Ohraničená množina je množina, která leží uvnitř nějaké (dostatečně velké) koule v $\mathbb{R}^n$.

Často se pracuje s množinami, které jsou uzavřené a ohraničené, takové množiny se nazývají **kompaktní**.

ℹ Bod $X \in \mathbb{R}^n$ je **izolovaným bodem** množiny M, pokud existuje okolí tohoto bodu, které nemá s množinou žádný jiný společný bod, než bod X.

Bod $X \in \mathbb{R}^n$ je **vnitřním bodem** množiny M, jestliže existuje okolí tohoto bodu, které leží celé v množině M.

Vnitřek množiny je množina všech jejích vnitřních bodů.

Otevřená množina je množina, jejíž každý bod je vnitřní.

Bod je **vnitřním bodem** množiny M,jestliže některé okolí toho bodu leží celé v množině M.

Otevřená množina neobsahuje svou hranici, protože žádný hraniční bod není vnitřním bodem.

ℹ **Uzavřená množina** je množina, která je sjednocením svého vnitřku a hranice. Často se pracuje s množinami, které jsou uzavřené a ohraničené, takové množiny se nazývají **kompaktní**.

Vrstevnice funkce $f(x, y)$ na úrovni C je množina obsahující všechny body, v nichž funkce nabývá funkční hodnotu C. Rovnice vrstevnice je tedy $f(x, y) = C$.

V mnoha případech vrstevnice poskytují rychlou představu o tom, jak se mění funkční hodnoty funkce, kde jsou extrémy, kde se funkční hodnoty mění rychle a kde pomalu.

Graf funkce dvou proměnných je možno chápat jako plochu v prostoru (například krajina) a vrstevnice jsou spojnice bodů, kde funkce nabývá stejnou funkční hodnotu (nadmořskou výšku).

Graf funkce dvou proměnných $f(x, y)$ je množina všech uspořádaných trojic tvaru $[x, y, f(x, y)]$.

Zpravidla se jedná o plochu v prostoru. Graf umožňuje pohodlnou vizualizaci a usnadňuje geometrickou představu o funkci.

Limita: Řekneme, že funkce f má v bodě A **limitu** rovnu číslu $L \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé okolí $O(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\overline{O}(A)$ bodu A takové, že obrazy všech bodů z tohoto ryzího okolí bodu A leží v okolí bodu L, tj. pro všechna $X \in \overline{O}(A)$ platí $f(X) \in O(L)$. Píšeme

$$\lim_{X \to A} f(X) = L.$$

Definice limity funkce dvou proměnných je analogická limitě funkce jedné proměnné, ale v praxi je tento pojem obtížně studovatelný, protože už v rovině je mnoho cest různých tvarů a z různých směrů, po kterých je možno se přibližovat k bodu A.

i Spojitost funkce více proměnných je definována stejně jako u funkce jedné proměnné:

- Funkce je **spojitá v bodě** A, jestliže má v tomto bodě limitu a funkční hodnotu a obě jsou stejné.
- Funkce je **spojitá na otevřené množině**, jestliže je spojitá v každém bodě této množiny.

Spojité funkce mají celou řadu intuitivně zřejmých vlastností a snadno se studují:

- platí zde Weierstrassova věta
- elementární funkce jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Derivace funkce jedné proměnné $f(x)$ v bodě x je limita

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

pokud tato limita existuje a je konečná

Derivace slouží k určení:

- rovnice tečny, tj. k lineární aproximaci nelineární funkce
- rychlosti změny fyzikální veličiny
- výpočtu limity l'Hospitalovým pravidlem

Derivaci vypočteme pomocí vzorců pro derivace základních elementárních funkcí a pravidel pro derivování základních početních operací

Parciální derivace funkce $f(x, y)$ dvou proměnných jsou limity

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \qquad (1)$$

$$f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}, \qquad (2)$$

pokud tyto limity existují a jsou konečné.

Derivace slouží k určení:

- rovnice tečné roviny, tj. k lineární aproximaci nelineární funkce více proměnných
- rychlosti změn fyzikálních veličin

Derivaci vypočteme pomocí vzorců pro derivace základních elementárních funkcí a pravidel pro derivování základních početních operací. Postupujeme podobně jako při derivování funkce jedné proměnné, na proměnné, přes které se nederivuje, pohlížíme jako na konstanty.

Schwarzova věta: Za předpokladu spojitosti parciálních derivací jsou obě smíšené parciální derivace shodné. U derivací vyšších řádů nezáleží na tom, v jakém pořadí derivujeme, ale pouze kolikrát derivujeme podle každé z proměnných.

Hladké funkce jsou funkce, které mají spojité parciální derivace podle všech proměnných.

Tečná rovina ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ je rovina o rovnici

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Pro srovnání: tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 má rovnici

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

V okolí bodu dotyku tato rovina poměrně přesně aproximuje funkci $f(x, y)$ a je tedy možno psát přibližný vzorec

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

V tomto vzorci je přesnost tím větší, čím

- je menší vzdálenost bodů (x, y) a (x_0, y_0),
- jsou menší druhé derivace funkce f (pokud existují).

Tečná rovina ke grafu funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ je rovina o rovnici

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

kde $z_0 = f(x_0, y_0)$. Pro změny $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$ platí

$$\Delta z = \boldsymbol{f'_x(x_0, y_0)}\Delta x + \boldsymbol{f'_y(x_0, y_0)}\Delta y.$$

Výraz

$$\boldsymbol{f'_x(x_0, y_0)}\mathrm{d}x + \boldsymbol{f'_y(x_0, y_0)}\mathrm{d}y$$

se nazývá **totální diferenciál funkce** f.

☑ • Totální diferenciál udává směrové vektory tečné roviny a může být využit pro lineární aproximaci funkce.
• Totální diferenciál souvisí s exaktní diferenciální rovnicí.

Implicitní funkce je funkce daná rovnicí $f(x, y) = 0$. Graf implicitní funkce tedy splývá s vrstevnicí funkce f na úrovni nula. Někdy je pro jednoznačnost nutno zadat ještě alespoň jeden bod ležící na grafu funkce (například vrstevnice ve tvaru kružnice definuje dvě spojité funkce – horní a dolní půlkružnici.)

Funkce má v bodě (x_0, y_0) **lokální maximum**, jestliže v nějakém okolí tohoto bodu neexistuje bod s vyšší funkční hodnotou.

Lokální maximum může být podle Fermatovy věty jenom v podezřelých bodech – bodech, kde každá parciální derivace je buď nula nebo neexistuje. V případě dostatečně hladkých funkcí zpravidla o existenci a typu stacionárního bodu rozhodujeme pomocí Hessiánu.

Lokální minimum definujeme analogicky.

Funkce má v bodě (x_0, y_0) **vázané lokální maximum**, jestliže v nějakém okolí tohoto bodu neexistuje bod, který by splňoval zadanou počáteční podmínku a funkční hodnota je vyšší než v bodě (x_0, y_0).

Vázané lokální minimum definujeme analogicky.

Funkce má v bodě (x_0, y_0) **absolutní maximum** na množině M, v množině M neexistuje bod s vyšší funkční hodnotou.

Absolutní minimum definujeme analogicky.

ℹ Funkce $f(x,y)$ má v bodě (x_0, y_0) **stacionární bod**, jestliže jsou obě parciální derivace v tomto bodě rovny nule.

✓ V bodě, kde je alespoň jedna z parciálních derivací nenulová, nemůže nastat lokální extrém. Při hledání lokálních extrémů tedy stačí brát do úvahy jenom stacionární body a body, kde některá z parciálních derivací neexistuje (**Fermatova věta**).

Hessián funkce $f(x, y)$ (se spojitými druhými derivacemi) je determinant $H = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$

Hessián využíváme k posouzení, zda v daném stacionárním bodě má funkce lokální extrém či nikoliv.

Diferenciální rovnice je rovnice, kde neznámou je funkce a tato funkce se v rovnici vyskytuje i prostřednictvím svých derivací.

Vyřešit obecně jakoukoliv diferenciální rovnici není možné, ale umíme vyřešit celou řadu speciálních typů. Zejména se jedná o

- rovnici se separovanými proměnnými $y' = f(x)g(y)$
- homogenní rovnici $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$
- lineární diferenciální rovnici prvního řádu $y' + a(x)y = b(x)$
- lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty $y'' + py' + qy = f(x)$

✓ Diferenciální rovnici používáme k matematickému popisu většiny fyzikálních jevů a obecně k popisu systémů, jejichž další vývoj závisí na okamžitém stavu systému.

Diferenciální rovnice má zpravidla nekonečně mnoho řešení, která se dají vyjádřit pomocí vzorce obsahujícího jeden (u diferenciálních rovnic prvního řádu) nebo dva (u rovnic druhého řádu) parametry. Takové řešení se nazývá **obecné řešení**. Pokud chceme ze všech funkcí vybrat jednu jedinou funkci, tzv. **partikulární řešení**, musíme k zadání diferenciální rovnice dodat **počáteční podmínku**.

Partikulární řešení je řešení počáteční úlohy (diferenciální rovnice s **počáteční podmínkou**).

V poněkud širším slova smyslu tento pojem používáme i pro označení jednoho konkrétního řešení diferenciální rovnice (řešení, které na rozdíl od obecného řešení neobsahuje konstantu).

Partikulární řešení nejčastěji hledáme tak, že nejprve určíme řešení obecné a poté dosazením počáteční podmínky určíme, jakou hodnotu musí nabývat konstanta v obecném řešení, aby požadovaná počáteční podmínka byla splněna.

Cauchyova (počáteční) úloha je úloha najít řešení diferenciální rovnice, které splňuje zadanou **počáteční podmínku** – podmínku předepisující funkční hodnotu v předepsaném bodě.

Řešení počáteční úlohy hledáme tak, že vyjdeme z obecného řešení diferenciální rovnice, dosadíme počáteční podmínku, vypočteme hodnotu konstanty z obecného řešení, které zaručí, aby počáteční podmínka byla splněna a nakonec tuto hodnotu konstanty použijeme v obecném řešení.

Směrové pole diferenciální rovnice je systém orientovaných lineárních elementů v rovině. Jednotlivé elementy udávají směr, kterým míří řešení procházející tímto bodem. Směrnice jednotlivých elementů je tedy dána derivací funkce, tak jak tuto derivaci určíme z diferenciální rovnice.

Triviální řešení lineární diferenciální rovnice prvního nebo druhého řádu je řešení, které je na uvažovaném intervalu rovno nule pro všechna x. Ostatní řešení jsou **netriviální**.

Lineární kombinací funkcí y_1 a y_2 je každá funkce, kterou lze pro vhodnou volbu konstant C_1 a C_2 zapsat ve tvaru $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Platí-li $C_1 = 0 = C_2$, dostáváme tzv. **triviální lineární kombinaci**.

Fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenciální rovnice druhého řádu je libovolná dvojice netriviálních řešení.

✓ Každé další řešení rovnice je lineární kombinací funkcí z fundamentálního systému. Známe-li tedy fundamentální systém řešení homogenní LDR druhého řádu, sestavíme snadno řešení obecné.

✍ U diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty určíme fundamentální systém ze znalosti kořenů charakteristické rovnice.

Wronskián funkcí y_1 a y_2 je determinant

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} .$$

☑ Jsou-li obě funkce řešení téže homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu, je jejich wronskián nenulový právě tehdy, když jsou obě řešení lineárně nezávislá.

Lineární diferenciální rovnice je rovnice, kde na levé straně je lineární diferenciální operátor a na pravé straně buďto nulová funkce (homogenní rovnice) nebo nenulová funkce (nehomogení rovnice). Jedním z důsledků linearity je skutečnost, že **diferenciální operátor zachovává lineární kombinaci funkcí**. Odsud lze snadno odvodit, že k nalezení obecného řešení rovnice stačí nalézt několik speciálních partikulárních řešení této nebo asociované homogenní rovnice a z těchto řešení poté snadno sestavíme řešení obecné.

V případě nehomogení diferenciální rovnice prvního řádu stačí nalézt libovolné partikulární řešení této rovnice a jedno netriviální řešení asociované homogenní rovnice.

V případě nehomogení diferenciální rovnice druhého řádu stačí nalézt partikulární řešení této rovnice a dvě lineárně nezávislá řešení asociované homogenní rovnice.

Autonomní systém dvou diferenciální rovnic je soustava dvou diferenciálních rovnic prvního řádu, který na pravé straně neobsahuje nezávislou proměnnou (zpravidla t).

Narozdíl od obecného systému diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
x' &= f(x, y, t)\\
y' &= g(x, y, t)
\end{aligned}
$$

jsou pravé strany nezávislé na t a autonomní systém je

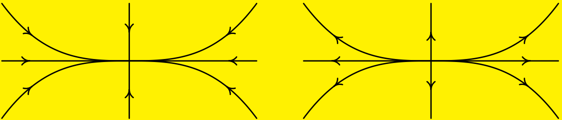
$$
\begin{aligned}
x' &= f(x, y)\\
y' &= g(x, y).
\end{aligned}
$$

Předpokládáme, že funkce f a g jsou dostatečně hladké, aby byla zajištěna jednoznačná řešitelnost každé počáteční úlohy.

Stacionární bod (x^*, y^*) se nazývá **uzel**, jestliže všechny trajektorie $(x(t), y(t))$ z nějakého okolí tohoto bodu konvergují pro $t \to \infty$ nebo $t \to -\infty$ k (x^*, y^*) tak, že nedochází k oscilacím kolem limitní hodnoty.

Stacionární bod je uzel, pokud jsou vlastní čísla Jacobiho matice v tomto bodě **reálná** a mají **stejné** znaménko. Pokud jsou kladná, jedná se o nestabilní uzel, pokud záporná, jedná se o stabilní uzel.

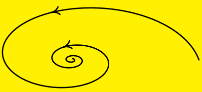
Stabilní a nestabilní uzel:

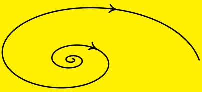


Stacionární bod (x^*, y^*) se nazývá **ohnisko**, jestliže všechny trajektorie z nějakého okolí tohoto stacionární bodu do tohoto bodu konvergují buď pro $t \to \infty$ nebo pro $t \to -\infty$ a to tak, že kolem tohoto bodu oscilují se zmenšující se amplitudou.

Stacionární bod je ohnisko, pokud jsou vlastní čísla Jacobiho matice v tomto bodě **komplexní** a mají **nenulovou** reálnou část. Pokud je reálná část kladná, jedná se o nestabilní ohnisko, pokud záporná, jedná se o stabilní ohnisko. (Pokud je reálná část rovna nule, je stacionární bod buď ohniskem nebo bodem rotace.)

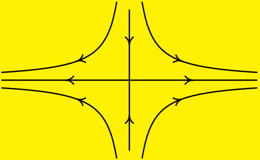
Stabilní a nestabilní ohnisko:





Stacionární bod (x^*, y^*) se nazývá **sedlo**, jestliže v každém jeho okolí existuje pouze konečný počet trajektorií, které pro $t \to \pm\infty$ konvergují k tomuto bodu.

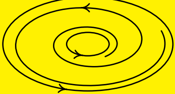
Stacionární bod je sedlo, pokud jsou vlastní čísla Jacobiho matice v tomto bodě **reálná** a mají **různá** znaménka.

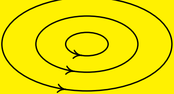


Stacionární bod (x^*, y^*) se nazývá **bod rotace**, jestliže každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho trajektorií, které jsou cykly. Pokud v nějakém okolí existují pouze cykly, nazývá se tento bod navíc **střed**.

Pokud jsou vlastní čísla Jacobiho matice ve stacionárním bodě **komplexní** a mají **nulovou** reálnou část, je stacionární bod buď ohniskem nebo bodem rotace.

Bod rotace a střed:





Je-li dvojice funkcí $x(t)$, $y(t)$ řešením autonomního, nazývá se množina bodů v rovině (x, y) definovaná jako

$$T = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : \ x(\tilde{t}) = \tilde{x} \text{ a } y(\tilde{t}) = \tilde{y} \text{ pro nějaké } \tilde{t} \in \mathbb{R}\}$$

trajektorie systému.

Trajektorie systému tedy charakterizuje posloupnost stavů, kterými autonomní systém prochází. Protože na trajektoriích není zachycen čas, ztrácíme informaci o tom, jak dlouho trval přechod z jednoho stavu do jiného. Dvě různé trajektorie se navzájem neprotínají a každá ohraničená trajektorie je buď stacionárním bodem, nebo cyklem, nebo konverguje ke stacionárnímu bodu, nebo k cyklu, nebo ke speciální množině tvořené stacionárními body a jinými trajektoriemi.

Trajektorie a směrové pole tvoří **fázový portrét** autonomního systému.

ℹ tady je uvedena nebo alespoň naznačena definice pojmu – ta nám říká, **co** daný pojem znamená

☑ každý pojem který si uvedeme by měl být nějaké využití – důvod, **proč** bychom tento pojem měli znát a používat

✍ jen málokdy daný pojem počítáme přímo z definice – zde tedy uvedeme hlavní **metody výpočtu**

Oblast je otevřená souvislá množina. **Uzavřená oblast** je uzavřená souvislá množina.

Supremum množiny A je nejmenší horní závora množiny A.

Pokud má množina A největší prvek, je tento prvek supremem. Pokud množina A žádný největší prvek nemá, je supremum „nejbliží rozumná náhrada“ největšího prvku. Například otevřený interval $(0, 1)$ nemá největší prvek a supremem tohoto intervalu je číslo 1.

Infimum množiny A je největší dolní závora množiny A.

Pokud má množina A nejmenší prvek, je tento prvek infimem. Pokud množina A žádný nejmenší prvek nemá, je infimum „nejbliží rozumná náhrada“ nejmenšího prvku. Například otevřený interval $(0, 1)$ nemá nejmenší prvek a infimem tohoto intervalu je číslo 0.

Bod $X \in \mathbb{R}^n$ je **hraničním bodem** množiny M, jestliže každé jeho okolí obsahuje i body, které leží v množině M a i body, které leží mimo množinu M.

Hranice množiny je množina všech hraničních bodů této množiny.