynomů a algebraických rovnic, jsou tedy: kořen, násobnost kořene, kořenový činitel. Nejdůležitějším algoritmem je metoda půlení intervalů.
Polynomy lze použít v jistých případech i k aproximaci složitější nepolynomické závislosti - v tomto případě používáme *Taylorův polynom*, jehož speciálním případem je *tečná přímka* (Taylorův polynom stupně 1) a jedná se o jednu z dalších aplikací diferenciálního počtu a derivací.
Máme-li soubor hodnot zadaný tabulkou, lze tímto souborem proložit polynom pomocí *Lagrangeova interpolačního vzorce*, nebo přímku pomocí *metody nejmenších čtverců*.

Kapitola 3

Integrální počet

V kapitole věnované diferenciálnímu počtu jsme k funkci našli její derivaci – veličinu udávající rychlost, se kterou se mění funkční hodnoty. Nyní problém otočíme: ke známé derivaci (tj. ke známé rychlosti změny) budeme hledat původní funkci.

3.1 Neurčitý integrál

Definice 3.1 (neurčitý integrál, primitivní funkce)**.** Buď I otevřený interval, f a F funkce definované na I. Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in I, \tag{3.1}$$

nazývá se funkce F *primitivní funkcí k funkci* f, nebo též *neurčitý integrál funkce* f na intervalu I. Zapisujeme

$$\int \boldsymbol{f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)}.$$

Existuje-li k funkci f neurčitý integrál na intervalu I, nazývá se funkce f *integrovatelná na I*.

Poznámka 3.1 (spojitost primitivní funkce)**.** Primitivní funkce $F(x)$ je vždy spojitá na I, plyne to z existence derivace.

Věta 3.1 (postačující podmínka existence neurčitého integrálu)**.** Ke každé spojité funkci existuje neurčitý integrál.

Věta 3.2 (jednoznačnost primitivní funkce)**.** Primitivní funkce je na daném intervalu k dané funkci určena jednoznačně, až na libovolnou aditivní konstantu. Přesněji, platí následující:

(i) Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I, platí totéž i pro funkci $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta nezávislá na x.

(ii) Jsou-li F a G primitivní funkce k téže funkci f na intervalu I, liší se obě funkce na intervalu I nejvýše o aditivní konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$F(x) = G(x) + c \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

Poznámka 3.2 (filozofická)**.** Bohužel, ne vždy neurčitý integrál dokážeme efektivně najít. Zatímco problém nalezení derivace funkce složené z funkcí, které umíme derivovat, spočívá pouze ve správné aplikaci vzorců pro derivování, problém nalézt neurčitý integrál i k funkci tak jednoduché, jako je například e^{-x^2} je neřešitelný ve třídě elementárních funkcí.

Věta 3.3 (linearita neurčitého integrálu)**.** Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na I, c nechť je reálné číslo. Pak na intervalu I platí

$$\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 3.3 (technická)**.** Vzhledem k součtu a násobení konstantou se tedy integrál chová "pěkně", tak jak jsme to viděli i u derivace. Bohužel však neexistují podobné vzorečky pro integrál složené funkce, podílu nebo součinu. Integrál ze složené funkce dokážeme vypočítat obecně pouze v případě, že vnitřní složka je lineární funkcí, jak ukazuje následující věta. Podobně integrál z podílu lze obecně vypočítat v případě že v čitateli zlomku je derivace jmenovatele.

Věta 3.4 (speciální případ složené funkce)**.** Nechť f je funkce integrovatelná na I. Pak

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b),$$

kde F je funkce primitivní k funkci f na intervalu I. Platí pro ta x, pro která je $ax+b \in I$.

Příklad 3.1 (aplikace předchozí věty)**.**

$$\int \frac{1}{4x^2+6x+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(2x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4x+3}{\sqrt{3}} + c$$

Věta 3.5 (speciální případ zlomku)**.** Nechť funkce f má derivaci a nemá nulový bod na intervalu I. Potom na tomto intervalu platí

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|.$$

Příklad 3.2 (aplikace předchozí věty)**.**

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+8| + c$$

Věta 3.6 (metoda per-partés, speciální případ součinu)**.** Nechť funkce u a v mají derivace na intervalu I. Pak platí

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \tag{3.2}$$

pokud integrál na pravé straně existuje.

Poznámka 3.4 (integrály typické pro výpočet metodou per-partés)**.** Buď $P(x)$ polynom. Metodou per-partés integrujeme například integrály následujících typů

$$\int P(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x, \int P(x)\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x, \int P(x)\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x,$$

a

$$\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x, \int P(x)\ln^m x\,\mathrm{d}x.$$

U první skupiny integrálů postupujeme tak, že polynom derivujeme, čímž snížíme jeho stupeň, a v případě potřeby tento postup opakujeme. U druhé skupiny integrálů naopak derivujeme funkce $\mathrm{arctg}\,x$ a $\ln x$.

Příklad 3.3 (integrace per-partés).

$$\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x \; \boxed{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c$$

Věta 3.7 (první substituční metoda, speciální případ složené funkce)**.** Nechť $f(t)$ je funkce spojitá na intervalu I, nechť funkce $\varphi(x)$ má derivaci na intervalu J a platí $\varphi(J) = I$. Potom na intervalu J platí

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = \int f(t) \, \mathrm{d}t, \tag{3.3}$$

dosadíme-li napravo $t = \varphi(x)$

Poznámka 3.5 (technická)**.** Formálně substituci provádíme tak, že píšeme v integrálu vpravo t místo $\varphi(x)$ a $\mathrm{d}t$ místo $\varphi'(x) \, \mathrm{d}x$.

Příklad 3.4 (substituční metoda).

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, \mathrm{d}x \; \boxed{\begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \sin x \, \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \end{array}} = \int -\frac{1 - t^2}{t^3} \, \mathrm{d}t = \int \frac{1}{t} - t^{-3} \, \mathrm{d}t =$$

$$= \ln|t| + \frac{1}{2} t^{-2} = \ln|\cos x| + \frac{1}{2 \cos^2 x} + c$$

V jistém smyslu opačným postupem je druhá substituční metoda.

Věta 3.8 (druhá substituční metoda)**.** Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I, nechť funkce $\varphi(t)$ má nenulovou derivaci na intervalu J a platí $\varphi(J) = I$. Potom na intervalu I platí

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, \mathrm{d}t, \tag{3.4}$$

dosadíme-li napravo $t = \varphi^{-1}(x)$, kde $\varphi^{-1}(x)$ je funkce inverzní k funkci $\varphi(x)$.

Poznámka 3.6. Existence inverzní funkce φ^{-1} plyne z nenulovosti derivace funkce φ. Výraz napravo v (3.4) sice vypadá komplikovaněji, v praxi však substituci volíme vždy tak, aby po úpravě vpravo vyšel integrál jednodušší, který umíme vypočítat.

Poznámka 3.7 (technická)**.** Formálně substituci provádíme tak, že píšeme v integrálu vpravo $\varphi(t)$ místo x a $\varphi'(t) \, \mathrm{d}t$ místo $\mathrm{d}x$.

Poznámka 3.8. Vidíme, že u druhé substituční metody se vlastně jedná o použití vzorce (3.3) zprava doleva.

3.2 Riemannův integrál

Definice 3.2 (dělení intervalu)**.** Buď $[a, b]$ uzavřený interval $-\infty < a < b < \infty$. *Dělením intervalu* $[a, b]$ rozumíme konečnou posloupnost $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bodů z intervalu $[a, b]$ s vlastností

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

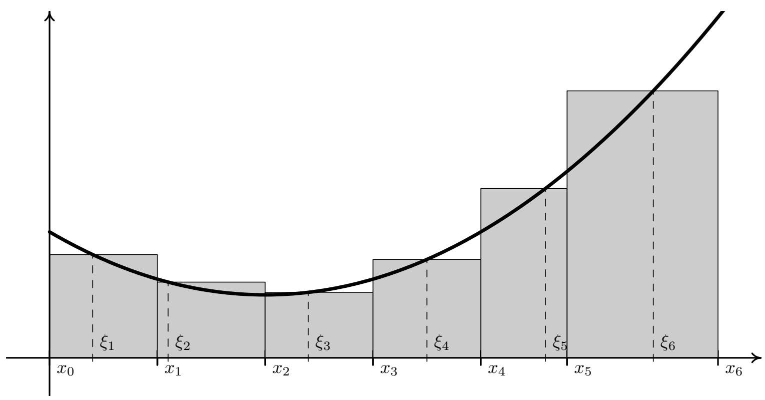
Čísla x_i nazýváme *dělící body*. *Normou dělení* D rozumíme maximální číslo, které udává vzdálenost sousedních dělících bodů. Normu dělení D označujeme $\boldsymbol{\nu(D)}$. Je tedy $\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\}$.

Definice 3.3 (integrální součet)**.** Buď $[a, b]$ uzavřený interval a f funkce definovaná a ohraničená na $[a, b]$. Buď D dělení intervalu $[a, b]$. Buď $R = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ posloupnost čísel z intervalu $[a, b]$ splňující $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ pro $i = 1..n$. Potom součet

$$\boldsymbol{\sigma(f, D, R) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}$$

se nazývá *integrální součet funkce* f příslušný dělení D a *výběru reprezentantů* R.

Poznámka 3.9 (geometrický význam integrálního součtu)**.** Předpokládejme pro jednoduchost, že funkce f je na intervalu (a, b) nezáporná. Geometricky je integrální součet roven součtu obsahů obdélníků, jejichž základny (vodorovné hrany) mají délku rovnu délce jednotlivých podintervalů v dělení a výška je rovna funkční hodnotě v bodě, který je reprezentantem příslušného podintervalu.



Obrázek 3.1: Grafické znázornění integrálního součtu

Definice 3.4 (Riemannův integrál)**.** Buď $[a, b]$ uzavřený interval a f funkce definovaná a ohraničená na $[a, b]$. Buď D_n posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ a R_n posloupnost reprezentantů. Řekneme, že funkce f je *Riemannovsky integrovatelná* na intervalu $[a, b]$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ s vlastností

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, R_n) = I$$

pro libovolnou posloupnost dělení D_n, splňující $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$ při libovolné volbě reprezentantů R_n. Číslo I nazýváme *Riemannův integrál funkce* f *na intervalu* $[a, b]$ a označujeme

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Poznámka 3.10 (slovní formulace předchozí definice)**.** Předpokládejme pro jednoduchost že funkce f je spojitá na $[a, b]$. V definici Riemannova integrálu je obsaženo následující:

(i) Rozdělíme interval (a, b) na podintervaly pomocí dělení, zvolíme libovolně reprezentanta v každém podintervalu a sestrojíme integrální součet.

(ii) Dělení zjemníme (tj. uvažujeme nové dělení, jehož norma je menší) a postup opakujeme — integrální součet se obecně může měnit.

(iii) Postupně uvažujeme jemnější a jemnější dělení intervalu (a, b) a pokud se integrální součty postupně "ustálí" na nějaké hodnotě, je tato hodnota Riemannovým integrálem funkce f na intervalu (a, b).

(Nezávislost na výběru reprezentantů a na posloupnosti dělení je v tomto případě zaručena spojitostí funkce. V případě nespojitých funkcí je potřeba tuto nezávislost dokázat, což značně převyšuje náplň tohoto předmětu.)

Definice 3.5 (horní a dolní mez)**.** Číslo a v definici Riemannova integrálu se nazývá *dolní mez* a číslo b *horní mez* Riemannova integrálu.

Věta 3.9 (postačující podmínky pro integrovatelnost funkce)**.**

(i) Funkce spojitá na intervalu $[a, b]$ je na tomto intervalu Riemannovsky integrovatelná.

(ii) Funkce ohraničená na $[a, b]$, která má na tomto intervalu konečný počet bodů nespojitosti je Riemannovsky integrovatelná.

(iii) Funkce monotonní na $[a, b]$ je na tomto intervalu Riemannovsky integrovatelná.

Věta 3.10 (linearita určitého integrálu vzhledem k funkci)**.** Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na $[a, b]$, c nechť je reálné číslo. Pak platí

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 3.11 (aditivita určitého integrálu vzhledem k mezím)**.** Nechť f je funkce integrovatelná na $[a, b]$. Buď $c \in (a, b)$ libovolné. Pak je f integrovatelná na intervalech $[a, c]$ a $[c, b]$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 3.12 (monotonie vzhledem k funkci)**.** Buďte f a g funkce integrovatelné na $[a, b]$ takové, že $f(x) \leq g(x)$ pro $x \in (a, b)$. Pak platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka 3.11 (integrál z nezáporné funkce)**.** Pro $f \equiv 0$ dostáváme z předchozí věty tvrzení, že integrál z funkce nezáporné na celém integračním oboru je nezáporný.

Věta 3.13 (věta o střední hodnotě)**.** Nechť f je funkce spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Existuje číslo $\mu \in [a, b]$ s vlastností $f(\mu)(b - a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definice 3.6 (střední hodnota)**.** Číslo $f(\mu)$ z předchozí věty se nazývá *střední hodnota funkce f na intervalu* $[a, b]$.

V praxi se určitý integrál počítá užitím následující věty.

Věta 3.14 (Newtonova–Leibnizova věta)**.** Nechť funkce $f(x)$ je Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. Nechť $F(x)$ je funkce spojitá na $[a, b]$, která je intervalu (a, b) primitivní k funkci $f(x)$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Metoda per–partés a substituční metoda pro určitý integrál vypadají následovně.

Věta 3.15. Platí

(i) $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$

(iii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

na každém intervalu, na kterém jsou funkce a jejich derivace, které vystupují v integrálech, spojité a φ je ryze monotonní.

Všimněte si, že při substituci v určitém integrálu se mohou měnit meze. Je proto nutné si uvést ještě následující definici.

Definice 3.7. Pro $a > b$ definujeme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Dále definujeme $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Poznámka 3.12 (geometrický význam určitého integrálu)**.** Jak je vidno z definice určitého integrálu, je-li funkce f nezáporná na intervalu $[a,b]$, udává integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ obsah obrazce $\{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a \leq x \leq b \text{ a } 0 \leq y \leq f(x)\}$, tj. obsah obrazce pod křivkou $y = f(x)$ na intervalu $[a,b]$. Je-li funkce f lineární, je obrazcem pod křivkou lichoběžník, v ostatních případech nazýváme množinu pod křivkou *křivočarým lichoběžníkem.* Další geometrické aplikace jsou následující.

- Obsah S množiny ohraničené shora křivkou $y = f(x)$ a zdola křivkou $y = g(x)$ (tj. předpokládáme $f(x) \geq g(x)$ na intervalu $[a,b]$) vypočteme ze vzorce
$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x.$$
Zde nic nemusíme předpokládat o kladnosti funkcí f nebo g.
- Objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného shora nezápornou funkcí $f(x)$, zdola osou x a ze stran přímkami $x = a$, $x = b$ vypočteme ze vzorce
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$
- Objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného shora nezápornou funkcí $f(x)$, zdola nezápornou funkcí $g(x)$ a ze stran přímkami $x = a$, $x = b$ vypočteme ze vzorce
$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,\mathrm{d}x$$

V následující poznámce si uvedeme metodu, jak přibližně určit hodnotu určitého integrálu v případě, že není snadné použít Newtonovu–Leibnizovu větu, např. když nedokážeme nalézt primitivní funkci.

Poznámka 3.13 (Lichoběžníkové pravidlo, přibližný výpočet určitého integrálu)**.** Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$. Rozdělme interval $[a,b]$ na n intervalů *stejné délky* h, tj. platí $h = \dfrac{b-a}{n}$. Krajní body těchto intervalů označme po řadě $x_0, x_1, \ldots, x_n$ a jim odpovídající funkční hodnoty $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Hlavní myšlenka aproximace integrálu funkce f na intervalu $[a,b]$ spočívá v tom, že na tomto intervalu nahradíme funkci $f(x)$ lomenou čarou s vrcholy v bodech $[a = x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, $\ldots [x_n = b, y_n]$ a integrál z takto upravené funkce vypočteme jako součet obsahů jednotlivých lichoběžníků, z nichž je obrazec pod lomenou čárou sestaven. (Toto lze provést i když funkce f nezachovává znaménko na intervalu $[a, b]$.) Potom platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h\Big(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\Big).$$

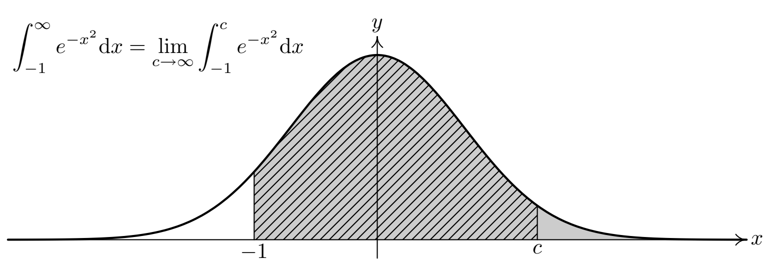
Přitom chyba v tomto vzorci je tím menší, čím je

- větší n,
- menší rozdíl $b - a$,
- menší $|f''(x)|$ na (a, b).

3.3 Nevlastní integrál

Nevlastní integrál je rozšířením pojmu Riemannova integrálu. Riemannův integrál je definovaný pouze pro *ohraničené* funkce a *konečné* obory integrace.
Body, ve kterých funkce není ohraničená a nevlastní body $\pm\infty$ budeme souhrnně nazývat *singulárními body.*
Integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nazýváme nevlastní, pokud alespoň jedno z čísel a, b je rovno $\pm\infty$, nebo funkce $f(x)$ *není ohraničená* na *uzavřeném* intervalu $[a, b]$ (tj. alespoň v jednom bodě intervalu funkce má singulární bod - nemusí jít vždy o body a nebo b, ale singulární bod může být i uvnitř intervalu).
Následující definice je současně i návodem, jak nevlastní integrál vypočítat, je-li singulárním bodem horní mez:

Definice 3.8. Nechť $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ a nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na každém intervalu $[a, c]$, kde $a < c < b$. Dále nechť buď platí $b = \infty$ nebo nechť $f(x)$ není ohraničená v okolí bodu b. Existuje-li vlastní limita $\displaystyle\lim_{u\to b^-}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x = B$, říkáme že *nevlastní integrál konverguje* a píšeme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = B$. Pokud limita neexistuje, nebo je nevlastní, říkáme, že integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje.*



Obrázek 3.2: Nevlastní integrál

Podobná situace nastává, je-li singulárním bodem dolní mez:

Definice 3.9. Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ a nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na každém intervalu $[c, b]$, kde $a < c < b$. Dále nechť buď platí $a = -\infty$ nebo nechť $f(x)$ není ohraničená v okolí bodu a. Existuje-li vlastní limita $\displaystyle\lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$, říkáme že *nevlastní integrál konverguje* a píšeme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$. Pokud limita neexistuje, nebo je nevlastní, říkáme, že integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje.*

Pokud singulární bod leží uvnitř intervalu (a,b), $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, nebo pokud jsou singulárními body obě meze, rozdělíme interval přes který integrujeme na několik podintervalů opakovaným využitím aditivity Riemannova integrálu vzhledem k mezím (Věta 3.11) a integrujeme na každém intervalu samostatně.

3.4 Obyčejné diferenciální rovnice (úvod)

Obyčejná diferenciální rovnice je matematický vztah mezi neznámou funkcí a jejími derivacemi

Definice 3.10 (obyčejná diferenciální rovnice)**.** *Obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu rozřešenou vzhledem k derivaci* (stručně - diferenciální rovnicí (ODR)) s neznámou y rozumíme rovnici tvaru

$$\boldsymbol{y' = f(x,y)} \tag{3.5}$$

kde f je funkce dvou proměnných. *Řešením* (též *integrálem*) rovnice na intervalu I rozumíme každou funkci $y = y(x)$, která splňuje identicky (3.5) na I.
Úloha najít řešení rovnice (3.5), které splňuje zadanou *počáteční podmínku*

$$\boldsymbol{y(x_0) = y_0} \tag{3.6}$$

se nazývá *počáteční Cauchyova úloha*. Jejím řešením rozumíme funkci, která splňuje podmínku (3.6) a je na nějakém intervalu obsahujícím bod x_0 řešením rovnice (3.5).
Řešení Cauchyovy úlohy nazýváme též *partikulárním řešením rovnice* (3.5). Graf partikulárního řešení se nazývá *integrální křivka*.

V souvislosti s diferenciálními rovnicemi nás zajímá především otázka, zda daná rovnice (počáteční úloha) má řešení, na jakém intervalu je toto řešení definováno a zda je určeno jednoznačně. My se budeme navíc zabývat pouze rovnicemi, u nichž lze řešení nalézt analytickou cestou pomocí integrálního počtu.

3.4.1 Rovnice typu $y' = f(x)$

Nejjednodušším příkladem diferenciální rovnice je rovnice tvaru

$$y' = f(x). \tag{3.7}$$

Z integrálního počtu víme, že tuto rovnici splňuje každá primitivní funkce k funkci f, tj. že řešením rovnice (3.7) je funkce

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C,$$

kde C je libovolná konstanta. Takovéto řešení, které obsahuje konstantu, nazýváme *obecné řešení rovnice*. Toto řešení tedy reprezentuje všechny funkce, vyhovující dané rovnici (je jich zřejmě nekonečně mnoho) Libovolné partikulární řešení získáme z obecného řešení vhodnou volbou konstanty.

Poznámka 3.14 (obecné a partikulární řešení)**.** Podobný princip platí i u dalších diferenciálních rovnic. Funkcí které vyhovují diferenciální rovnici prvního řádu je nekonečně mnoho, zapíšeme-li všechny jedním vzorcem, bude tento vzorec obsahovat jistou konstantu C. Takový vzorec se nazývá *obecné řešení diferenciální rovnice*. Každé jednotlivé (partikulární) řešení lze z tohoto vzorce obdržet[1] vhodnou volbou konstanty C.

[1] i z tohoto pravidla však existují výjimky, :)

3.5 Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

V tomto odstavci si uvedeme postup řešení jedné z nejjednodušších diferenciálních rovnic.

Definice 3.11 (ODR se separovanými proměnnými)**.** ODR tvaru

$$\boldsymbol{y' = f(x)g(y)}, \tag{3.8}$$

kde f a g jsou spojité funkce na otevřených intervalech nazýváme *obyčejnou diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými.*

Počáteční úloha pro rovnici se separovanými proměnnými nemusí mít vždy jediné řešení. Existují dokonce řešení, které mají porušenu jednoznačnost v každém bodě svého definičního oboru. Tato řešení se nazývají *singulární.*
Tuto rovnici řešíme separací proměnných následovně:

(i) Má-li rovnice $g(y) = 0$ řešení $k_1, k_2, \dots, k_n$, jsou konstantní funkce $y = k_1$, $y = k_2, \dots,$ $y = k_n$ řešeními rovnice. Ostatní řešení jsou nekonstantní a nalezneme je v dalších krocích.

(ii) Dále pracujme jenom na intervalech, kde $g(y) \neq 0$. Formálně nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

(iii) Se zlomkem $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pracujeme "normálně" jako s podílem dvou výrazů. Násobením a dělením převedeme rovnici na tvar, který obsahuje na každé straně pouze jednu proměnnou:

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(iv) Získanou rovnost zintegrujeme:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

Vlevo je tedy integrál v proměnné y, vpravo integrál v proměnné x a na jednu ze stran rovnice přidáme integrační konstantu. Tím obdržíme rovnici, která implicitně zadává obecné řešení rovnice.

(v) Pokud je zadána počáteční podmínka, dosadíme ji do obecného řešení a určíme hodnotu konstanty C. Tuto dosadíme do obecného řešení a obdržíme řešení partikulární.

(vi) Pokud je to možné, převedeme řešení (obecné nebo partikulární) do explicitního tvaru ("vyjádříme" odsud y).

(vii) Pokud je možné některé z konstantních řešení obdržet vhodnou volbou konstanty ve vzorci pro obecné řešení, zahrneme toto konstantní řešení do obecného. Řešení, která není takto možno zahrnout do obecného řešení jsou často singulárními.

Příklad 3.5 (aplikace diferenciálních rovnic v praxi – růst populace)**.** Udává-li funkce $y(x)$ velikost jisté populace v čase x, udává derivace $y'(x)$ rychlost změny velikosti této populace v čase x.

(i) Uvažujme populaci y částic znečišťujících jezero. Do jezera o objemu V, ve kterém je y_0 znečišťujících částic, přitéká čistá voda rychlostí r a stejnou rychlostí z jezera odtéká voda znečištěná. Úbytek znečišťujících částic souvisí s koncentrací znečištění a je popisován diferenciální rovnicí

$$y' = -\frac{r}{V}y.$$

Tato rovnice se nazývá *rovnice samočištění jezer*. Vzhledem k tomu, že je známa velikost počátečního znečištění, řešíme tuto rovnici spolu s počáteční podmínkou

$$y(0) = y_0.$$

Po vyřešení rovnice obdržíme funkci, která umožní přímo vypočítat množství znečištění v jezeře v libovolném čase.

(ii) Uvažujme populaci živočichů nebo rostlin určitého druhu v určité lokalitě. Předpokládejme, že díky vzájemné konkurenci mezi jednotlivci může daná lokalita uživit pouze omezený počet živočichů. Maximální počet těchto živočichů se nazývá *nosná kapacita prostředí*, označme ji M. Výraz $(M - y)$ poté udává *volnou kapacitu prostředí*, tj. kolik se v prostředí ještě může uchytit jedinců. Derivace y' udává rychlost, s jakou se mění počet jedinců v populaci. Je přirozené předpokládat, že tato rychlost je úměrná počtu jedinců y a že klesá, je-li velikost populace blízká hodnotě M. Zpravidla používáme pro modelování vývoje takové populace *logistickou rovnici*

$$y' = ky(M - y).$$

I tuto rovnici lze řešit separací proměnných, její řešení je však již obtížnější.

(iii) Uvažujme, že z populace v předchozím bodě odebíráme jednotlivce konstantní rychlostí r (například vlivem lovu nebo těžby). Potom se růst populace řídí diferenciální rovnicí

$$y' = ky(M - y) - r.$$

Studium této rovnice (a rovnic, které jsou jejími modifikacemi) je užitečné při vytváření ekologicky akceptovatelných modelů těžby a využívání některých obnovitelných přírodních zdrojů (jako jsou živočichové nebo biomasa, nikoli však ropa nebo uhlí).

(iv) Uvažujme, populaci, řídící se logistickou rovnicí, z níž jsou odebíráni jedinci působením predátorů. Rychlost, s jakou predátoři odebírají jedince označme $p(y)$ (závisí na y, protože např. je-li populace malá, predátoři vyhledávají dostupnější potravu a $p(y)$ je malá; pro větší y roste, nikoliv však do nekonečna, pouze do hladiny, kdy jsou predátoři nasyceni). Potom se růst populace řídí diferenciální rovnicí

$$y' = ky(M - y) - p(y).$$

Například při modelovaní vývoje populace obaleče smrkového v kanadských lesích se v této rovnici používá funkce tvaru $p(y) = \dfrac{\alpha y^2}{\beta + y^2}$. Znalost a správná interpretace řešení této rovnice pomůže odpovědět například na otázku, zda velikost populace, která se přemnožila díky vymření jejích přirozených nepřátel, se po umělém opětovném vysazení těchto nepřátel sníží na původní hodnotu, či nikoliv, případně zda je možné přemnožený druh zredukovat na "přijatelnou velikost" ekologickou cestou vysazením predátorů.

3.6 Diferenciální rovnice n-tého řádu

V aplikacích se lze setkat i s rovnicemi, které obsahují i vyšší derivace — s rovnicemi vyšších řádů. Řádem takovéto rovnice máme přitom na mysli řád nejvyšší z derivací. V technické praxi se setkáváme zejména s diferenciálními rovnicemi druhého řádu a v některých aplikacích i s rovnicemi čtvrtého řádu.

Definice 3.12 (diferenciální rovnice n-tého řádu)**.** *Diferenciální rovnicí n-tého řádu rozřešenou vzhledem k nejvyšší derivaci* rozumíme rovnici tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

3.6.1 Rovnice typu $y^{(n)} = f(x)$

Budeme se zabývat pouze nejjednodušším možným tvarem diferenciální rovnice n-tého řádu, kdy proměnná y vystupuje v rovnici pouze v n-té derivaci, tj. rovnicí tvaru

$$y^{(n)} = f(x). \tag{3.9}$$

Některé poznatky je možné rozšířit i na další typy diferenciálních rovnice vyššího řádu.
Je-li funkce f integrovatelná, lze rovnici zintegrovat a obdržíme

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1,$$

kde C_1 je integrační konstanta. Opakovaným integrováním dostáváme

$$y^{(n-2)} = \int \Big(\int f(x)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}x + C_1 x + C_2,$$

kde C_2 je další integrační konstanta, obecně různá od C_1. n-násobným opakováním tohoto postupu dospějeme k vyjádření řešení y pomocí n integračních konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — toto řešení nazýváme *obecné řešení rovnice* (3.9). Máme-li za úkol najít řešení partikulární, je třeba určit hodnoty celkem n integračních konstant. Proto pro korektní formulaci Cauchyovy úlohy zadáváme ne jednu ale n počátečních podmínek

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{3.10}$$

kde $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ jsou reálná čísla. Je-li funkce funkce f spojitá na intervalu I, obsahujícím bod x_0, má každá počáteční úloha (3.9) – (3.10) jediné řešení, definované na intervalu I.

3.7 Shrnutí

Integrální počet je doplněk počtu diferenciálního – integrování je opačný proces k derivování. Potřeba vyvinout takový počet je dána především aplikacemi, zejména tím, že většinu přírodních zákonů je přirozené a jednoduché formulovat pomocí *diferenciálních rovnic.* V posledních letech masivně proniká integrální počet i do mnoha dalších oborů. Například matematická biologie se stala již samostatnou a podstatnou částí celé biologie. S diferenciálními rovnicemi se setkáváme zejména tam, kde víme, jak souvisí rychlost, kterou se systém vyvíjí, se stavem tohoto systému a potřebujeme najít funkci, popisující stav tohoto systému v určitém časovém intervalu.
Určitý integrál zpravidla počítáme pomocí Newtonovy–Leibnizovy věty a pomocí integrálu neurčitého. V případech, kdy tento postup je prakticky neproveditelný, nebo se setkává s velkými obtížemi, je možné použít některou z přibližných metod výpočtu, např. *lichoběžníkové pravidlo.* Určitý integrál má řadu aplikací v technických vědách, my jsme se v tomto textu zabývali základními geometrickými aplikacemi.
Nalezení neurčitého integrálu může být velice obtížné. Bylo vyvinuto několik integračních metod a pro daný integrál často vede k cíli pouze jediná z nich. Která z metod to bude lze zpravidla (v jednodušších případech bez výjimky) odhadnout z tvaru integrované funkce. V textu jsme se věnovali metodě *per-partés* a *substituční metodě.* Kromě toho je velmi důležité umět integrovat *racionální funkce.* Toto provádíme rozkladem na *parciální zlomky*, kterému může ještě předcházet dělení polynomů.