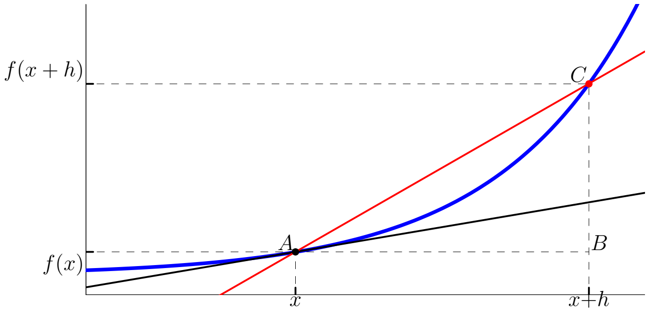
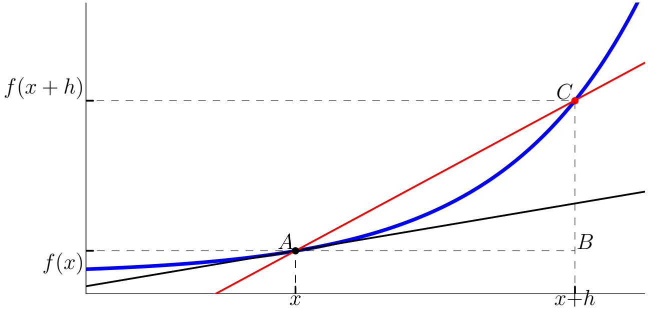
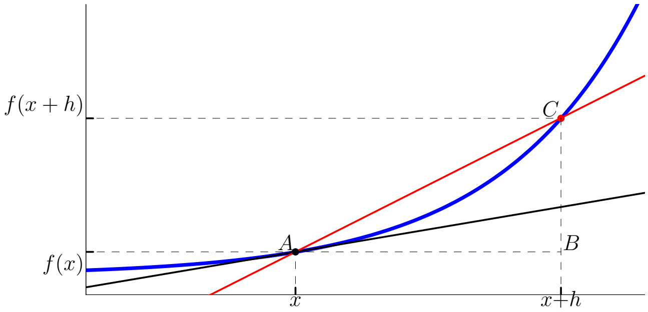
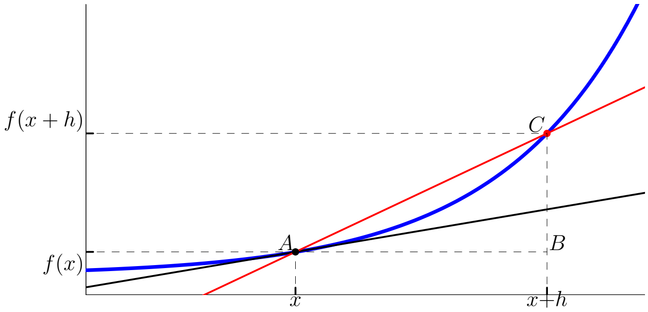


$f(x+h)$
C
A
B
$f(x)$
x
$x+h$

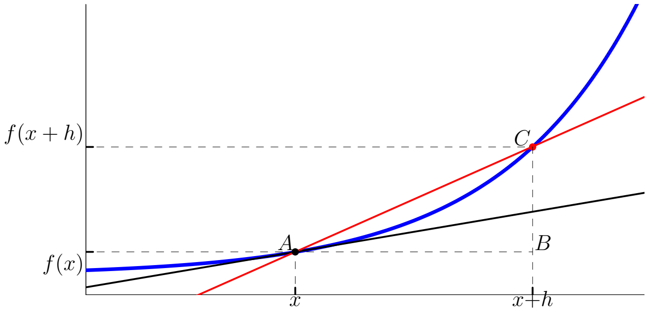


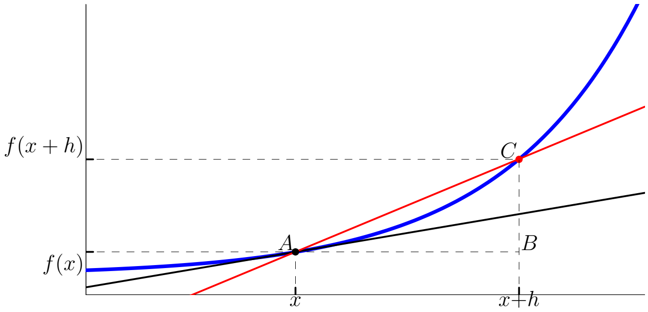
f(x+h)
f(x)
A
B
C
x
x+h


$f(x+h)$
C
A
B
$f(x)$
x
$x+h$

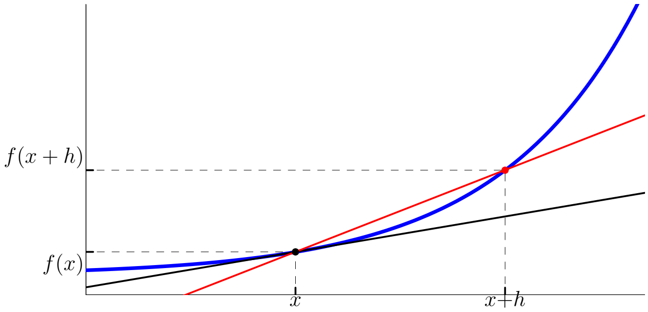


$f(x+h)$
C
A
B
$f(x)$
x
$x+h$

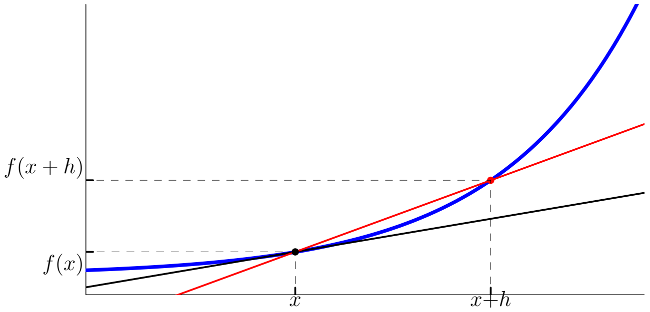

$f(x+h)$
C
A
B
$f(x)$
x
$x+h$



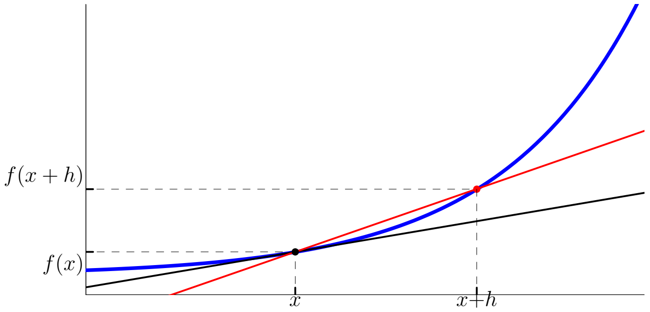
$f(x+h)$
$f(x)$
C
A
B
x
$x+h$



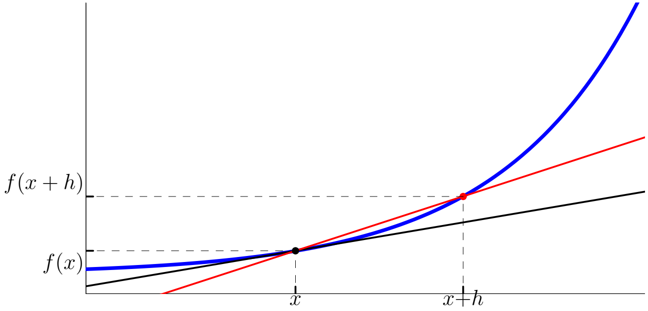
$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$



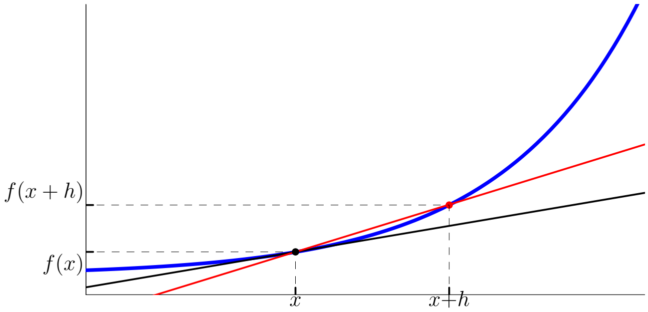
$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$



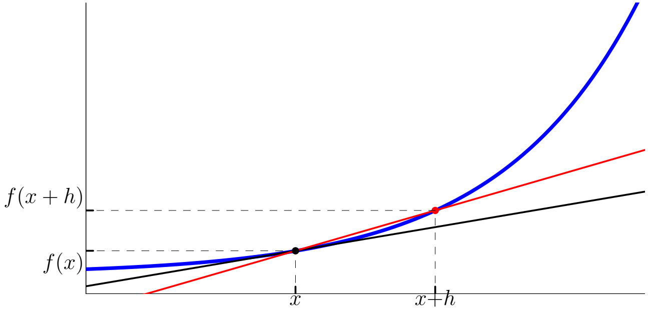
$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$



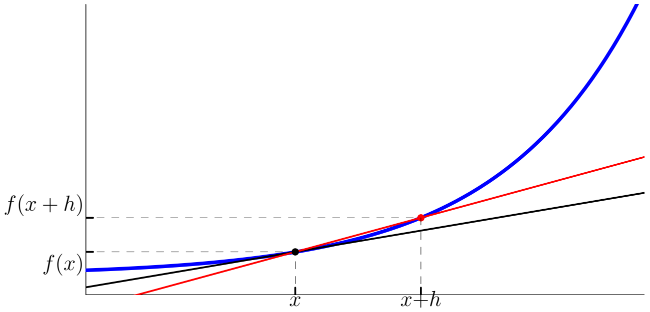
$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$



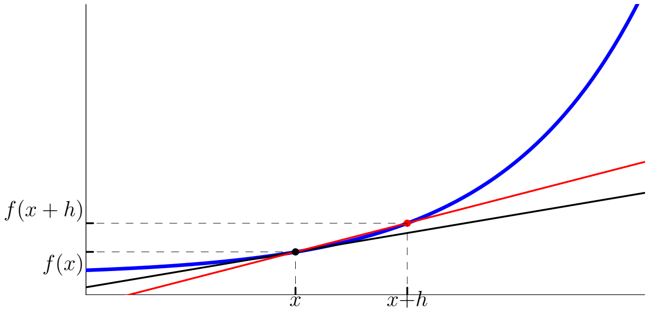
$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$

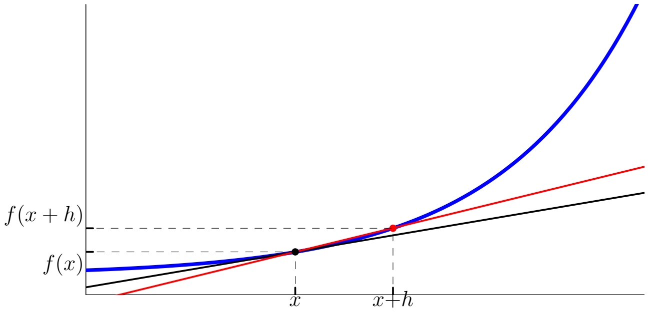


$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$

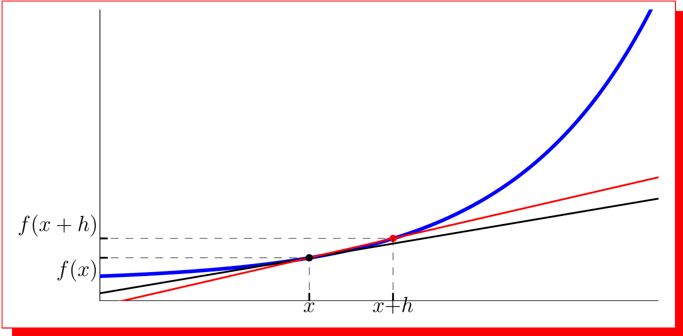


$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$

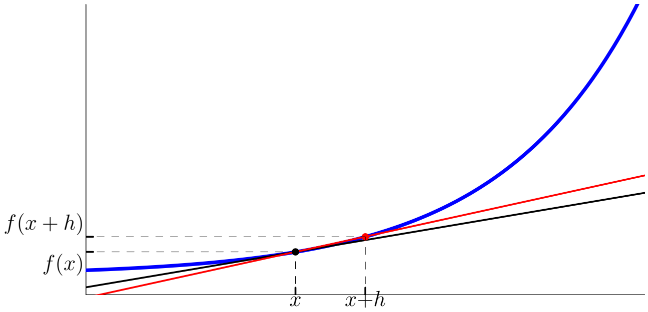

$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$



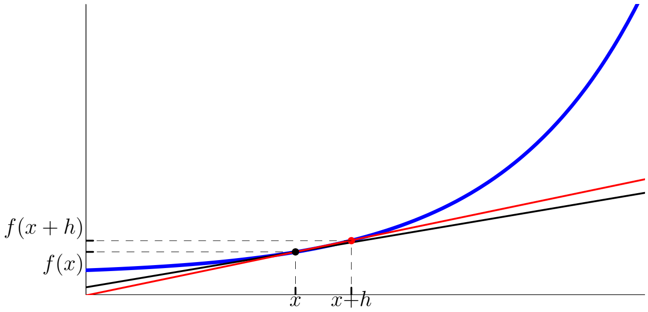
$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$



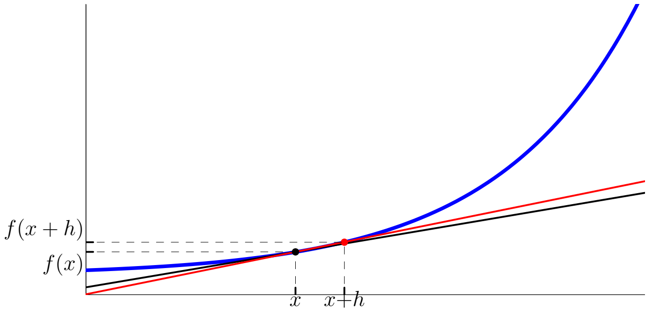
$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$



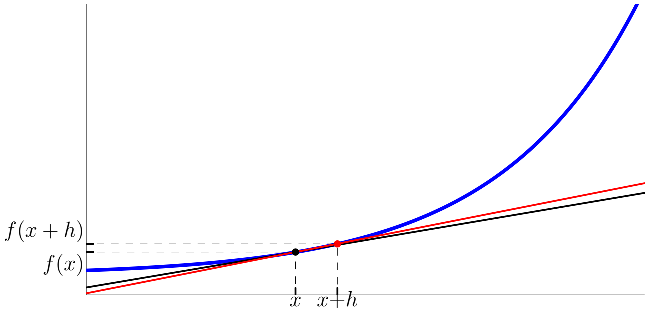
$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$



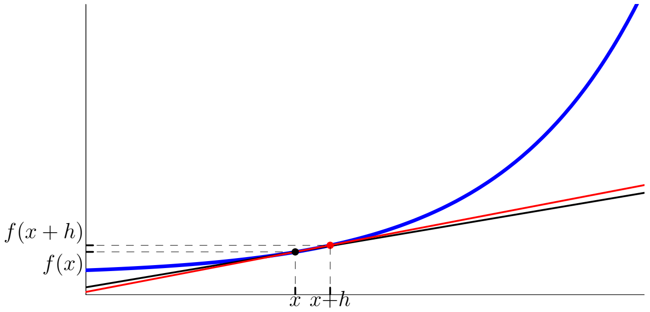
$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$



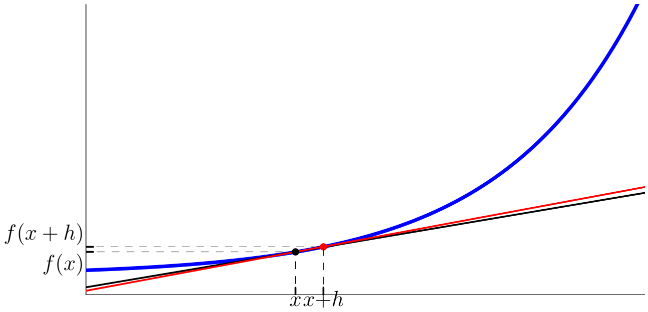
$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$



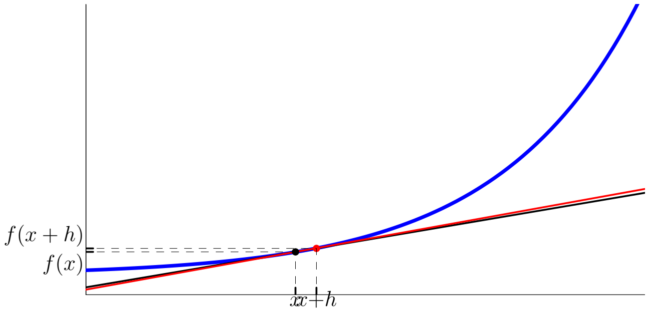
$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$



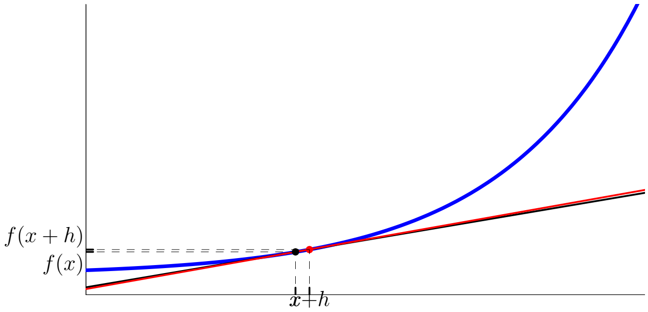
$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$



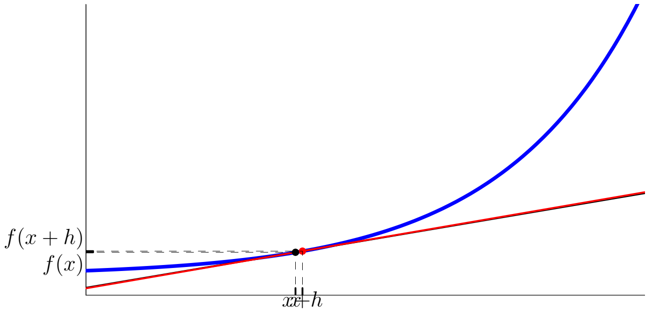
$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$



$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$



$f(x+h)$
$f(x)$
x
$+h$


$f(x+h)$
$f(x)$
x
$x+h$

ℹ tady je uvedena nebo alespoň naznačena definice pojmu – ta nám říká, **co** daný pojem znamená

☑ každý pojem který si uvedeme by měl být nějaké využití – důvod, **proč** bychom tento pojem měli znát a používat

✍ jen málokdy daný pojem počítáme přímo z definice – zde tedy uvedeme hlavní **metody výpočtu**

Funkce je **rostoucí**, jestliže pořadí vzorů zachovává i pro funkční hodnoty, tj. $a < b$ je ekvivalentní nerovnosti $f(a) < f(b)$.

Funkce je naopak **klesající**, jestliže pořadí vzorů se pro funkční hodnoty přehazuje, tj. $a < b$ je ekvivalentní nerovnosti $f(a) > f(b)$.

Fakt, že funkce je rostoucí, může být využit při řešení nerovnic: na obě strany nerovnice můžu aplikovat stejnou rostoucí funkci, nebo ji můžu vynechat – podobně to platí i pro klesající funkce, ale musíme otočit znaménko.

Růst a klesání ověříme pomocí derivace – má-li funkce kladnou derivaci, potom roste, má-li zápornou derivaci, potom klesá.

Funkce je **klesající**, jestliže pořadí vzorů se pro funkční hodnoty přehazuje, tj. $a < b$ je ekvivalentní nerovnosti $f(a) > f(b)$.

Funkce je naopak **rostoucí**, jestliže pořadí vzorů zachovává i pro funkční hodnoty, tj. $a < b$ je ekvivalentní nerovnosti $f(a) < f(b)$.

Fakt, že funkce je klesající, může být využit při řešení nerovnic: na obě strany nerovnice můžu aplikovat stejnou rostoucí funkci, nebo ji můžu vynechat, pokud otočím nerovnítko – podobně to platí i pro rostoucí funkce, ale znaménko nerovnosti se zachovává.

Růst a klesání ověříme pomocí derivace – má-li funkce kladnou derivaci, potom roste, má-li zápornou derivaci, potom klesá.

Funkce je **monotonní** na intervalu I, je-li buď nerostoucí na I nebo neklesající na I.

Funkce je **ryze monotonní** na intervalu I, je-li buď rostoucí na I nebo klesající na I.

Okolí bodu a je libovolný otevřený interval obsahující bod a. Nejčastěji pracujeme s tzv. ε-okolím, což je interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Ryzí (prstencové) okolí bodu a je okolí (viz. předchozí definice) ze kterého odebereme bod a.

🛈 Velice stručně vyjádřeno, **limita** $\lim_{x\to a} f(x)$ nás informuje, k čemu se blíží funkční hodnoty funkce $f(x)$, pokud se veličina x blíží k hodnotě a.

☑ Limita slouží k definici tak důležitých pojmů, jako je spojitost, derivace, nebo Riemannův integrál.

✍ Limitu počítáme:

- u spojitých funkcí dosazením
- u základních elementárních funkcí limitu zpravidla určíme z obrázku, pokud nelze přímo dosadit
- pomocí vět pro počítání s limitami
- l'Hospitalovým pravidlem
- u polynomů a racionálních funkcí podle vedoucích členů

Derivace funkce f v bodě x je limita

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

pokud tato limita existuje a je konečná

Derivace slouží k určení:

- rovnice tečny, tj. k lineární aproximaci nelineární funkce
- rychlosti změny fyzikální veličiny
- výpočtu limity l'Hospitalovým pravidlem

Derivaci vypočteme pomocí vzorců pro derivace základních elementárních funkcí a pravidel pro derivování základních početních operací

Funkce je **spojitá** v bodě a, jestliže platí

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x),$$

tj. funkce má v bodě a stejnou limitu a funkční hodnotu

☑ Spojité funkce jsou "pěkné"– platí pro ně Bolzanovy a Weierstrassovy věty, jsou integrovatelné.

✍ V praxi pracujeme zpravidla s elementárními funkcemi. Tyto funkce jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

ℹ Funkce je **konvexní** v bodě a, je-li graf funkce v okolí bodu a nad tečnou, tj. pokud platí

$$f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$$

☑ Konvexní rostoucí funkce roste stále rychleji.

✍ Má-li funkce kladnou druhou derivaci, je konvexní.

Funkce je **konkávní** v bodě a, je-li graf funkce v okolí bodu a pod tečnou, tj. pokud platí

$$f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a)$$

Konkávní klesající funkce klesá stále rychleji.

Má-li funkce zápornou druhou derivaci, je konkávní.

Funkce f má v bodě a **lokální maximum**, jestliže v nějakém okolí bodu a je $f(a)$ největší funkční hodnota.

Lokální maxima a minima využíváme k hledání optimálních stavů a optimálních řešení praktických problémů.

Lokální extrémy hledáme pomocí první derivace (lokální extrém může nastat pouze tam, kde první derivace neexistuje, nebo je nulová).

Funkce f má v bodě a **lokální minimum**, jestliže v nějakém okolí bodu a je $f(a)$ nejmenší funkční hodnota.

Lokální maxima a minima využíváme k hledání optimálních stavů a optimálních řešení praktických problémů.

Lokální extrémy hledáme pomocí první derivace (lokální extrém může nastat pouze tam, kde první derivace neexistuje, nebo je nulová).

Lokální extrém je společný název pro lokální maximum a lokální minimum.

Weiertrassovy věty: Spojitá funkce je na uzavřeném intervalu ohraničená a nabývá zde má svého absolutního maxima a absolutního minima.

Bolzanova věta: Spojitá funkce, která na nějakém intervalu má znaménkovou změnu, má uvnitř tohoto intervalu nulový bod.

Hodnost matice je maximální počet lineárně nezávislých řádků této matice.

Hodnost matice využíváme:
- ke zjišťování lineární (ne-)závislosti,
- k posouzení řešitelnosti soustavy lineárních rovnic, tj. ve Frobeniově větě.

Hodnost matice zjišťujeme převodem na schodovitý tvar.

Lineární kombinace zadané množiny vektorů je součet konstantních násobků těchto vektorů.

☑ Lineární kombinace vektorů vystupují v definici lineární závislosti a nezávislosti.

Vektory jsou lineárně **závislé**, pokud **některá** jejich **netriviální** lineární kombinace dává jako výsledek **nulový** vektor.

Ověřování lineární závislosti:

- **dva** vektory jsou závislé právě tehdy, když jeden je násobkem druhého
- vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ jsou závislé, jestliže matice sestavená z těchto vektorů má hodnost menší než k (tj. menší než počet vektorů).

Vektory jsou lineárně **nezávislé**, pokud **každá** jejich **netriviální** lineární kombinace dává jako výsledek **nenulový** vektor.

Lineární nezávislost vektorů využíváme v definici hodnosti.

• **dva** vektory jsou nezávislé právě tehdy, když jeden **není** násobkem druhého,

• vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ jsou nezávislé, jestliže matice sestavená z těchto vektorů má hodnost k (tj. stejnou jako počet vektorů).

Inverzní matice k matici A je taková matice A^{-1}, která je "něco jako" převrácená hodnota – její součin s původní maticí je jednička (jednotková matice), tj.

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Inverzní matici používáme

- k řešení soustav lineárních rovnic s invertibilní maticí soustavy (soustavy n lineárních rovnic o n neznámých, které mají právě jedno řešení),
- inverzní matice supluje fakt, že pro matice *nedefinujeme* dělení matic.

Inverzní matici počítáme transformací jednotkové matice.

Matici transponovanou obdržíme záměnou řádků za sloupce.

ℹ Matice je ve **schodovitém tvaru**, jestliže každý její další řádek začíná více nulami než řádek předcházející a řádky ze samých nul (pokud tam jsou) jsou na konci matice.

☑ Převod matice na schodovitý tvar matice používáme:

- ke zjišťování hodnosti matice
- k řešení soustav lineárních rovnic Gaussovou eliminací.

Definice **determinantu** je rekurentní, definujeme nejprve determinant matice 1×1 a poté řekneme, jak pomocí Laplaceova rozvoje přepsat determinant na determinanty nižšího řádu.

Podle počtu řádků determinantu:

- determinant 2×2 počítáme křížovým pravidlem
- determinant 3×3 počítáme Sarussovým pravidlem
- determinant vyššího řádu úpravou matice a rozvojem podle vhodného řádku nebo sloupce

Využití determinantu:

- podle determinantu poznáme, zda jsou řádky závislé či nezávislé, zda existuje inverzní matice, zda má matice plnou hodnost (tj. hodnot rovnu počtu řádků),
- u soustavy n lineárních rovnic a n neznámých z determinantu poznáme, zda je řešení určeno jednoznačně

Maticovým součinem rozumíme matici, která vznikne ze skalárních součinů vektorů z řádků první matice s vektory ze sloupců druhé matice.

Maticový součin počítáme přímo podle definice.

Maticový součin umožňuje zapsat v kompaktním jednoduchém tvaru soustavy lineárních rovnic nebo více lineárních kombinací.

Jednotková matice řádu n je čtvercová $n \times n$ matice, která má v hlavní diagonále jedničky a mimo hlavní diagonálu nuly.

- Jednotková matice je netrálním prvkem vzhledem k násobení matic
- při výpočtu inverzní matice převádíme matici pomocí řádkových úprav na jednotkovou

Algebraický doplněk prvku a_{ij} v determinantu D je determinant, který vznikne z detereminantu D odstraněním i-tého řádku a j-tého sloupce a vynásobením determinantu číslem $(-1)^{i+j}$

Algebraický doplněk vystupuje v definici determinantu a v Laplaceově větě. Využívá se tedy pro výpočet determinantů vyššího řádu rozvojem.

ℹ Čtvercová matice je **regulární**, pokud má nenulový determinant (srovnej se *singulární maticí*)

☑ • k regulární matici existuje matice inverzní
• má-li soustava n lineárních rovnic a n neznámých regulární matici soustavy, má tato soustava právě jedno řešení

🛈 čtvercová matice je **singulární**, pokud není regulární, tj. pokud má nulový determinant

☑ • k singulární matici neexistuje matice inverzní
• má-li soustava *n* lineárních rovnic a *n* neznámých singulární matici soustavy, má tato soustava buď nekonečně mnoho řešení,nebo žádné

Prvky v matici, které mají stejný řádkový i sloupcový index.

Laplaceova věta udává, jak je možno zapsat determinant n-tého řádu pomocí n determinantů řádu $(n-1)$ a příslušných algebraických doplňků. My jsme tuto větu použili pro definování determinantu. Věta platí i pro sloupce.

V praxi používáme rozvoj podle řádku nebo sloupce, který obsahuje “hodně” nul (v ideálním případě skoro samé nuly a pouze jeden nenulový prvek).

Maticí soustavy rozumíme matici, která na místě a_{ij} obsahuje koeficient, který figuruje v i-té rovnici u j-té neznámé

- Matice soustavy je součástí **rozšířené matice soustavy**, která slouží k tomu, abychom při řešení Gaussovou eliminací nemuseli pracovat s názvy neznámých
- Matice soustavy umožňuje zapsat soustavu lineárních rovnic ve tvaru maticového součinu.

Rozšířenou maticí soustavy rozumíme matici, která na místě a_{ij} obsahuje koeficient, který figuruje v i-té rovnici u j-té neznámé a v posledním sloupci (který je zpravidla vizuálně odělen) jsou koeficienty pravých stran

• Rozšířená matice soustavy slouží k tomu, abychom při řešení Gaussovou eliminací nemuseli pracovat s názvy neznámých.

U soustav lineárních rovnic rozumíme **parametry** zpravidla neznámé, které je možno volit libovolně a ke kterým je možno dopočítat další neznámé tak, aby výsledná n-tice byla řešením soustavy.

Soustava lineárních rovnic je **homogenní**, jestliže koeficienty pravých stran jsou všechny rovny nule.

Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení.

Nulový vektor je vektor složený ze samých nul.

• nulový vektor je neutrálním prvkem vzhledem se sčítání vektorů
• výsledkem triviální lineární kombinace je vždy nulový vektor
• to, jestli může být nulový vektor výsledkem i nějaké netriviální lineární kombinace, je rozhodující v definici lineární závislosti a nezávislosti vektorů.

Frobeniova věta je ekvivaletní podmínkou udávající, kdy je soustava řešitelná (pokud matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnost).

Jistým rozšířením **Frobeniovy věty** je poučka, udávající, že řešení soustavy lineárních rovnic má tolik nezávislých parametrů, kolik je počet neznámých zmenšený o společnou hodnost matice soustavy a rozšířené matice soustavy.

Kořen algebraické rovnice je její řešení, tj. číslo které po dosazení na x převede rovnici v identitu (levá strana rovná se pravé)

Kořenem polynomu rozumíme kořen algebraické rovnice, která vznikne tak, že polynom položíme roven nule.

Kořenem obecné funkce $f(x)$ rozumíme řešení rovnice $f(x) = 0$.

• **Základní věta algebry**: Každý polynom má v oboru komplexních čísel kořen.
• Obecně dokonce víme, že kořenů je (v oboru komplexních čísel a počítáno i s násobností) tolik, jaký je stupeň rovnice. Tyto kořeny však neumíme v obecném případě najít.
• **Celočíselné kořeny** polynomu s celočíselnými koeficienty hledáme **Hornerových schématem**: kandidátů na kořeny je pouze konečně mnoho – jsou to jenom dělitele absolutního člene a můžeme je všechny postupně prověřit.
• Kořeny související se **znaménkovou změnou** dokážeme kořeny najít s libovolnou přesností například metodou **půlení intervalu**.

Stacionární bod funkce je bod, s nulovou derivací.

Stacionární body počítáme přímo z definice – funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule a vyřešíme rovnici, která tímto vznikne.

Stacionární body úzce souvisí s lokálními extrémy – lokální extrém je buď ve stacionárním bodě nebo v bodě, kde neexistuje derivace.

ℹ Je-li číslo c kořenem polynomu $P(x)$, nazývá se výraz $(x - c)$ **kořenový činitel**. Název činitel vyplývá z faktu, že polynom $P(x)$ je polynomem $(x - c)$ dělitelný beze zbytku (**Bezoutova věta**).

☑ Hledáme-li kořeny polynomu $P(x)$ a najdeme kořen c, vydělíme polynom $P(x)$ polynomem $(x - c)$, tj. najdeme polynom $Q(x)$ z rovnosti $P(x) = (x - c)Q(x)$ a dále se soustředíme již jen na polynom $Q(x)$ – ten má stejné kořeny jako $P(x)$, ale nižší stupeň.

Polynom je lineární kombinace konečného počtu mocninných funkcí s nezáporným celočíselným exponentem.

Algebraická rovnice je rovnice, kde na jedné straně je polynom a na druhé straně nula.

☑ Polynomy jsou jedny z nejjednodušších funkcí. V řadě technických problémů nahrazujeme pro zjednodušení složitější funkce polynomy.

Číslo c ja k-**násobným kořenem** polynomu $P(x)$, pokud se polynom $P(x)$ dá zapsat ve tvaru

$$P(x) = (x - c)^k Q(x)$$

a mocnina k u kořenového činitele $(x - c)$ už "nejde zvětšit", tj. číslo c už není kořenem polynomu $Q(x)$.

• Víme-li, že číslo c je kořenem polynomu $P(x)$, vydělíme polynom $P(x)$ kořenovým činitelem $(x - c)$ tolikrát, kolikrát to jde udělat beze zbytku. Přirozené číslo, které udává kolikrát jsme dělili beze zbytku je násobnost kořene.

• Násobnost kořene jde zjišťovat i z první, druhé a případně vyšších derivací polynomu.

✓ Při řešení algebraické rovnice vydělíme kořenovým činitelem co nejvícekrát a získáme výše uvedený polynom $Q(x)$. Ten má stejné kořeny jako polynom $P(x)$, ale má nižší násobnost. Hledání dalších kořenů je tedy snazší.

✓ V okolí kořene sudé násobnost polynom nemění znaménko. V okolí kořene liché násobnosti polynom znaménko mění.

Hornerovo schéma je numerická metoda, sloužící k výpočtu funkčních hodnot polynomu a k dělení polynomu lineárním polynomem.

Primitivní funkce k funkci f je taková funkce F, jejíž derivace je f.

Neurčitý integrál je množina všech primitivních funkcí. Všechny primitivní funkce se liší nejvýše o aditivní konstantu.

Ke každé spojité funkci existuje primitivní funkce, někdy však může být velice těžké ji najít. Některé integrály jsou však standardní a integrujeme pomocí algebraických úprav, metodou **per-partés** nebo **substitucí**.

Derivace je rychlost změny a integrál je opak derivace. Integrováním tedy z rychlosti změny veličiny v časovém intervalu (lokální informace) získáme hodnoty veličiny v tomto časovém intervalu (globální informace).

Dělením intervalu $[a, b]$ rozumíme konečnou posloupnost navzájem různých bodů z intervalu $[a, b]$, přičemž první bod z dělení je a a poslední bod dělení je roven b. Předpokládáme že body jsou v dělení seřazeny podle jejich polohy na reálné ose (od nejmenšího po největší).

Normou dělení D rozumíme délku nejdelšího intervalu definovaného sousedními body v dělení D.

Integrální součet je geometricky celkový obsah plochy obdélníků, jejichž základny jsou intervaly definované dělením a výška je určena funkční hodnotou libovolného bodu z tohoto intervalu.

Určitých integrálů je celá řada, my budeme pod pojmem určitý integrál rozumět integrál Riemannův.

Riemannův integrál funkce f na intervalu $[a, b]$ je limita integrálních součtů pro normu dělení jdoucí k nule, pokud tato limita existuje pro libovolnou volbu reprezentantů a libovolný způsob, jakým zjemňujeme dělení intervalu.

- Známe-li primitivní funkci F k funkci f, můžeme Riemannův integrál vypočítat pomocí **Newtonovy–Leibnizovy věty**:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

- Hodnotu Riemannova integrálu můžeme aproximovat pomocí numerických metod, například **lichoběžníkovým pravidlem**.

☑ Riemannův integrál můžeme využít při určování obsahů ploch, objemů těles. Je i celá řada dalších fyzikálních aplikací, které vycházejí z toho, že integrál je opakem derivace.

Singulárním bodem nevlastního integrálu rozumíme buď plus nebo minus nekonečno (v případě, že integrujeme na polopřímce nebo na přímce) nebo bod, v jehož okolí je integrovaná funkce neohraničená.

Funkce je **ohraničená** na intervalu I, je-li na tomto intervalu ohraničená shora i zdola.
To znamená, že číslo K s vlastností $|f(x)| < K$ pro všechna $x \in I$, tj. graf funkce f se dá na intervalu I skrýt do nějakého (dostatečně velkého) vodorovného pásu.

Číslo x_0 se nazývá **pevný bod funkce g(x)**, jestliže platí $g(x_0) = x_0$.

Rovnici

$$f(x) = 0$$

je možno převést na tvar

$$f(x) + x = x$$

a místo hledání nulových bodů funkce $f(x)$ tedy můžeme hledat pevné body funkce $g(x) := f(x) + x$.

Pokud je absolutní hodnota derivace funkce $g(x)$ dostatečně malá a funkce $g(x)$ zobrazuje nějaký interval I do sebe, má na tomto intervalu právě jeden pevný bod a tento pevný bod lze najít **metodou postupných aproximací pomocí prostých iterací**.