

# INŽENÝRSKÁ MATEMATIKA

**Robert Mařík**  
**MZLU v Brně**  
**marik@mendelu.cz,**  
**<http://user.mendelu.cz/marik>**

Učební text k mým přednáškám z předmětu Inženýrská matematika. Text je šířen z adresy <http://user.mendelu.cz/marik>, kde je dostupný ve formě vhodné pro tisk i ve formě vhodné pro prohlížení na obrazovce z adresy <http://is.mendelu.cz/eknihovna/>, kde je ve formě elearningového kurzu.

Pro případné jiné použití než pro přípravu ke zkoušce si prostudujte **licenční podmínky**.

## Rozcestník

- **Obsah**
- **Začátek textu**

# Obsah

## 1. Diferenciální počet funkcí dvou proměnných

- Euklidovský metrický prostor
- Základní topologické pojmy
- Funkce
- Derivace složené funkce
- Extremální úlohy

## 2. Diferenciální rovnice

- Diferenciální rovnice – úvod
- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými
- Homogenní diferenciální rovnice
- Lineární diferenciální rovnice
- Exaktní diferenciální rovnice
- Lineární diferenciální rovnice druhého řádu
- Homogenní LDR 2. řádu
- Homogenní LDR 2. řádu s konstantními koeficienty
- Nehomogenní LDR 2. řádu

## 3. Autonomní systémy

- Motivace
- Autonomní systémy

## 4. Dvojný integrál

- Supremum a infimum
- Dvojný integrál na obdélníku
- Dvojný integrál v obecné oblasti
- Polární souřadnice
- Obecné křivočaré souřadnice

## 5. Numerické řešení diferenciálních rovnic

- Metody s konstantním krokem

# Kapitola 1

## Diferenciální počet funkcí dvou proměnných

Při studiu funkcí jedné proměnné jsme podstatně využívali pojmů limita a derivace. Limita byla přesnou definicí toho, co máme na mysli, řekneme-li “jestliže se vzory funkce blíží k číslu  $a$ , pak se obrazy blíží k číslu  $L$ ”. V této kapitole budeme studovat funkce dvou a více proměnných a musíme si nejprve ujasnit, co to znamená, řekneme-li že bod  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  leží blízko bodu  $(y_1, y_1, \dots, y_n)$ . Zavádíme proto v  $n$ -rozměrném prostoru pojem vzdálenosti, a to nejpřirozenějším možným způsobem (nikoli však jediným možným). Připomeňme, že s prostorem  $\mathbb{R}^n$  obsahujícím  $n$ -rozměrné vektory jsme se setkali již v prvním ročníku. Nyní na této množině budeme definovat vzdálenost a prvky této množiny budeme nazývat body.

## 1. Euklidovský metrický prostor

**Definice 1.1** (metrický prostor, metrika). Množina  $\mathbb{E}^n$  prvků z  $\mathbb{R}^n$  s metrikou  $\rho$  definovanou pro  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  a  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  vztahem

$$\rho(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \quad (1.1)$$

se nazývá **Euklidovský metrický prostor**. Prvky prostoru  $\mathbb{E}^n$  budeme nazývat **body**. Funkce  $\rho$  se nazývá **Euklidovská metrika**. Číslo  $\rho(X, Y)$  se nazývá **Euklidovská vzdálenost** bodů  $X, Y$ .

**Poznámka 1.1.** V prostorech  $\mathbb{E}^2$  a  $\mathbb{E}^3$  se jedná o “běžnou” definici vzdálenosti, používanou v každodenním životě. I následující tři vlastnosti metriky jsou v těchto prostorech velice názorné.

**Věta 1.1** (vlastnosti euklidovské metriky). Pro libovolná  $X, Y, Z \in \mathbb{E}^n$  platí

$$\begin{aligned} \rho(X, Y) &= \rho(Y, X) && \text{symetrie} \\ \rho(X, Y) &= 0 \iff X = Y && \text{totožnost} \\ \rho(X, Y) + \rho(Y, Z) &\geq \rho(X, Z) && \text{trojúhelníková nerovnost} \end{aligned}$$

Následující definice zavádí název pro množinu bodů, které jsou “blízko” daného bodu  $X$  (tj. nejsou od něj vzdáleny více, než jistá maximální přípustná hodnota  $\varepsilon$ ).

**Definice 1.2** (okolí, ryzí okolí). Buď  $X \in \mathbb{E}^n$  bod z  $\mathbb{E}^n$  a  $\varepsilon > 0$  kladné reálné číslo. *Epsilonovým okolím bodu  $X$*  rozumíme množinu označenou  $O_\varepsilon(X)$  skládající se z bodů, jejichž vzdálenost od bodu  $X$  je menší než  $\varepsilon$ , tj.

$$O_\varepsilon(X) = \{Y \in \mathbb{E}^n : \rho(X, Y) < \varepsilon\}.$$

*Ryzím epsilonovým okolím bodu  $X$*  rozumíme množinu  $\overline{O}_\varepsilon(X)$  definovanou

$$\overline{O}_\varepsilon(X) = O_\varepsilon(X) \setminus \{X\},$$

tj.  $\varepsilon$ -okolí bodu  $X$ , s vyloučením bodu  $X$ .

**Poznámka 1.2.** V prostorech  $\mathbb{E}^2$  a  $\mathbb{E}^3$  je tedy  $\varepsilon$ -okolím bodu  $X$  vnitřek kruhu, resp. vnitřek koule se středem v bodě  $X$  a poloměrem  $\varepsilon$ . Proto obecně okolí nazýváme též *otevřenou  $n$ -rozměrnou koulí*. Ryzí okolí je potom otevřená  $n$ -rozměrná koule bez svého středu. Nebude-li velikost  $\varepsilon$  podstatná, budeme ji vynechávat. V případě jednorozměrného prostoru definice splývá s definicí okolí bodů na reálné ose, jak ji známe z prvního ročníku.

**Poznámka 1.3** (neeuclidovské metriky). V teorii metrických prostorů se metrikou nazývá jakákoliv nezáporná funkce  $\rho(X, Y)$  dvou proměnných, která splňuje vlastnosti uvedené ve Větě 1.1. Toto je někdy výhodnější. Definujeme-li například  $\rho_{\max}(X, Y) = \max\{|x_i - y_i|, i = 1, 2, \dots, n\}$  bude množinou všech bodů  $Y$  splňující pro daný bod  $X$  nerovnici  $\rho_{\max}(X, Y) < \varepsilon$  čtverec. V této metrice jsou okolí bodu v rovině čtvercového tvaru<sup>1</sup>, což je jistě jednodušší objekt než kruh vzniklý při použití euklidovské metriky. Níže vyložená teorie nezávisí na tom, zda použijeme Euklidovskou metricku, metricku  $\rho_{\max}$ , či nějakou jinou metricku. Proto se budeme držet metriky Euklidovské – ve dvou a trojrozměrných prostorech lépe odpovídá “zažitě představě” o vzdálenosti. Protože tedy nebudeme

<sup>1</sup>Koule jsou tedy hranaté, dvourozměrná koule je čtverec, trojrozměrná koule je krychle.

používat jinou metriku, než metriku Euklidovskou a jiný metrický prostor než Euklidovský, budeme přívlastek “Euklidovský” vynechávat.

**Poznámka 1.4** (obecné metrické prostory). Teorie metrických prostorů je jedna z nejabstraktnějších partií matematiky, se kterými se studenti setkávají. V této teorii obecněji metrickým prostorem nazýváme jakoukoliv množinu, na níž lze definovat metriku s vlastnostmi uvedenými ve Větě 1.1. Tato množina může být například

- množina bodů v trojrozměrném prostoru
- množina bodů v prostoru libovolné dimenze
- množina funkcí (například v teorii aproximace nás zajímá, jak jsou dvě funkce blízko sebe)
- množina slov (v lingvistice jsou dvě slova “blízko sebe” pokud jsou si podobná)

## 2. Základní topologické pojmy

V této podkapitole si vyjádříme přesně, co znamenají intuitivně známé pojmy jako “ohraničená množina” nebo “hranice a vnitřek množiny”. Jediný pojem, o který se přitom můžeme opřít, je poměrně obecný pojem vzdálenost a z něj odvozený pojem okolí. Uvidíme však, že tyto pojmy jsou pro daný účel zcela dostatečné. Výhoda použití těchto obecných pojmů je, že níže uvedené definice platí při libovolné (i neeuklidovské) volbě metriky  $\rho$  a jsou přenositelné i do zcela abstraktních metrických prostorů.

V následujících definicích je  $X \in \mathbb{E}^n$  bod a  $M \subseteq \mathbb{E}^n$  podmnožina v Euklidovském prostoru  $\mathbb{E}^n$ .

**Definice 2.1** (ohraničená množina). Množina  $M$  se nazývá *ohraničená*, jestliže leží v (dostatečně velkém) okolí nějakého bodu  $Y \in \mathbb{E}^n$ .

**Definice 2.2** (izolovaný bod). Bod  $X$  se nazývá *izolovaným bodem množiny*  $M$ , jestliže existuje okolí  $O(X)$  bodu  $X$  s vlastností  $O(X) \cap M = \{X\}$ .

**Definice 2.3** (hromadný bod). Bod  $X$  se nazývá *hromadným bodem množiny*  $M$ , jestliže každé ryzí okolí bodu  $X$  obsahuje alespoň jeden bod, ležící v množině  $M$  (v tomto případě jich navíc obsahuje dokonce nekonečně mnoho).

Bod, který není hromadný, tedy leží relativně daleko od ostatních bodů. Například izolovaný bod zcela jistě není hromadný.

**Definice 2.4** (vnitřní bod, vnitřek, otevřená množina). Bod  $X$  se nazývá *vnitřním bodem množiny*  $M$ , jestliže  $X \in M$  a existuje nějaké okolí  $O(X)$  bodu  $X$  ležící celé v množině  $M$ , tj.  $O(X) \subseteq M$ . Množina všech vnitřních bodů množiny  $M$  se nazývá *vnitřek množiny*  $M$  a označuje  $M^\circ$ . Je-li množina  $M$  totožná se svým vnitřkem, tj. je-li každý bod množiny  $M$  vnitřní, říkáme, že množina  $M$  je *otevřená*.

Vnitřní bod množiny  $M$  je tedy bod, který je relativně daleko od bodů nepatřících do  $M$ . Je obklopen pouze body z množiny  $M$  a všechno ostatní je dál než nějaké kladné číslo.

**Definice 2.5** (hraniční bod, hranice). Bod  $X$  se nazývá *hraničním bodem množiny*  $M$ , jestliže každé okolí bodu  $X$  obsahuje alespoň jeden bod ležící v množině  $M$  a současně alespoň jeden bod neležící v množině  $M$ . Množina všech hraničních bodů množiny  $M$  se nazývá *hranice množiny*  $M$  a označuje  $\partial M$ .

**Definice 2.6** (uzávěr, uzavřená množina). *Uzávěrem množiny  $M$  rozumíme množinu  $\overline{M}$  definovanou jako sjednocení vnitřku a hranice množiny  $M$ , tj.  $\overline{M} = M^\circ \cup \partial M$ . Je-li množina totožná se svým uzávěrem (tj. obsahuje-li všechny své hraniční body), nazývá se uzavřená.*

Hranice množiny  $M$  je tedy množina bodů, které leží “nekonečně blízko”<sup>2</sup> bodům množiny  $M$  a současně “nekonečně blízko” k bodům mimo množinu  $M$ . Uzávěr množiny  $M$  je potom množina obsahující body množiny  $M$  a body ležící “nekonečně blízko” k množině  $M$ .

**Definice 2.7** (souvislá množina). *Množina  $M$  se nazývá souvislá, jestliže každé dva body, ležící v množině  $M$  lze spojit lomenou čarou, ležící v  $M$ .*

**Poznámka 2.1.** Nedefinovali jsme ovšem pojem *lomená čára*. Pro prostory dimenze 2 a 3 pojmu intuitivně rozumíme a pro prostory vyšší dimenze jej používat nebudeme. Zájemce o tuto problematiku najde poučení v odborné literatuře.

**Definice 2.8** (oblast, uzavřená oblast, kompaktní množina). *Otevřená souvislá množina se nazývá oblast. Uzavřená souvislá množina se nazývá uzavřená oblast. Uzavřená ohraničená množina se nazývá kompaktní.*

**Poznámka 2.2.** Je-li  $X \in M$ , je bod  $X$  buď hraničním bodem, nebo vnitřním bodem množiny  $M$ .

<sup>2</sup>Blíží než jakékoliv kladné číslo.



### 3. Funkce

V praktických aplikacích často hodnoty veličiny závisí ne na hodnotách jedné jediné jiné veličiny, ale na více faktorech<sup>3</sup>. Je proto logické, využívat pro popis fyzikálního obrazu světa funkce více proměnných. Následující definice je rozšířením definice funkce jedné proměnné, kterou znáte z úvodního kurzu matematiky.

**Definice 3.1** (funkce, definiční obor, obor hodnot). Řekneme, že pravidlo  $f$  je **funkcí  $n$  proměnných** s **definičním oborem**  $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$  a **oborem hodnot**  $Im(f) \subseteq \mathbb{R}$ , jestliže toto pravidlo každému  $X \in D(f)$  přiřazuje jediné číslo  $Y \in Im(f)$ . Píšeme  $Y = f(X)$ . Prvek  $X$  nazýváme **vzor** a číslo  $Y$  **obraz**. Je-li  $f$  funkce  $n$  proměnných, píšeme  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

**Poznámka 3.1.** U funkce dvou proměnných pro přehlednost používáme raději názvy veličin, než názvy bodů z abstraktního Euklidovského prostoru. Píšeme-li například pro konkrétnost  $X = (x, y)$  a  $Y = z$ , funkci dvou proměnných potom chápeme jako předpis  $z = f(x, y)$ . Podobně funkcí tří proměnných budeme častěji rozumět předpis  $u = f(x, y, z)$ .

Stejně jako u funkce jedné proměnné, pro funkci dvou proměnných zavádíme pojem graf<sup>4</sup>, který umožňuje názorné vysvětlení mnoha vztahů a pojmů, které budeme používat. Pojem graf je možno definovat i pro funkci  $n$  proměnných, zde však ztrácí svou geometrickou názornost, protože naše geometrická představivost většinou končí u prostorů dimenze 3.

<sup>3</sup>Například objem válce závisí nejenom na jeho výšce, ale i na poloměru podstavy.

**Definice 3.2** (graf, vrstevnice). Uvažujme funkci dvou proměnných  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . *Grafem funkce*  $f$  rozumíme množinu bodů  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  s vlastností  $z = f(x, y)$ . Zpravidla touto množinou bude nějaká plocha v prostoru. Necht'  $C \in \text{Im}(f)$  je předem dané číslo. *Vrstevnicí na úrovni  $C$*  rozumíme množinu všech bodů  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , splňující  $f(x, y) = C$ .

**Poznámka 3.2** (geometrická představa). Geometricky lze graf funkce dvou proměnných chápat jako plochu v trojrozměrném prostoru, popsáném souřadnicemi  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Vrstevnice na úrovni  $C$  je potom křivka, která je řezem grafu funkce rovinou  $z = C$ , tj. vodorovnou rovinou, procházející bodem  $[0, 0, C]$ .

**Motivace.** Zatímco v diferenciálním počtu funkcí jedné proměnné je limita zcela zásadním pojmem, v diferenciálním počtu funkcí dvou a více proměnných je limita nepoměrně obtížnější pojem<sup>4</sup>. Proto se také limita funkce více proměnných používá poměrně zřídka. Například derivace funkce *více proměnných* není definována pomocí limity funkce více proměnných, ale pouze pomocí limity funkce *jedné proměnné*.

**Definice 3.3** (limita). Necht'  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce  $n$  proměnných definovaná v nějakém ryzím okolí bodu  $A \in \mathbb{R}^n$ . Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $A$  *limitu* rovnu číslu  $L \in \mathbb{R}$ , jestliže pro každé okolí  $O(L)$  bodu  $L$  existuje ryzí okolí  $\bar{O}(A)$  bodu  $A$  takové, že obrazy všech bodů z tohoto ryzího okolí bodu  $A$  leží v okolí bodu  $L$ , tj. pro všechna  $X \in \bar{O}(A)$  platí  $f(X) \in O(L)$ . Píšeme

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = L.$$

<sup>4</sup> Důvodem je skutečnost, že zatímco k bodu na přímce se můžeme blížit jenom dvěma způsoby (zprava a zleva), existuje nepoměrně více možností je se blížit k bodu v rovině nebo v  $n$  rozměrném prostoru.

**Poznámka 3.3.** V případě limity funkce dvou proměnných  $f(x, y)$  píšeme pro limitu v bodě  $(x_0, y_0)$  pro konkrétnost

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

**Poznámka 3.4.** Podobně jako pro funkci jedné proměnné platí:

- Má-li funkce limitu, je limita v tomto bodě určena jednoznačně, tj. existuje-li číslo  $L$ , splňující definici limity, je toto číslo jediné s danou vlastností.
- Limita součtu (součinu, rozdílu, podílu) je rovna součtu (součinu, rozdílu, podílu) jednotlivých limit, pokud tyto jednotlivé limity existují a příslušná operace je definována, tj. nejedná se o operaci typu  $\pm\infty \mp \infty$ ,  $0\infty$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $\frac{k}{0}$ ,  $\frac{0}{0}$ .
- Na rozdíl od funkce jedné proměnné u funkce více proměnných neexistuje analogie l'Hospitalova pravidla pro výpočet "neurčitých výrazů".

V bodě, kde funkce má limitu, funkce nemusí být definována. Jestliže v tomto bodě funkce definována je, funkční hodnota nemá žádný vliv na existenci ani hodnotu limity. Je-li však funkční hodnota a hodnota limity stejná, je funkce do jisté míry pěkná – je spojitá.

**Definice 3.4** (spojitost). Řekneme, že funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je *spojitá v bodě  $A$* , jestliže

- existuje  $f(A)$ , tj. funkce  $f$  je v bodě  $A$  definovaná,
- existuje  $\lim_{X \rightarrow A} f(X)$ , tj. funkce  $f$  má v bodě  $A$  limitu,
- platí  $f(A) = \lim_{X \rightarrow A} f(X)$ .

Řekneme, že funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je *spojitá na otevřené množině  $M$* , je-li spojitá ve všech bodech množiny  $M$ .

**Poznámka 3.5.** Jak jsme poznamenali, s limitou funkce dvou a více proměnných se pracuje poměrně obtížně. Následující věta uvádí jednu z možností jak ekvivalentně definovat spojitost bez použití pojmu limita.

**Věta 3.1** (ekvivalentní definice spojitosti). Necht'  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce  $n$  proměnných definovaná v nějakém okolí bodu  $A \in \mathbb{R}^n$ . Řekneme, že funkce  $f$  je v bodě  $A$  spojitá, jestliže pro každé okolí  $O(f(A))$  bodu  $f(A)$  existuje okolí  $\overline{O}(A)$  bodu  $A$  takové, že obrazy všech bodů z tohoto okolí bodu  $A$  leží v okolí bodu  $O(f(A))$ , tj. pro všechna  $X \in \overline{O}(A)$  platí  $f(X) \in O(f(A))$ .

Zjišťovat spojitost pomocí definice, případně pomocí předchozí věty, je značně nepraktické a složité. Následující věta však ukazuje, že v praxi pracujeme téměř výhradně se spojitými funkcemi. Přesněji: funkce reprezentované výrazem konečné délky sestaveným z funkcí uvedených v následujícím výčtu jsou spojitě všude, kde jsou definované.

**Věta 3.2 (spojitost elementárních funkcí).** Všechny mnohočleny, goniometrické, cyklometrické, exponenciální a logaritmické funkce, obecná mocnina a dále všechny funkce, které z nich získáme konečným počtem operací sčítání, odečítání, násobení, dělení a skládání těchto funkcí navzájem jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

**Poznámka 3.6.** V praxi tedy limitu výše uvedených funkcí umíme vypočítat dosazením. Pouze, pokud to “nelze”, tj. pokud bod, v němž počítáme limitu, není v definičním oboru funkce, musí se tato limitu počítat jinak a situace se liší případ od případu (připomínám, že u funkcí více proměnných neexistuje obdoba l'Hospitalova pravidla). U funkcí více proměnných se limitou zabýváme spíše výjimečně.

Nejdůležitější aplikací limit u funkce jedné proměnné byla možnost definovat rychlost růstu této funkce jako směrnici tečny a směrnici tečny počítat jako limitu ze směrnic sečny ke grafu funkce.

Prochází-li funkce bodem  $(x, f(x))$  a bodem  $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ , je směrnice sečny procházející těmito body rovna podílu  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ . Směrnice tečny (a tedy i rychlost růstu) v bodě  $x$  je potom limita

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Do jisté míry analogický postup použijeme i u funkce jedné proměnné. Že je situace komplikovanější očekává každý, kdo někdy stál na nerovné ploše – jiným směrem je to “co nejrychleji dolů”<sup>5</sup>, jiným směrem to je “po vrstevnici”<sup>6</sup> a jiným směrem to je “strmě vzhůru”<sup>6</sup>. To, zda funkční hodnoty rostou a klesají a jak rychle, tedy závisí na směru, kterým se díváme. My se budeme zabývat tím, jaká je rychlost růstu ve dvou význačných směrech – rovnoběžně s každou ze souřadných os.

<sup>5</sup>Tím směrem se vydá člověk pro jablko, které mu upadlo a on jej chce dohonit.

<sup>6</sup>Směr, kterým se vydávají jedinci, toužící dosáhnout maximálního sportovního výkonu.

**Definice 3.5** (parciální derivace). Necht'  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce dvou proměnných. Řekneme, že funkce má v bodě  $(x, y)$  **parciální derivaci podle proměnné  $x$**  rovnu číslu  $f'_x(x, y)$ , jestliže existuje konečná limita

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Řekneme, že funkce má **na otevřené množině  $M$  parciální derivaci podle  $x$** , jestliže má v každém bodě množiny  $M$  parciální derivaci podle  $x$ . Předpisem, který každému bodu takovéto množiny  $M$  přiřadí hodnotu parciální derivace podle  $x$  v tomto bodě je definována funkce nazývaná **parciální derivace podle  $x$** . Podobně definujeme parciální derivaci podle  $y$  pomocí limity

$$f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Opětovným derivováním těchto funkcí dostáváme druhé a vyšší derivace (podobně jako v jedno-rozměrném případě).

Podle definice vidíme, že při parciální derivaci podle  $x$  se vlastně jedná o to, že na funkci dvou proměnných  $f : z = f(x, y)$  pohlížíme pouze jako na funkci proměnné  $x$ , proměnné  $y$  si nevšímáme<sup>7</sup> a derivace této funkce (ve smyslu derivace funkce jedné proměnné) je parciální derivace funkce  $f$  podle proměnné  $x$ . Podobně, pohlížíme-li na funkci  $f$  pouze jako na funkci proměnné  $y$ , je derivace této funkce jedné proměnné parciální derivací funkce  $f$  podle  $y$ . Zcela analogicky definujeme parciální derivace funkcí  $n$  proměnných.

<sup>7</sup> přesněji: pohlížíme na ni jako na parametr a pracujeme s ní jako s libovolným reálným číslem

**Poznámka 3.7.** Derivaci funkce  $z = f(x, y)$  podle  $x$  označujeme též  $f_x$ ,  $z'_x$ ,  $z_x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x}$ . Podobně pro derivaci podle  $y$ . Druhé derivace označujeme  $z''_{xx}$ ,  $f''_{yy}$ ,  $z''_{xy}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  a podobně.

Druhé parciální derivace funkce dvou proměnných jsou celkem čtyři. Následující věta ukazuje, že smíšené druhé derivace jsou většinou totožné, tj. že druhé derivace existují ve většině případů pouze tři.

**Věta 3.3 (Schwarzova věta).** Jsou-li parciální derivace  $f''_{xy}$  a  $f''_{yx}$  definované a spojitě na otevřené množině  $M$ , pak jsou totožné, tj. pro všechna  $(x, y) \in M$  platí

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

V praxi jsou předpoklady předchozí věty téměř bez výjimky splněny a větu je možné zobecnit pro derivace libovolného řádu. Není proto nutné rozlišovat při derivování pořadí, podle kterého derivujeme, ale pouze počet kolikrát derivujeme podle  $x$  a kolikrát podle  $y$ .

**Poznámka 3.8** (praktický výpočet parciální derivace). Poznamenejme ještě že při praktickém výpočtu používáme pro výpočet parciálních derivací tatáž pravidla jako pro výpočet obyčejných derivací, tj. používáme vzorce pro derivaci součinu, podílu, složené funkce, součtu, rozdílu apod. Oprávněnost tohoto postupu je dána faktem, že parciální derivace funkce více proměnných je podle definice rovna (obyčejné) derivaci této funkce podle uvažované proměnné, pokud na ostatní proměnné pohlížíme jako na parametry a pracujeme s nimi tedy analogicky jako s reálnými konstantami.

**Definice 3.6** (hladké funkce). Buď  $M$  otevřená množina. Řekneme, že funkce  $f$  je **hladká** na  $M$ , jestliže má na množině  $M$  spojitě všechny parciální derivace prvního řádu. Řekneme, že funkce  $f$  je na  $M$  **hladká řádu  $k$** , jestliže má na množině  $M$  spojitě všechny parciální derivace do řádu  $k$  včetně. Množinu spojitých funkcí na  $M$  označujeme  $C(M)$ , množinu hladkých funkcí  $C^1(M)$ , množinu hladkých funkcí řádu  $k$  označujeme  $C^k(M)$ .

**Poznámka 3.9** (důsledky existence a spojitosti parciálních derivací). V bodě, ve kterém má funkce jedné proměnné derivaci, je funkce spojitá a má tečnu. U funkce více proměnných podobná věta **neplatí**, z existence parciálních derivací **neplyne spojitost**. Spojitost plyne až z **existence** a **spojitosti** parciálních derivací. Následující věta udává, že funkce hladké v okolí nějakého bodu jsou v tomto bodě spojitě, mají tomto bodě tečnou rovinu a funkční hodnoty těchto funkcí lze aproximovat funkčními hodnotami na této tečné rovině.

**Věta 3.4** (dostatečná podmínka spojitosti, lineární aproximace funkce pomocí parciálních derivací). Nechť funkce  $f$  má definované a spojitě parciální derivace v okolí bodu  $(x_0, y_0)$ . Potom platí následující.

- Funkce  $f$  je v bodě  $(x_0, y_0)$  spojitá.
- Rovina o rovnici

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

je tečná rovina ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$



- Platí přibližný vzorec

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

V tomto vzorci je přesnost tím větší, čím

- je menší vzdálenost bodů  $(x, y)$  a  $(x_0, y_0)$ ,
- jsou menší druhé derivace funkce  $f$  (pokud existují).

**Poznámka 3.10** (tečná rovina). Pozorný čtenář si jistě všiml, že jsme nedefinovali pojem “tečná rovina”. Definici tohoto pojmu je poněkud komplikovaná, jedná se však pouze o rigorózní vyjádření toho, co si pod tímto pojmem zpravidla představuje člověk, jež má zkušenosti například s tečnou rovinou ke kouli. Protože se snažíme náš výklad co nejméně formalizovat, budeme se spoléhat jenom na tuto intuitivní představu tečné roviny.

**Definice 3.7** (totální diferenciál, kmenová funkce). Necht'  $f(x, y)$  je funkce dvou proměnných, která má spojitě parciální derivace. Výraz

$$df(x, y) = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy \quad (3.1)$$

se nazývá **totální diferenciál funkce**  $f(x, y)$ . Funkce  $f(x, y)$  se nazývá **kmenová funkce** tohoto diferenciálu.

**Věta 3.5** (charakterizace totálního diferenciálu). Necht' funkce  $P(x, y)$  a  $Q(x, y)$  mají spojité parciální derivace na otevřené souvislé množině  $M$ . Výraz

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce na množině  $M$  právě tehdy, když platí

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

**Poznámka 3.11** (funkce zadaná implicitně). Uvažujme funkci  $f(x, y)$  dvou proměnných, splňující v nějakém bodě  $(x_0, y_0)$  podmínku  $f(x_0, y_0) = 0$  a mající v okolí bodu  $(x_0, y_0)$  spojité parciální derivace.

- Rovnice  $f(x, y) = 0$  vrstevnice na úrovni 0 popisuje křivku procházející bodem  $(x_0, y_0)$ .
- Dosadíme-li  $z = 0$  v rovnici tečné roviny ke grafu funkce v bodě  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0) = 0)$ , obdržíme rovnici přímky v rovině  $z = 0$  (tj. v rovině obsahující osy  $x$  a  $y$ )

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0, \quad (3.2)$$

která je tečnou k uvažované vrstevnici.

- Normálový vektor této přímky, tj. vektor  $\vec{n} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$ , se nazývá **gradient** funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ , označujeme jej  $\text{grad} f$ , nebo  $\nabla f$ . Jedná se o vektor kolmý v bodě  $(x_0, y_0)$  k uvažované vrstevnici na úrovni 0. Tento vektor udává směr, ve kterém funkce  $f$  nejrychleji roste.

- Platí-li  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$  (tj. není-li tečna (3.2) svislá přímka bez směrnice), je rovnicí  $f(x, y) = 0$  v okolí bodu  $(x_0, y_0)$  implicitně určena **právě jedna spojitá funkce**  $y = g(x)$  (tj. vrstevnice je v okolí bodu  $(x_0, y_0)$  grafem nějaké spojitě funkce  $g$ ).
- Funkce  $g$  z předchozího bodu má v  $x_0$  derivaci, která je rovna je směrnici tečny (3.2), tj. platí

$$g'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$$

#### 4. Derivace složené funkce

Jak již bylo řečeno, v praxi při výpočtu parciální derivace zadané funkce používáme “obvyklá” pravidla pro derivování funkce jedné proměnné, přičemž proměnné, přes které nederivujeme, považujeme za konstanty. Parciální derivace vystupují v řadě praktických aplikací, například rovnice vedení tepla na dvourozměrné desce, kde teplota  $T(t, x, y)$  je funkcí času  $t$  a polohy  $(x, y)$  má tvar

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 T}{(\partial y)^2},$$

kde  $k$  je materiálová konstanta. Někdy je pro řešení úlohy vhodné zvolit jiné než kartézské souřadnice, které lépe charakterizují fyzikální podstatu problému.<sup>8</sup> Zde je nutno tedy umět derivovat i v případě, že funkci  $T$  neznáme. Představíme si tedy jistou analogii pravidla pro derivaci složené funkce. Pro jednoduchost předpokládejme, že všechny funkce se kterými pracujeme v následující větě mají spojitě parciální derivace v oblasti, ve které pracujeme.

<sup>8</sup>Například v případě kruhové desky je optimální udávat polohu pomocí vzdálenosti od středu a pomocí odchylky od nějakého význačného směru.

**Věta 4.1.** Uvažujme funkci  $z(x, y)$  a necht'  $x = f(u, v)$ ,  $y = g(u, v)$ . Potom derivace složené funkce  $z(f(u, v), g(u, v))$  podle  $u$  je dána vztahem

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

**Příklad 4.1.** Uvažujme funkci dvou proměnných  $z(x, y)$ . Položme  $x = r \cos \varphi$  a  $y = r \sin \varphi$ . Potom  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  a  $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ . Platí

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \varphi + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \sin \varphi.$$

## 5. Extremální úlohy

**Motivace (tři typy extremálních úloh pro funkce více proměnných).** Předpokládejme, že funkce  $f$  je spojitá a je definována v bodě  $(x_0, y_0)$ , který je buď vnitřním nebo hraničním bodem definičního oboru. Bude nás zajímat, kdy jsou funkční hodnoty v bodě  $(x_0, y_0)$  “co největší”, tj. kdy bude platit

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \quad \text{pro } (x, y) \neq (x_0, y_0), \quad (5.1)$$

případně, kdy bude platit

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y). \quad (5.2)$$

Pokud platí první z nerovností, říkáme, že funkce  $f$  má v bodě  $(x_0, y_0)$  **ostré maximum** a u druhé z nerovností říkáme, že funkce má v bodě  $(x_0, y_0)$  **neostré maximum**. Přitom musíme důkladně specifikovat, co přesně těmito nerovnostmi rozumíme, tj. pro která  $(x, y)$  musí nerovnost platit. Tím se budou jednotlivé druhy maxim lišit. V praxi má smysl rozeznávat tři druhy extremálních úloh, které jsou postupně uvedeny v následujících definicích.

**Definice 5.1** (lokální maximum). Je-li bod  $(x_0, y_0)$  vnitřním bodem definičního oboru a nerovnost (5.1) (případně (5.2)) platí **pro všechna**  $(x, y)$  **z nějakého okolí bodu**  $(x_0, y_0)$ , říkáme, že funkce má v bodě  $(x_0, y_0)$  **ostré lokální maximum** (případně **lokální maximum**).

**Definice 5.2** (absolutní maximum). Je-li funkce definovaná na předem zadané množině  $M$  a platí-li nerovnost (5.1) (případně (5.2)) **pro všechna**  $(x, y) \in M$ , říkáme, že funkce má v bodě  $(x_0, y_0)$  **ostré absolutní maximum** (případně **absolutní maximum**) **na množině**  $M$ .

**Definice 5.3** (vázané maximum). Uvažujme další předem zadanou spojitou funkci dvou proměnných  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , která splňuje  $g(x_0, y_0) = 0$ , tj. bod  $(x_0, y_0)$  leží na vrstevnici  $g(x, y) = 0$  grafu funkce  $g$ . Rovnici této vrstevnice

$$g(x, y) = 0 \quad (5.3)$$

budeme nazývat **vazební podmínkou**. Platí-li nerovnost (5.1) (případně (5.2)) **pro všechna**  $(x, y)$  **z nějakého okolí bodu**  $(x_0, y_0)$ , **která splňují vazební podmínku** (5.3), říkáme, že funkce má v bodě  $(x_0, y_0)$  **ostré vázané lokální maximum** (případně **vázané lokální maximum**) **vzhledem k vazební podmínce** (5.3).

**Definice 5.4** (lokální, absolutní a vázané minimum). Změníme-li směr nerovností (5.1) a (5.2), obdržíme podobně (ostré) **lokální minimum**, (ostré) **absolutní minimum na množině**  $M$  a (ostré) **vázané lokální minimum při vazební podmínce** (5.3).

**Věta 5.1** (absolutní extrémy na kompaktní množině, Weierstrassova věta). *Spojité funkce má na kompaktní množině absolutní maximum a absolutní minimum.*

**Poznámka 5.1** (geometrická interpretace). Geometricky graf funkce dvou proměnných zpravidla chápeme jako plochu v trojrozměrném prostoru. Geometrická interpretace jednotlivých typů extrémů je potom následující.

- Ostré **lokální maximum** je takové místo na grafu funkce, které má nejvyšší funkční hodnotu ve srovnání s body *z nejbližšího okolí*<sup>9</sup>.
- Uvažujme jenom tu část grafu, jejímž kolmým průmětem do roviny  $z = 0$  (tj. do roviny obsahující osy  $x$  a  $y$ ) je právě množina  $M$ . Ostré **absolutní maximum na množině  $M$**  odpovídá bodu, který má nejvyšší funkční hodnotu ve srovnání *se všemi ostatními body uvažované části grafu*<sup>10</sup>.
- Uvažujme jenom body na grafu funkce  $f$ , které splňují vazební podmínku (5.3). Tyto body vytvoří křivku na grafu funkce  $f$  a tato křivka<sup>11</sup> prochází podle předpokladů bodem  $(x_0, y_0)$ . **Vázané ostré lokální maximum při vazební podmínce** (5.3) je takové místo na grafu funkce,

<sup>9</sup>Z lokálního maxima je většinou pěkný rozhled po nejbližším okolí. Pozor, platí to jenom lokálně, vedlejší kopec může být mnohem vyšší a výhled do dálky může zastínit.

<sup>10</sup>Absolutní maximum v nadmořské výšce v ČR je pořád směšně malé v porovnání s celou Evropou. Nicméně, v ČR se nikam výš než na Sněžku nepodíváme.

<sup>11</sup>Křivku je možno obdržet například tak, že na grafu funkce  $g$  nakreslíme vrstevnici danou vazební podmínkou  $g(x, y) = 0$  a tuto vrstevnici promítneme pomocí kolmého promítání na graf funkce  $f$ .

které má nejvyšší funkční hodnotu ve srovnání *s těmi body z nejbližšího okolí, které leží na uvažované křivce*<sup>12</sup>.

- Interpretace neostrých extrémů je stejná, připouštíme navíc, že se mohou vyskytovat body, mající stejné funkční hodnoty, jako je příslušné maximum.

**Poznámka 5.2** (derivate jako nutná podmínka existence lokálních extrémů). V diferenciálním počtu funkcí jedné proměnné platí poučka, že funkce nemá lokální extrém v bodě, v jehož okolí je rostoucí nebo klesající. Podezřelými body pro existenci lokálních extrémů jsou tedy pouze body, kde je derivace nulová, nebo kde derivace neexistuje. Analogické pravidlo platí i pro funkce více proměnných, jak uvádí následující věta.

**Věta 5.2 (Fermatova).** *Jestliže funkce  $f(x, y)$  má v bodě  $(x_0, y_0)$  lokální extrém (ostrý nebo neostrý), pak každá parciální derivace, která v tomto bodě existuje, je nulová.*

**Definice 5.5** (stacionární bod). *Bod  $(x_0, y_0)$  z definičního oboru funkce  $f$ , ve kterém platí*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 = f'_y(x_0, y_0). \quad (5.4)$$

*se nazývá stacionární bod funkce  $f$ .*

<sup>12</sup> Jestliže je naší vazební podmínkou vyznačená turistická cestička v rezervaci, pak vázané lokální maximum jsme minuli v bodě, kdy se naše klopýtání do kopce změnilo v chůzi z kopce. (I když jsme třeba vrchol kopce nedosáhli a jenom jsme jej obešli. Slušně vycvičený turista se dostane jenom tam, kam mu to vazební podmínka dovolí.)

**Poznámka 5.3** (důsledek Fermatovy věty). Lokální extrém tedy může nastat buď ve stacionárním bodě, nebo v bodě, kde alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje. Z těchto “kandidátů” navíc můžeme vyloučit ty, pro které některé parciální derivace neexistují a z těch co existují je alespoň jedna nenulová.

**Poznámka 5.4** (stanovení typu lokálního extrému). V ryze praktických případech někdy poznáme z povahy úlohy, že ve stacionárním bodě je extrém a jaký. Například pokud z formulace úlohy je zřejmé, že funkce má nějaké lokální minimum a pokud vyjde jediný stacionární bod, je zřejmé, že lokální minimum je v tomto bodě<sup>13</sup>. U funkce jedné proměnné jsme věděli, že ve stacionárním bodě je buď lokální maximum, minimum nebo inflexní bod a dokázali jsme mezi jednotlivými alternativami rozlišit pomocí *monotonie*<sup>14</sup> nebo pomocí *druhé derivace*<sup>15</sup>. U funkcí dvou proměnných umíme rozhodnout o tom, zda a jaký lokální extrém ve stacionárním bodě nastává, pomocí *druhých derivací*, což je uvedeno v následující větě.

**Věta 5.3** (test pomocí druhé derivace). *Nechť bod  $(x_0, y_0)$  je stacionárním bodem funkce  $f$  a nechť funkce  $f$  má spojitě všechny parciální derivace druhého řádu v okolí tohoto bodu. Označme symbolem  $H$  následující determinant*

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

*Nastane právě jeden z následujících případů*

- $H > 0$  a  $f''_{xx} > 0$ . Potom má funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$  ostré lokální minimum.

<sup>13</sup>Toto nastává například při odvozování vzorců pro metodu nejmenších čtverců

<sup>14</sup>kterou ovšem *nelze* nijak přirozeně rozšířit na funkce více proměnných

<sup>15</sup>ovšem pouze v případě že druhá derivace funkce byla nenulová



- $H > 0$  a  $f''_{xx} < 0$ . Potom má funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$  ostré lokální maximum.
- $H < 0$ . Potom funkce  $f$  nemá v bodě  $(x_0, y_0)$  lokální extrém.
- $H = 0$ . Nelze rozhodnout o existenci a kvalitě lokálního extrému pomocí druhých derivací. Může nastat kterýkoliv z výše uvedených případů.

**Definice 5.6** (Hessián). Matice uvedená v předchozí větě se nazývá **Hessova matice** a její determinant se nazývá **Hessián**.

**Poznámka 5.5** (lokální extrémy funkce více než dvou proměnných). Všechny výše uvedené poznatky lze snadno zobecnit i na funkce **3** a obecně  **$n$**  proměnných. Výjimkou je v tomto směru pouze předchozí věta, která je v případě funkcí více než **2** proměnných ztlačně složitější.

**Poznámka 5.6.** Všimněte si, že Věta **5.3** je nepoužitelná v případě, že některá z parciálních derivací neexistuje. Rozhodnout v takovém případě o existenci lokálního extrému je obecně velice obtížný úkol. Při řešení takového úkolu opět nepříjemně pocítíme skutečnost, že zde **nemáme** jednu pěknou vlastnost, která nám v podobných případech pomáhala u funkce jedné proměnné – totiž **monotonii**.

**Poznámka 5.7** (stanovení lokálních extrémů funkce dvou proměnných).

- Nalezneme parciální derivace funkce  $f$ .
- Vyřešíme soustavu dvou rovnic pro stacionární body.
- Nalezneme druhé derivace funkce  $f$ .



- Rozhodneme pomocí Hessiánu pro každý stacionární bod individuálně, zda a jaký v něm nastává lokální extrém.
- Body, v nichž nelze podle předchozího kroku rozhodnout a body, v nichž neexistuje alespoň jedna z prvních parciálních derivací, vyšetřujeme individuálně.

**Poznámka 5.8** (vázané lokální extrémy funkce dvou proměnných). Předpokládejme, že z vazební podmínky (5.3) lze explicitně vypočítat buď  $y = \varphi(x)$ , nebo  $x = \psi(y)$ . Uvažujme nejprve první případ.

- Dosadíme vztah  $y = \varphi(x)$  do funkce  $f(x, y)$  a studujeme funkci  $f(x, \varphi(x))$ , která je již funkcí jedné proměnné.
- Nalezneme lokální extrémy této funkce jedné proměnné postupem známým z diferenciálního počtu funkce jedné proměnné.
- Je-li bod  $x_0$  lokálním extrémem funkce  $f(x, \varphi(x))$ , je bod  $(x_0, \varphi(x_0))$  vázaným lokálním extrémem stejného typu funkce  $f(x, y)$  při vazební podmínce (5.3).

Pokud nelze z vazební podmínky vypočítat  $y$ , ale lze vypočítat  $x = \psi(y)$ , postupujeme analogicky.

- Dosadíme vztah  $x = \psi(y)$  do funkce  $f(x, y)$  a studujeme funkci  $f(\psi(y), y)$ , která je již funkcí jedné proměnné  $y$ .
- Nalezneme lokální extrémy této funkce jedné proměnné.
- Je-li bod  $y_0$  lokálním extrémem funkce  $f(\psi(y), y)$ , je bod  $(\psi(y_0), y_0)$  vázaným lokálním extrémem stejného typu funkce  $f(x, y)$  při vazební podmínce (5.3).

Jsou i vazební podmínky, které nesplňují výše uvedené předpoklady. V těchto případech nejčastěji používáme postup využívající *Lagrangeových multiplikátorů* (možno nalézt v odborné literatuře).

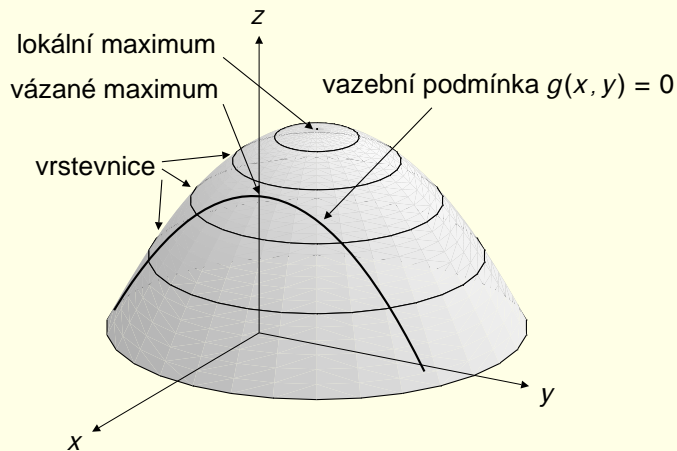
**Poznámka 5.9** (vázané lokální extrémy funkce tří proměnných). Předpokládejme, že hledáme extrém funkce tří proměnných  $f(x, y, z)$  při vazební podmínce  $g(x, y, z) = 0$ . Předpokládejme, že z vazební podmínky lze vyjádřit jednu z proměnných pomocí ostatních, nechť je to například  $z$ . Lze tedy  $g(x, y, z) = 0$  přepsat do tvaru  $z = \varphi(x, y)$ . Dosadíme-li tento vztah do funkce  $f$ , obdržíme funkci  $f(x, y, \varphi(x, y))$ , která je funkcí dvou proměnných  $x$  a  $y$ . Nalezneme lokální extrémy této funkce. Je-li  $(x_0, y_0)$  takovým lokálním extrémem, je bod  $(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))$  vázaným lokálním extrémem stejného typu funkce  $f(x, y, z)$  při vazební podmínce  $g(x, y, z) = 0$ .

**Poznámka 5.10** (absolutní extrémy funkce dvou proměnných). Mějme zadánou hladkou funkci  $f$  definovanou na kompaktní množině  $M$ .

- Nejprve vyšetříme vnitřek množiny  $M$  – nalezneme všechny lokální extrémy funkce  $f$  ležící uvnitř množiny  $M$ . Pouze v těchto vnitřních bodech může funkce nabývat absolutního extrému. Toto budou první “kandidáti” na absolutní extrém.
- Vyšetříme hranici množiny  $M$ . Zpravidla je nutné, rozdělit tuto hranici na několik částí. Každou část hranice vyjádříme příslušnou rovnicí, každá taková rovnice bude vazební podmínkou. Postupně hledáme vázané lokální extrémy při těchto vazebních podmínkách. Toto budou další “kandidáti” na body, v nichž může nastat absolutní extrém.
- Pokud jsme v předchozím kroku hranici množiny  $M$  rozdělili na více částí, přidáme ke “kandidátům” i body, kde se jednotlivé části hranice setkávají.

- V každém bodě, který jsme pomocí některého z předchozích kroků zařadili mezi “kandidáty” na absolutní extrém vypočteme funkční hodnotu. Z vypočtených funkčních hodnot (bude jich zpravidla konečně mnoho) vybereme největší a nejmenší — tyto hodnoty odpovídají absolutnímu maximu a absolutnímu minimu funkce  $f$  na množině  $M$ .

**Věta 5.4 (Bolzanova).** *Nechť  $f$  je funkce dvou proměnných spojitá na otevřené souvislé množině  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  a nechť pro některé  $A, B \in M$  platí  $f(A)f(B) < 0$ , tj. nechť se  $f(A)$  a  $f(B)$  liší znaménkem. Pak existuje bod  $C \in M$  s vlastností  $f(C) = 0$ .*



Obrázek 1.1: Jednotlivé typy extrémů funkce dvou proměnných.

## Kapitola 2

# Diferenciální rovnice

Rychlost změny veličin v čase matematicky vyjadřujeme pomocí derivace<sup>?</sup>. Fyzikální zákony dávají často tuto rychlost do souvislosti s ostatními veličinami<sup>1</sup>. Takto zcela přirozeně dospíváme k rovnicím, které dávají do souvislosti derivaci neznámé veličiny s veličinami ostatními – k diferenciálním rovnicím<sup>?</sup>.

---

<sup>1</sup>Například Newtonův pohybový zákon (*časová změna hybnosti je rovna výsledné působící síle*) má matematické vyjádření: derivace součinu hmotnosti a rychlosti podle času je rovna působící síle.

## 1. Diferenciální rovnice – úvod

**Motivace – základní úloha integrálního počtu.** Na intervalu  $I$  je dána spojitá funkce  $f(x)$ . Nalezněte funkci  $y = y(x)$ , která na intervalu  $I$  splňuje vztah

$$y'(x) = f(x). \quad (1.1)$$

Řešení

$$y(x) = \int f(x) dx + C, \quad (1.2)$$

kde  $\int f(x) dx$  je libovolná primitivní funkce k funkci  $f(x)$  na intervalu  $I$  a  $C$  je integrační konstanta, která může nabývat libovolné reálné hodnoty.

**Příklad 1.1.** Uvažujme lano, které nese hmotnost rovnoměrně rozloženou ve *vodorovném* směru. Lano zaujme tvar křivky splňující diferenciální rovnici

$$y' = ax, \quad (1.3)$$

kde  $a$  je konstanta charakterizující hmotnost, kterou lano nese, a sílu, která lano napíná. Všechny funkce, které splňují rovnici (1.3) jsou tvaru  $y = a \frac{x^2}{2} + C$ , kde  $C$  je konstanta.

**Motivace – počáteční podmínka.** Základní úloha integrálního počtu má nekonečně mnoho řešení, které závisí na jedné reálné konstantě. V praxi je zpravidla nutno z této množiny vybrat nějaké konkrétní (tzv. *partikulární*) řešení, které splňuje jistou dodatečnou podmínku – tzv. *počáteční podmínku*. V předchozím příkladě s lanem je nutné konce nosného lana ukotvit někde na pevnině a logicky tedy z množiny všech parabol nás bude zajímat jen jedna – ta, která prochází bodem

upevnění. Taková úloha, která se skládá z diferenciální rovnice a počáteční podmínky, se nazývá *počáteční úloha*.

**Příklad 1.2** (počáteční úloha). Hledejme řešení počáteční úlohy

$$y' = 2x, \quad y(1) = 2.$$

**Řešení:** Integrací rovnice získáváme  $y(x) = \int 2x \, dx = x^2 + C$ . Z podmínky  $y(1) = 2$  plyne, že je-li  $x = 1$ , musí být  $y = 2$ . Dosadíme tyto hodnoty do posledního vztahu, čímž obdržíme

$$2 = 1^2 + C$$

a odsud  $C = 1$ . Řešením počáteční úlohy je tedy funkce  $y(x) = x^2 + 1$ .



**Definice 1.1** (obyčejná diferenciální rovnice). *Obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu rozřešnou vzhledem k derivaci* (stručně - diferenciální rovnici, DR) s neznámou  $y$  rozumíme rovnici tvaru

$$y' = \varphi(x, y), \quad (\text{R})$$

kde  $\varphi$  je funkce dvou proměnných.

**Řešením** (též **integrálem**) rovnice na intervalu  $I$  rozumíme každou funkci  $y = y(x)$ , která je diferencovatelná na  $I$  a splňuje zde identicky rovnici (R).

Nechť  $x_0, y_0$  jsou reálná čísla. Úloha najít řešení rovnice (R), které splňuje zadanou **počáteční podmínku**

$$y(x_0) = y_0 \quad (\text{PP})$$

se nazývá **počáteční** (též **Cauchyova**) **úloha**. Jejím řešením rozumíme funkci, která splňuje podmínku (PP) a je na nějakém intervalu obsahujícím bod  $x_0$  řešením rovnice (R).

Řešení Cauchyovy úlohy nazýváme též **partikulárním řešením rovnice (R)**. Graf libovolného partikulárního řešení se nazývá **integrální křivka**.

**Poznámka 1.1.** Funkce  $y(x)$  je podle uvedené definice řešením rovnice (R) na intervalu  $I$ , jestliže

- existuje derivace  $y'(x)$  pro všechna  $x \in I$ ,
- výraz  $\varphi(x, y(x))$  je definován pro všechna  $x \in I$ ,
- rovnice (R) platí pro všechna  $x \in I$ .

**Poznámka 1.2.** Rovnici (R) někdy uvádíme v ekvivalentním tvaru

$$dy = \varphi(x, y) dx,$$

který získáme nahrazením derivace  $y'$  podílem diferenciálů  $dy/dx$  a formálním vynásobením rovnice diferenciálem  $dx$ .

**Poznámka 1.3** (obecnější tvar diferenciální rovnice). V některých aplikacích je nutno pracovat s obecnějšími diferenciálními rovnicemi tvaru

$$\Phi(x, y, y') = 0,$$

kde  $\Phi$  je funkce tří proměnných taková, že z rovnice není možné explicitně vypočítat derivaci  $y'$ . Takové rovnice nazýváme *nerozřešené vzhledem k derivaci* a v tomto textu se jimi zabývat nebudeme.

**Poznámka 1.4** (formulace hlavních problémů). V souvislosti s diferenciálními rovnicemi nás zajímají především následující otázky

- Má daná počáteční úloha řešení?
- Je toto řešení určeno jednoznačně?
- Na jakém intervalu je toto řešení definováno?
- Je možné toto řešení nalézt analytickou cestou? Pokud ano, jak?

Většina inženýrských aplikací vyžaduje, aby odpověď na první dvě otázky byla kladná. Toto je možné zaručit tehdy, není-li chování funkce  $\varphi(x, y)$  vzhledem k proměnné  $y$  “příliš divoké”. Přesněji, platí následující.

- Je-li funkce  $\varphi(x, y)$  spojitá, je počáteční úloha řešitelná (Peanova věta).
- Má-li funkce  $\varphi(x, y)$  ohraničenou parciální derivaci podle  $y$ , je řešení v nějakém okolí počáteční podmínky určeno jednoznačně (Picardova věta).

**Poznámka 1.5** (geometrický význam diferenciální rovnice). Zajímejme se o to, jak budou vypadat integrální křivky rovnice (R). Protože derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke grafu funkce v tomto bodě, lze rovnici (R) chápat jako předpis, který každému bodu v rovině přiřadí směrnici tečny k integrální křivce, která tímto bodem prochází. Sestrojíme-li v dostatečném počtu (například i náhodně zvolených) bodů  $[x, y]$  v rovině kratičké úsečky o směrnici  $\varphi(x, y)$ , obdržíme **směrové pole diferenciální rovnice** — systém lineárních elementů, které jsou tečné k integrálním křivkám. Často lze ze směrového pole odhadnout tvar integrálních křivek. Protože se však jedná pouze o **odhad** tvaru integrálních čar, používáme tuto metodu jen v případě, kdy nám stačí pouze hrubá informace o jednotlivých řešeních, nebo v případech kdy selhávají ostatní dostupné metody. Počáteční podmínka (PP) geometricky vyjadřuje skutečnost, že graf příslušného řešení prochází v rovině bodem  $[x_0, y_0]$ . Má-li tato počáteční úloha jediné řešení, neprochází bodem  $[x_0, y_0]$  žádná další křivka. Má-li každá počáteční úloha jediné řešení (což bude pro nás velice častý případ), znamená to, že integrální křivky se **nikde neprotínají**.

## 2. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

**Definice 2.1** (DR se separovanými proměnnými). Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = f(x)g(y), \quad (S)$$

kde  $f$  a  $g$  jsou funkce spojitě na (nějakých) otevřených intervalech se nazývá **obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými**.

**Příklad 2.1.** Rovnice

$$y' - x - y = 0$$

není rovnice se separovanými proměnnými.

Rovnice

$$e^{-x}y' + e^{x+y}y = 0$$

je rovnice se separovanými proměnnými, protože po explicitním vyjádření derivace  $y'$

$$y' = \frac{-e^{x+y}y}{e^{-x}}$$

je možno tuto rovnici přepsat pomocí algebraických úprav na tvar

$$y' = -ye^y \cdot e^{2x},$$

což je tvar odpovídající (S).

**Řešení DR se separovanými proměnnými** Algoritmus:

- (i) Má-li algebraická rovnice  $g(y) = 0$  řešení  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , jsou konstantní funkce  $y \equiv k_1, y \equiv k_2, \dots, y \equiv k_n$  řešeními rovnice.
- (ii) Pracujme na intervalech, kde  $g(y) \neq 0$ . Formálně nahradíme derivaci  $y'$  podílem diferenciálů  $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y). \quad (2.1)$$

(iii) Odseparujeme proměnné

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx. \quad (2.2)$$

(iv) Získanou rovnost (2.2) integrujeme

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C. \quad (2.3)$$

(v) Pokud je zadána počáteční podmínka, je možné ji na tomto místě dosadit do obecného řešení a určit hodnotu konstanty  $C$ . Tuto hodnotu poté dosadíme zpět do obecného řešení a obdržíme řešení *partikulární*.

(vi) Pokud je to možné, převedeme řešení (obecné nebo partikulární) do explicitního tvaru (“vyjádříme” odsud  $y$ ).

**Poznámka 2.1** (řešitelnost a jednoznačnost). Je-li  $g(y_0) \neq 0$ , je řešení počáteční úlohy (S), (PP), které obdržíme pomocí předchozího postupu, definované a jednoznačně určené v nějakém okolí bodu  $x_0$ .

**Poznámka 2.2** (využití určitého integrálu namísto neurčitého). Partikulární řešení počáteční úlohy (S)–(PP) lze místo (2.3) psát též přímo ve tvaru určitého integrálu

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^x f(t) dt. \quad (2.4)$$

**Poznámka 2.3** (autonomní rovnice). V mnoha biologických i technických aplikacích se setkáváme se speciálním případem rovnice se separovanými proměnnými, ve které na pravé straně *nefiguruje* nezávislá proměnná, tj. s rovnicí typu

$$y' = g(y). \quad (2.5)$$

Tyto rovnice se nazývají *autonomní diferenciální rovnice*. Pro rovnici (2.5) platí všechno co bylo dříve vysloveno pro rovnici (S). Rovnice (2.5) má však navíc poměrně často jednu důležitou vlastnost: v mnoha případech lze ukázat, že ohraničená řešení se pro  $x \rightarrow \infty$  a pro  $x \rightarrow -\infty$  v limitě blíží k některému z konstantních řešení. Další podstatnou vlastností těchto rovnic je skutečnost, že je-li funkce  $y(x)$  řešením této rovnice, platí totéž i pro funkci  $y(x + c)$ . Je-li proměnnou  $x$  čas, znamená to, že nezáleží na počátku měření času.

V praxi se někdy vzhledem k uvedeným skutečnostem u autonomních diferenciálních rovnic zajímáme jen o výše uvedená konstantní řešení, protože všechna další řešení k těmto konstantním řešením konvergují. Poznamenejme ještě, že všechna konstantní řešení vypočteme poměrně snadno již v prvním kroku algoritmu ze strany 36.

**Příklad 2.2.** Hledjme všechna konstantní řešení rovnice

$$y' = y - 1 - \frac{3y - 1}{y^2 + 1}.$$

Jiná než konstantní řešení počítat nebudeme.

**Řešení:** Konstantní funkce má nulovou derivaci. Má-li tato funkce být řešením zadané rovnice, musí platit

$$0 = y - 1 - \frac{3y - 1}{y^2 + 1}.$$

Jedná se algebraickou rovnicí tj. neznámá  $y$  je reálné číslo, nikoliv funkce. Řešením této rovnice postupně získáváme

$$0 = \frac{y^3 - y^2 - 2y}{y^2 + 1},$$

$$0 = y^3 - y^2 - 2y,$$

$$0 = y(y^2 - y - 2),$$

$$0 = y(y - 2)(y + 1).$$

Poslední rovnice má tři kořeny  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 2$  a  $y_3 = -1$ . Jedinými konstantními řešeními jsou tedy funkce  $y \equiv 0$ ,  $y \equiv 2$  a  $y \equiv -1$ .

Ve většině případů dokážeme identifikovat, zda diferenciální rovnice je rovnice se separovanými proměnnými tak, že z rovnice vyjádříme derivaci a pravou stranu rovnice se snažíme rozložit na součin dvou funkcí jedné proměnné podle vzoru (S). Následující věta udává jednoduše použitelné kritérium, které umožní poznat, zda vůbec lze tento rozklad na součin provést.

**Věta 2.1** (kritérium na ověření separability). *Nechť funkce dvou proměnných  $\varphi(x, y)$  je nenulová na konvexní oblasti  $G$  a má zde spojité všechny parciální derivace do řádu dva, včetně. Rovnice*

$$y' = \varphi(x, y)$$

*je rovnice se separovanými proměnnými a lze ji upravit na tvar (S) právě tehdy, když je na množině  $G$  nulový determinant*

$$\begin{vmatrix} \varphi(x, y) & \varphi'_x(x, y) \\ \varphi'_y(x, y) & \varphi''_{xy}(x, y) \end{vmatrix}.$$

### 3. Homogenní diferenciální rovnice

**Definice 3.1** (homogenní DR). Necht'  $f$  je spojitá funkce. Diferenciální rovnice

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{H})$$

se nazývá **homogenní diferenciální rovnice**.

Zavedeme-li novou funkci  $u$  vztahem  $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ , získáme

$$y(x) = u(x)x, \quad y'(x) = u'(x)x + u(x). \quad (3.1)$$

Po dosazení do (H) dostáváme

$$u'x + u = f(u), \quad (3.2)$$

což je ekvivalentní rovnici se separovanými proměnnými

$$u' = (f(u) - u) \frac{1}{x}.$$

### 4. Lineární diferenciální rovnice

**Definice 4.1** (lineární DR). Necht' funkce  $a, b$  jsou spojitě na intervalu  $I$ . Rovnice

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (\text{L})$$

se nazývá **obyčejná lineární diferenciální rovnice prvního řádu** (zkráceně píšeme LDR). Je-li navíc  $b(x) \equiv 0$  na  $I$ , nazývá se rovnice (L) **homogenní**, v opačném případě **nehomogenní**.



**Poznámka 4.1** (řešitelnost a jednoznačnost). Jsou-li funkce  $a$ ,  $b$  spojité na intervalu  $I$ ,  $x_0 \in I$  a  $y_0 \in \mathbb{R}$  libovolné, má každá počáteční úloha (L)–(PP) právě jedno řešení definované na celém intervalu  $I$ .

**Definice 4.2** (homogenní rovnice). *Bud' dána rovnice (L). Homogenní rovnice, která vznikne z rovnice (L) nahrazením pravé strany nulovou funkcí, tj. rovnice*

$$y' + a(x)y = 0 \quad (\text{LH})$$

*se nazývá homogenní rovnice, asociovaná s nehomogenní rovnicí (L).*

**Poznámka 4.2** (triviální řešení). Homogenní lineární diferenciální rovnice má vždy (bez ohledu na konkrétní tvar funkce  $a(x)$ ) konstantní řešení  $y = 0$ , jak lze ověřit přímým dosazením. Toto řešení se nazývá *triviální řešení* a v praktických úlohách zpravidla nemívá žádný význam.

**Poznámka 4.3** (operátorová symbolika). Definujeme-li na množině všech funkcí diferencovatelných na intervalu  $I$  operátor  $L[\cdot]$  vztahem

$$L[y](x) = y'(x) + a(x)y(x)$$

pro každé  $x \in I$ , je možno diferenciální rovnici (L) a s ní asociovanou homogenní rovnici zapsat v krátkém tvaru  $L[y] = b(x)$  a  $L[y] = 0$ .

**Poznámka 4.4** (linearita operátoru  $L[\cdot]$ ). Operátor  $L[\cdot]$  splňuje pro všechna reálná čísla  $C_1$ ,  $C_2$  a všechny diferencovatelné funkce  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  vztah

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2].$$

Vskutku:

$$\begin{aligned}
 L[C_1 y_1 + C_2 y_2](x) &= (C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))' + a(x)(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) \\
 &= C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) + a(x)C_1 y_1(x) + a(x)C_2 y_2(x) \\
 &= C_1 (y_1'(x) + a(x)y_1(x)) + C_2 (y_2'(x) + a(x)y_2(x)) \\
 &= C_1 L[y_1](x) + C_2 L[y_2](x).
 \end{aligned}$$

**Věta 4.1 (princip superpozice).** Pro libovolné diferencovatelné funkce  $y$ ,  $y_1$  a  $y_2$  a libovolné reálné číslo  $C$  platí

$$\begin{aligned}
 L[y_1] &= 0 & \Rightarrow & L[C \cdot y_1] = C \cdot 0 = 0, \\
 L[y_1] &= 0 \text{ a } L[y_2] = f(x) & \Rightarrow & L[C \cdot y_1 + y_2] = C \cdot 0 + f(x) = f(x), \\
 L[y_1] &= L[y_2] = f(x) & \Rightarrow & L[y_1 - y_2] = f(x) - f(x) = 0,
 \end{aligned}$$

Zformulujme si nejdůležitější z těchto poznatků do následující věty.

**Věta 4.2 (obecné řešení nehomogenní LDR).** Uvažujme lineární diferenciální rovnici (L) a s ní asociovanou homogenní rovnici (LH).

- Je-li  $y_p(x)$  libovolné partikulární řešení nehomogenní LDR a  $y_0(x, C)$  obecné řešení asociované homogenní LDR, je funkce

$$y(x, C) = y_p(x) + y_0(x, C) \quad (4.1)$$

obecným řešením nehomogenní LDR.

- Je-li  $y_p(x)$  libovolné partikulární řešení nehomogenní LDR a  $y_{p0}(x)$  nenulové partikulární řešení asociované homogenní LDR, je funkce

$$y(x, C) = y_p(x) + C y_{p0}(x) \quad (4.2)$$

obecným řešením nehomogenní LDR.

Slovně:

- Všechna řešení homogenní lineární rovnice jsou násobky jednoho libovolného nenulového řešení této rovnice.
- Součet jednoho libovolného řešení zadané nehomogenní a obecného řešení asociované homogenní lineární rovnice je obecným řešením dané nehomogenní rovnice.

Stačí tedy najít dvě (do jisté míry speciální) řešení a z nich snadno sestavíme obecné řešení zadané rovnice. Tímto se bude zabývat v následujících odstavcích.

## 4.1. Homogenní LDR

Podle definice je homogenní LDR rovnice tvaru

$$y' + a(x)y = 0. \quad (\text{LH})$$

- **Řešení homogenní LDR separací proměnných.**

Rovnice (LH) je rovnice se separovanými proměnnými. Vskutku, z (LH) obdržíme

$$\frac{dy}{dx} = -a(x)y$$

a pro  $y \neq 0$  platí

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y} &= -a(x) dx, \\ \ln|y| &= -\int a(x) dx + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Odsud

$$y = C e^{-\int a(x) dx}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

kde  $C$  je nenulová konstanta. Protože volbou  $C = 0$  dostáváme triviální řešení  $y \equiv 0$ , povolíme  $C \in \mathbb{R}$  libovolné. **Obecné řešení** rovnice (LH) je tvaru

$$y(x, C) = C e^{-\int a(x) dx}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

a každé partikulární řešení rovnice (LH) obdržíme vhodnou volbou konstanty  $C$ . Označíme-li  $y_{p0}$  libovolné netriviální partikulární řešení, je možno obecné řešení rovnice (LH) psát ve tvaru

$$y(x, C) = C y_{p0}(x), \quad C \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

- **Řešení homogenní LDR “selskou úvahou”.**

Slovně lze problém řešení lineární homogenní rovnice  $y' = -a(x)y$  formulovat následovně: nalezněte funkci  $y$  takovou, že její derivace je rovna funkci samotné, vynásobené navíc faktorem  $(-a(x))$ . Uvědomíme-li si, že funkce, které je rovna svojí derivaci je (mimo jiné) exponenciální funkce  $e^x$ , můžeme řešení problému hledat ve tvaru exponenciální funkce, kde se po derivaci faktor  $(-a(x))$  objeví jako derivace vnitřní složky. V exponentu tedy musí figurovat výraz, jehož derivace je  $(-a(x))$ . Řešením homogenní rovnice je tedy funkce  $y = e^{-\int a(x) dx}$  a (jak plyne z linearit) i její libovolný násobek. Vidíme, že dostáváme opět vzorec (4.3). Homogenní rovnici lze tedy se znalostí obecné teorie vyřešit překvapivě snadno.

## 4.2. Nehomogenní LDR – metoda variace konstanty

**Poznámka 4.5** (aplikace operátoru  $L[\cdot]$  na součin funkcí). Než začneme hledat řešení nehomogenní rovnice, prozkoumejme, jak se lineární operátor  $L[\cdot]$  chová vzhledem k součinu funkcí. Postupným rozepsáním definice operátoru, derivací součinu, částečným vytknutím a opětovným použitím definice operátoru  $L$  dostáváme pro libovolné dvě diferencovatelné funkce  $u, v$

$$\begin{aligned} L[u \cdot v](x) &= \left( u(x)v(x) \right)' + a(x)u(x)v(x) \\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + a(x)u(x)v(x) \\ &= v(x) \left( u'(x) + a(x)u(x) \right) + u(x)v'(x) \\ &= v(x)L[u](x) + u(x)v'(x). \end{aligned}$$

Tento výpočet ukazuje, že pokud platí  $L[u] = 0$ , tj. pokud je funkce  $u$  řešením asociované homogenní diferenciální rovnice, je možno řešení nehomogenní rovnice  $L[y] = b(x)$  hledat ve tvaru součinu  $y(x) = u(x)v(x)$ , kde funkce  $v(x)$  splňuje vztah

$$b(x) = L[u \cdot v](x) = v(x)L[u](x) + u(x)v'(x) = 0 + u(x)v'(x) = u(x)v'(x),$$

tj.  $v'(x) = b(x) / u(x)$ . Odsud však funkci  $v$  můžeme nalézt již pouhou integrací a součin  $u(x)v(x)$  poté bude řešením nehomogenní rovnice. Abychom tyto úvahy více ozřejmili, zapamatujeme si hlavní myšlenku – *budeme hledat řešení nehomogenní rovnice ve tvaru součinu nějaké funkce a řešení asociované homogenní rovnice* – a projdeme si všechny úvahy ještě jednou v “běžném” neoperátorovém označení. ⚡

**Poznámka 4.6** (metoda variace konstanty). Partikulární řešení  $y_p$  nehomogenní LDR hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = K(x)y_{p0}(x), \quad (4.5)$$

kde  $y_{p0}(x)$  je nějaké pevné netriviální řešení asociované homogenní LDR a  $K(x)$  zatím neznámá spojitě diferencovatelná funkce. Jedná se vlastně o postup, při kterém konstantu  $C$  ve vzorci (4.4) nahradíme funkcí  $K(x)$  — proto se tato metoda nazývá *metoda variace konstanty*. Výpočtem derivace  $y_p'$  obdržíme

$$y_p'(x) = K'(x)y_{p0}(x) + K(x)y_{p0}'(x),$$

dosazením do (L) dostáváme

$$K'(x)y_{p0}(x) + K(x)y_{p0}'(x) + a(x)K(x)y_{p0}(x) = b(x)$$

a odsud

$$K'(x)y_{p0}(x) + K(x)[y_{p0}'(x) + a(x)y_{p0}(x)] = b(x).$$

Protože  $y_{p0}(x)$  je řešením homogenní LDR, je výraz v hranatých závorkách roven nule a dostáváme

$$K'(x)y_{p0}(x) = b(x). \quad (4.6)$$

Odsud již snadno vyjádříme derivaci neznámé funkce  $K'(x)$  a integrováním nalezneme funkci  $K(x)$ . Dosazením do (4.5) nalezneme partikulární řešení nehomogenní LDR a z Věty 4.2 obdržíme obecné řešení nehomogenní LDR. Započteme-li navíc do funkce  $K(x)$  i integrační konstantu  $C$ , obdržíme ze vzorce (4.5) nikoliv pouze partikulární, ale již přímo obecné řešení nehomogenní LDR.

V praxi je výhodné zapamatovat si tento postup a pokaždé jej aplikovat na příslušnou rovnici. Všimněme si, že po dosazení (4.5) do (L) se členy obsahující funkci  $K(x)$  vyruší a rovnice bude obsahovat funkci  $K(x)$  pouze prostřednictvím derivace této funkce  $K'(x)$ , jak plyne z (4.6). Pokud se toto nestane, je ve výpočtu obsažena chyba.

Provedení variace konstanty v případě zcela obecných funkcí  $a(x)$ ,  $b(x)$  vede k následujícímu vzorci.

**Věta 4.3** (vzorec pro obecné řešení nehomogenní LDR). *Obecné řešení rovnice (L) je*

$$y(x, C) = e^{-\int a(x) dx} \left[ \int b(x) e^{\int a(x) dx} dx + C \right] = \frac{\int b(x) e^{\int a(x) dx} dx + C}{e^{\int a(x) dx}}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (4.7)$$

*Přitom každý neurčitý integrál vyjadřuje jednu libovolnou z primitivních funkcí (integrační konstanty již neuvažujeme).*

## 5. Exaktní diferenciální rovnice

**Definice 5.1** (exaktní DR). Necht'  $P(x, y)$  a  $Q(x, y)$  jsou funkce dvou proměnných, které mají spojité parciální derivace. Řekneme, že diferenciální rovnice

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

je **exaktní**, jestliže výraz

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (T)$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce dvou proměnných.

**Poznámka 5.1** (ekvivalentní tvar exaktní DR). Exaktní diferenciální rovnici častěji uvádíme v ekvivalentním tvaru pomocí diferenciálu kmenové funkce

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (E)$$

**Poznámka 5.2.** Rovnice (E) je tedy exaktní právě tehdy, když existuje funkce  $F(x, y)$  proměnných  $x$  a  $y$  s vlastnostmi

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y). \quad (5.1)$$

**Věta 5.1** (řešení exaktní DR). Necht'  $F(x, y)$  je kmenová funkce totálního diferenciálu (T). Rovnice (E) má obecné řešení implicitně určené rovnicí

$$F(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$



**Věta 5.2 (charakterizace totálního diferenciálu).** *Nechť funkce  $P(x, y)$  a  $Q(x, y)$  mají spojité parciální derivace na otevřené souvislé množině  $M \subseteq \mathbb{R}^2$ . Výraz (T) je na množině  $M$  totálním diferenciálem nějaké funkce právě tehdy, když na  $M$  platí*

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (5.3)$$

Předpokládejme, že jsme pomocí Věty 5.2 ověřili, že výraz (T) je totálním diferenciálem. Je-li funkce  $F(x, y)$  kmenovou funkcí tohoto diferenciálu, musí platit vztahy (5.1). Integrujeme-li první z těchto vztahů podle proměnné  $x$ , obdržíme

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + C(y), \quad (5.4)$$

kde při integrování podle  $x$  považujeme  $y$  za konstantu (podobně jako při výpočtu parciální derivace) a  $C(y)$  je integrační konstanta — tato konstanta nezávisí na  $x$ , obecně se však může jednat o veličinu, která *závisí na  $y$* . Obdrženou rovnost zderivujeme podle  $y$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + C'(y),$$

kde  $C'(y)$  je obyčejná derivace funkce jedné proměnné. Vzhledem k (5.1) je levá strana rovna  $Q(x, y)$ . Dosadíme tedy na levou stranu  $Q(x, y)$  a zjednodušíme výraz na pravé straně. Obdržíme rovnici pro  $C'(y)$ , kterou vyřešíme a integrací nalezneme hledanou funkci  $C(y)$ . (Při úpravách nutně pro  $C'(y)$  vychází rovnice, která *neobsahuje* proměnnou  $x$ . Pokud tomu tak není, dopustili jsme se při počítání chyby, nebo výraz (T) není totálním diferenciálem.) Získanou funkci  $C(y)$  dosadíme do (5.4) a máme nalezenou kmenovou funkci  $F(x, y)$ .

## 6. Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

**Definice 6.1** (lineární diferenciální rovnice druhého řádu). Bud'ťe  $p$ ,  $q$  a  $f$  funkce definované a spojitě na intervalu  $I$ . Diferenciální rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (6.1)$$

se nazývá **lineární diferenciální rovnice druhého řádu** (zkráceně LDR druhého řádu). **Řešením rovnice** (nebo též **integrálem rovnice**) na intervalu  $I$  rozumíme funkci, která má spojitě do řádu 2 na intervalu  $I$  a po dosazení identicky splňuje rovnost (6.1) na  $I$ . Úloha nalézt řešení rovnice, které splňuje v bodě  $x_0 \in I$  **počáteční podmínky**

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \end{cases} \quad (6.2)$$

kde  $y_0$  a  $y'_0$  jsou reálná čísla, se nazývá **počáteční úloha** (**Cauchyova úloha**). Řešení počáteční úlohy se nazývá **partikulární řešení rovnice** (6.1).

**Poznámka 6.1** (existence a jednoznačnost). Každá počáteční úloha pro rovnici (6.1) má řešení, které je určeno jednoznačně a toto řešení je definované na celém intervalu  $I$ .

**Definice 6.2** (obecné řešení). Všechna řešení LDR druhého řádu (6.1) lze vyjádřit ve tvaru obsahujícím dvě nezávislé konstanty  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Takovýto předpis se nazývá **obecné řešení rovnice** (6.1).

**Poznámka 6.2** (operátorová symbolika). Podobně jako lineární diferenciální rovnice prvního řádu, i zde často pravou stranu rovnice často zkracujeme do tvaru  $L[y](x)$ . Definujeme-li tedy

$$L[y](x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x), \quad (6.3)$$

je tímto předpisem definován operátor, který každé dvakrát diferencovatelné funkci přiřazuje levou stranu rovnice (6.1). Rovnici (6.1) je potom možno zapsat ve tvaru  $L[y] = f(x)$ .

**Definice 6.3** (speciální typy LDR druhého řádu). Platí-li v rovnici (6.1)  $f(x) = 0$  pro všechna  $x \in I$ , nazývá se rovnice (6.1) **homogenní**, v opačném případě **nehomogenní**. Jsou-li koeficienty  $p(x)$  a  $q(x)$  na intervalu  $I$  konstantní funkce, nazývá se (6.1) **rovnice s konstantními koeficienty**.

**Poznámka 6.3** (triviální řešení). Funkce  $y(x) \equiv 0$  je řešením homogenní LDR 2. řádu vždy, bez ohledu na tvar koeficientů  $p$ ,  $q$ . (Ověřte sami dosazením.) Toto řešení nazýváme **triviální řešení rovnice (6.1)**.

**Definice 6.4** (asociovaná homogenní rovnice). Nahradíme-li v nehomogenní LDR (6.1) pravou stranu (tj. funkci  $f$ ) nulovou funkcí obdržíme rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (6.4)$$

Tato rovnice se nazývá **asociovaná homogenní rovnice k rovnici (6.1)**.

**Věta 6.1** (linearity a princip superpozice). Operátor (6.3) zachovává lineární kombinaci funkcí, tj. pro libovolné dvě funkce  $y_1$  a  $y_2$  a libovolné reálné konstanty  $C_1$  a  $C_2$  platí

$$L[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2]. \quad (6.5)$$

Jako speciální případ vztahu (6.5) dostáváme implikace

$$\begin{aligned} L[y_2] = 0 \text{ a } L[y_1] = f(x) &\Rightarrow L[y_1 + y_2] = 0 + f(x) = f(x), \\ L[y_1] = L[y_2] = f(x) &\Rightarrow L[y_1 - y_2] = f(x) - f(x) = 0, \\ L[y_1] = L[y_2] = 0 &\Rightarrow L[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

- Součet řešení zadané nehomogenní a asociované homogenní LDR je řešením dané nehomogenní rovnice.
- Rozdíl dvou řešení nehomogenní LDR je řešením asociované homogenní rovnice.
- Každá lineární kombinace dvou řešení homogenní LDR je opět řešením této rovnice.

## 7. Homogenní LDR 2. řádu

V této podkapitole budeme studovat homogenní LDR druhého řádu, tj. rovnici (6.4)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

kteou můžeme zkráceně zapsat jako  $L[y] = 0$ , kde operátor  $L$  je lineární diferenciální operátor druhého řádu definovaný vztahem (6.3).

**Motivace.** Budeme předpokládat že funkce  $y_1(x)$  a  $y_2(x)$  jsou obě řešeními a budeme hledat podmínky, za kterých je funkce

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

obecným řešením. Derivováním tohoto vztahu získáváme

$$y'(x) = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)$$

a dosazení počátečních podmínek  $y(\alpha) = \beta$ ,  $y'(\alpha) = \gamma$  vede k následující soustavě lineárních rovnic s neznámými  $C_1, C_2$

$$\begin{aligned}\beta &= C_1 y_1(\alpha) + C_2 y_2(\alpha), \\ \gamma &= C_1 y_1'(\alpha) + C_2 y_2'(\alpha).\end{aligned}\tag{7.1}$$

Jak je známo z lineární algebry, tato soustava má právě jedno řešení pro libovolnou volbu čísel  $\beta, \gamma$  právě tehdy, když matice soustavy, tj. matice  $\begin{pmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) \\ y_1'(\alpha) & y_2'(\alpha) \end{pmatrix}$ , je regulární. Tato matice je regulární právě tehdy, když její determinant je nenulový a to nastane právě tehdy když jeden sloupec není násobkem druhého. Tímto motivujeme následující definice.

**Definice 7.1** (lineární (ne-)závislost funkcí). *Budťe  $y_1$  a  $y_2$  funkce definované na intervalu  $I$ . Řekneme, že funkce  $y_1$  a  $y_2$  jsou na intervalu  $I$  **lineárně závislé**, jestliže jedna z nich je na intervalu  $I$  násobkem druhé, tj. jestliže existuje reálné číslo  $k \in \mathbb{R}$  s vlastností*

$$y_1(x) = k y_2(x) \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

nebo

$$y_2(x) = k y_1(x) \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

*V opačném případě říkáme, že funkce  $y_1, y_2$  jsou na intervalu  $I$  **lineárně nezávislé**.*

**Definice 7.2** (Wronskián). Budťe  $y_1(x)$  a  $y_2(x)$  dvě libovolná řešení homogenní rovnice (6.4). *Wronskiánem* funkcí  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  rozumíme determinant

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x). \quad (7.2)$$

**Věta 7.1** (lineární (ne)závislost). Budťe  $y_1(x)$  a  $y_2(x)$  dvě řešení rovnice (6.4) na intervalu  $I$ . Tato řešení jsou lineárně nezávislá právě tehdy když je jejich Wronskián různý od nuly na intervalu  $I$ .

**Věta 7.2** (obecné řešení homogenní LDR). Jsou-li  $y_1$  a  $y_2$  dvě netriviální lineárně nezávislá řešení rovnice (6.4) na intervalu  $I$ , je funkce  $y$  definovaná vztahem

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, \quad (7.3)$$

obecným řešením rovnice (6.4) na intervalu  $I$ .

**Definice 7.3** (fundamentální systém řešení). Dvojici funkcí  $y_1$  a  $y_2$  z předchozí věty nazýváme *fundamentální systém řešení rovnice* (6.4).

## 8. Homogenní LDR 2. řádu s konstantními koeficienty

Budeme studovat rovnici tvaru

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (\text{LH2})$$

kde  $p, q \in \mathbb{R}$ . Všimněme si nejprve následujícího faktu: Dosadíme-li do levé strany rovnice  $y = e^{zx}$ , kde  $z$  je reálné číslo, po výpočtu derivací a po vytknutí faktoru  $e^{zx}$  získáváme

$$y'' + py' + qy = e^{zx}(z^2 + pz + q).$$

Protože exponenciální faktor na pravé straně je vždy nenulový, bude výraz na pravé straně roven nule pokud bude splněna podmínka

$$z^2 + pz + q = 0. \quad (8.1)$$

Pouze v tomto případě bude uvažovaná funkce řešením rovnice (LH2).

**Definice 8.1** (charakteristická rovnice). Kvadratická rovnice (8.1) s neznámou  $z$  se nazývá **charakteristická rovnice pro rovnici (LH2)**.

**Věta 8.1** (fundamentální systém řešení LDR s konstantními koeficienty). Uvažujme DR (LH2) a její charakteristickou rovnici (8.1).

- Jsou-li  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$  dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice (8.1), definujme  $y_1 = e^{z_1 x}$  a  $y_2 = e^{z_2 x}$ .
- Je-li  $z_1 \in \mathbb{R}$  dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice (8.1), definujme  $y_1 = e^{z_1 x}$  a  $y_2 = x e^{z_1 x}$ .

- Jsou-li  $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R}$  dva komplexně sdružené kořeny charakteristické rovnice (8.1), definujeme  $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$  a  $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ .

Potom obecné řešení rovnice (LH2) je

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}.$$

## 9. Nehomogenní LDR 2. řádu

Nyní se budeme věnovat řešení nehomogenní diferenciální rovnice.

**Věta 9.1** (důsledek principu superpozice). *Součet libovolného partikulárního řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice a obecného řešení asociované homogenní rovnice je obecným řešením původní nehomogenní rovnice*

Podle předchozí věty tedy k vyřešení lineární nehomogenní rovnice stačí nalézt jedno (partikulární) řešení této rovnice a obecné řešení asociované homogenní rovnice.

**Příklad 9.1.** Jedním z řešení rovnice

$$y'' + y = 6$$

je zcela jistě funkce  $y(x) = 6$ . (Vidíme přímo po dosazení.) Obecné řešení je tedy

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 6$$



Vyřešení asociované homogenní rovnice je bohužel prakticky možné pouze v některých speciálních případech, jako je například rovnice s konstantními koeficienty

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (L2)$$

(u rovnic s konstantními koeficienty řešíme asociovanou homogenní rovnici pomocí charakteristické rovnice a Věty 8.1 )

### Jak najít partikulární řešení ?

- Metoda **variace konstant** – podobná jako u LDR prvního řádu. Konstanty v obecném řešení nahradíme funkcemi, které jsme schopni najít (po vyřešení soustavy rovnic a dvojí integraci).
- Metoda **kvalifikovaného odhadu** – pokud je pravá strana do jisté míry speciální, je možno partikulární řešení uhodnout. Je-li pravá strana rovnice polynom, exponenciální funkce nebo sinus či kosinus (případně součin či součet uvedených funkcí) je možno odhadnout “hrubý tvar” partikulárního řešení (až na nějaké konstanty) a tento potom pouze jemně “doladit” tak, abychom obdrželi skutečně řešení naší rovnice.

Podívejme se na metody výpočtu partikulárního řešení poněkud blíže.

**Věta 9.2 (metoda variace konstant).** *Nechť  $y_1$  a  $y_2$  jsou funkce tvořící fundamentální systém řešení homogenní rovnice (LH2) a  $y_1', y_2'$  jsou jejich derivace. Nechť funkce  $A(x)$  a  $B(x)$  jsou funkce mající derivace  $A'(x)$  a  $B'(x)$ , které splňují soustavu rovnic*

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0, \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \quad (9.1)$$

Potom funkce  $y_p$  definovaná vzorcem

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x) \quad (9.2)$$

je partikulárním řešením nehomogenní rovnice (L2). Obecné řešení rovnice (L2) je tedy tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x).$$

Díky nenulovosti Wronskiánu je zajištěno, že soustava (9.1) je vždy řešitelná a má právě jedno řešení. Toto řešení je možno najít “klasickými metodami”, jako je dosazovací nebo vylučovací metoda, v praxi se však využívá následující věta, známá z lineární algebry.

**Věta 9.3 (Cramerovo pravidlo).** Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$ax + by = c$$

$$Ax + By = C$$

s koeficienty  $a, b, A, B$ , s pravými stranami  $c, C$  a s neznámými  $x, y$ . Je-li determinant  $D$  matice soustavy nenulový, tj. je-li

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$$

má soustava právě jedno řešení. Označíme-li

$$D_1 = \begin{vmatrix} c & b \\ C & B \end{vmatrix} \quad a \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ A & C \end{vmatrix},$$

lze neznámé  $x$  a  $y$  najít jako podíly  $x = \frac{D_1}{D}$  a  $y = \frac{D_2}{D}$ .

Aplikací Cramerova pravidla na soustavu (9.1) dostáváme následující: vypočteme-li Wronskián

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0.$$

a pomocné determinanty

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix},$$

lze neznámé funkce  $A'(x)$ ,  $B'(x)$  obdržet jako podíly

$$A'(x) = \frac{W_1}{W}, \quad B'(x) = \frac{W_2}{W}. \quad (9.3)$$

Hledané funkce  $A(x)$ ,  $B(x)$  poté obdržíme integrací a pomocí nich a pomocí fundamentálního systému řešení sestavíme partikulární řešení rovnice metodou popsanou již dříve.

**Věta 9.4 (odhad partikulárního řešení).** *Necht' pravá strana rovnice (L2) má tvar  $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos(\beta x) + Q_m(x) \sin(\beta x))$ , kde  $P_n(x)$  je polynom stupně  $n$  a  $Q_m(x)$  je polynom stupně  $m$ .*

- Označme  $k = \max\{n, m\}$  větší ze stupňů obou polynomů. Pokud některý z polynomů na pravé straně nefiguruje, dosazujeme za jeho stupeň nulu.
- Uvažujme charakteristickou rovnici pro asociovanou homogenní rovnici, tj. rovnici (8.1). Pokud (obecně komplexní) číslo  $\alpha + i\beta$  není kořenem této rovnice, položíme  $r = 0$ . Pokud je číslo  $\alpha + i\beta$  jednoduchým kořenem této rovnice, položíme  $r = 1$  a pokud dvojnásobným, položíme  $r = 2$ .

Partikulární řešení je možno nalézt ve tvaru

$$y_p(x) = e^{\alpha x} x^r \left( \hat{P}_k(x) \cos(\beta x) + \hat{Q}_k(x) \sin(\beta x) \right), \quad (9.4)$$

kde  $\hat{P}_k(x)$  a  $\hat{Q}_k(x)$  jsou polynomy stupně nejvýše  $k$ . Tyto polynomy je možno najít metodou neurčitých koeficientů bez použití integrování.

**Poznámka 9.1.** • Pokud se exponenciální část na pravé straně nevyskytuje, je  $\alpha = 0$  a proto je  $e^{\alpha x} = 1$  a exponenciální člen se neuplatní. Například u diferenciální rovnice

$$y'' + 2y' + 3y = (x^2 + 4) \cos(x) + (x - 2) \sin(x)$$

hledáme partikulární řešení ve tvaru  $y_p = (ax^2 + bx + c) \cos(x) + (dx^2 + ex + f) \sin(x)$ . Všimněme si, že u v partikulárním řešení u funkce  $\sin(x)$  figuruje kvadratický polynom, i když na pravé straně rovnice je pouze polynom lineární. To proto, že oba polynomy na v obecném tvaru partikulárního řešení mají stejný stupeň, který je roven většímu ze stupňů polynomu na pravé straně rovnice.

- Pokud se goniometrická část na pravé straně nevyskytuje, je  $\beta = 0$ . Odsud potom plyne, že  $\cos(\beta x) = 1$ ,  $\sin(\beta x) = 0$  a ani goniometrická část, ani polynomy  $Q(x)$  a  $\hat{Q}(x)$  se neuplatní. Například u diferenciální rovnice

$$y'' - y = (x + 1)e^x$$

hledáme partikulární řešení ve tvaru  $y = x(ax + b)e^x$

- Pokud je polynom  $Q(x)$  roven nule, vyskytuje se na pravé straně jenom funkce kosinus. Podobné platí pro polynom  $P(x)$  a sinus. I v těchto případech se však v partikulárním řešení mohou vyskytnout obě funkce  $\cos(\beta x)$  i  $\sin(\beta x)$ . Například partikulární řešení rovnice

$$y'' - y = x \sin(x)$$

hledáme ve tvaru  $y_p = (ax + b) \cos(x) + (cx + d) \sin(x)$  (uvažujeme i část s funkcí sinus i přesto, že se funkce sinus na pravé straně rovnice vůbec nevyskytuje). Z tvrzení věty totiž *nijak nevyplývá*, že je-li  $Q(x) = 0$ , platí totéž i pro  $\hat{Q}(x)$ .

**Poznámka 9.2.** Větu o odhadu partikulárního řešení je možno použít například pro rovnice

$$y'' + y' = \sin(x), \quad y'' + 3y' + y = \frac{x \sin(x)}{e^x}, \quad y'' + 3y' = -4, \quad y'' + 2y' + y = (x^2 + 3) \cos(x)$$

(v druhé rovnici je  $\alpha = -1$ ), ale není možno ji použít například na následující rovnice

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 3y &= \sin(x) + x^2 \cos(2x), \\ y'' + y' - 3y &= \ln x \end{aligned} \tag{9.5}$$

(u první rovnice vadí odlišný argument u obou goniometrických funkcí, u druhé rovnice vadí funkce  $\ln(x)$ ). Kromě výše uvedené věty je možno v literatuře najít i větu umožňující najít metodou neurčitých koeficientů najít řešení rovnice, kde pravá strana není přímo ve tvaru požadovaném ve Větě 9.4, ale je součtem několika různých výrazů v tomto tvaru. Tento postup umožní najít metodou neurčitých koeficientů i partikulární řešení rovnice (9.5).

# Kapitola 3

## Autonomní systémy

### 1. Motivace

Budeme se zabývat diferenciálními rovnicemi, ve kterých na pravé straně nefiguruje nezávislá proměnná. V tomto případě tradičně nezávislou proměnnou neoznačujeme  $x$  jako doposud, ale  $t$  a nazýváme ji *čas*.

**Příklad 1.1** (motivace). Uvažujme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned}x' &= -y, \\ y' &= x,\end{aligned}\tag{1.1}$$

kde  $' = \frac{d}{dt}$ . Soustava má tu vlastnost, že proměnná  $t$ , podle které derivujeme, v rovnici fakticky vůbec nevystupuje. Takový systém diferenciálních rovnic budeme nazývat **autonomní systém**.  
Není těžké ověřit, že dvojice funkcí

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(t + c), \\ y(t) = A \sin(t + c) \end{cases} \quad (1.2)$$

je řešením této soustavy pro libovolná reálná čísla  $A, c$ . Vskutku:

$$x' = (A \cos(t + c))' = A(-\sin(t + c)) \cdot 1 = -A \sin(t + c) = -y$$

$$y' = (A \sin(t + c))' = A \cos(t + c) \cdot 1 = x$$

Lze ukázat že v tomto zápise jsou pro vhodnou volbu konstant obsažena **všechna** řešení a jedná se tedy o **obecné řešení** zadaného autonomního systému.

- Zadáme-li počáteční podmínku  $x(0) = 0$  a  $y(0) = 0$ , je řešením dvojice konstantních funkcí

$$\begin{cases} x(t) = 0, \\ y(t) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Jedná se o konstantní řešení a bod  $[0, 0]$  budeme v dalším nazývat **singulárním bodem** tohoto autonomního systému.

- Zadáme-li počáteční podmínku  $x(0) = 1$  a  $y(0) = 0$ , je řešením dvojice funkcí

$$\begin{cases} x(t) = \cos t, \\ y(t) = \sin t. \end{cases} \quad (1.4)$$

V rovině  $xy$  se jedná o parametrické rovnice jednotkové kružnice. Tuto kružnici budeme nazývat *trajektorií* autonomního systému.

- Zadáme-li počáteční podmínku  $x(0) = 0$  a  $y(0) = 1$ , je řešením dvojice funkcí

$$\begin{cases} x(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \\ y(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right). \end{cases} \quad (1.5)$$

V rovině  $xy$  se jedná (*opět!*) o parametrické rovnice jednotkové kružnice. Ač jsme obdrželi jiné řešení počáteční úlohy, trajektorie tohoto řešení je stejná. To je proto, že body  $[1, 0]$  i  $[0, 1]$  uvažované v minulých počátečních podmínkách leží oba na téže trajektorii.

- Zadáme-li počáteční podmínku  $x(0) = 2$  a  $y(0) = 0$ , je řešením dvojice funkcí  $x(t) = 2 \cos t$ ,  $y(t) = 2 \sin t$ . V rovině  $xy$  se jedná o parametrické rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem 2. Dostáváme jinou trajektorii než v předešlých případech, protože bod  $[2, 0]$  již na jednotkové kružnici neleží.

Na dvojici funkcí, které jsou řešením této soustavy, můžeme pohlížet jako na parametrické rovnice křivek v rovině. Budeme nyní hledat rovnice charakterizující tyto křivky (nazývané *trajektorie*). Platí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}.$$



Tuto rovnici můžeme řešit separací proměnných následovně:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}, \\ -y \, dy &= x \, dx, \\ -\frac{y^2}{2} + c &= \frac{x^2}{2}, \\ -y^2 + C &= x^2, \quad \text{kde } C = 2c \text{ je nová konstanta} \\ x^2 + y^2 &= C.\end{aligned}$$

Odsud vidíme, že se jedná o rovnice soustředných kružnic. To jsme ostatně viděli již z obecného řešení (1.2), které bylo parametrickým vyjádřením rovnice kružnice o poloměru  $A$ .

## 2. Autonomní systémy

**Definice 2.1** (autonomní systém). *Nechť  $f$  a  $g$  jsou spojité funkce dvou proměnných. Soustava dvou diferenciálních rovnic*

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y), \\ y' &= g(x, y),\end{aligned}\tag{2.1}$$

kde  $' = \frac{d}{dt}$  se nazývá **dvourozměrný autonomní systém**. Jeho **řešením** rozumíme každou dvojici funkcí  $x(t)$ ,  $y(t)$ , které mají derivace na uvažovaném intervalu a po jejich dosazení do (2.1) přejdou obě rovnice v identity. Proměnná  $t$  se nazývá **čas**.

**Definice 2.2** (počáteční úloha). Necht'  $t_0$ ,  $x_0$  a  $y_0$  jsou libovolná reálná čísla. Úloha najít řešení soustavy (2.1), které v bodě  $t_0$  splňuje **počáteční podmínky**

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

se nazývá **počáteční úloha**.

**Poznámka 2.1** (posun v čase). Je-li dvojice funkcí  $x(t)$ ,  $y(t)$  řešením soustavy (2.1) a je-li  $c$  libovolné reálné číslo, platí totéž i pro dvojici funkcí  $x(t+c)$ ,  $y(t+c)$ . Čas  $t_0$ , ve kterém formulujeme počáteční podmínky, lze tedy volit libovolně, Zpravidla klademe bez újmy na obecnosti  $t_0 = 0$ . ⚡

**Definice 2.3** (stacionární řešení). Necht'  $x^*$  a  $y^*$  jsou reálná čísla, která splňují

$$f(x^*, y^*) = 0,$$

$$g(x^*, y^*) = 0.$$

Pak dvojice konstantních funkcí  $x(t) = x^*$ ,  $y(t) = y^*$  je řešením systému (2.1), jak se lze snadno přesvědčit dosazením.

**Definice 2.4** (trajektorie autonomního systému). *Nechť dvojice funkcí  $x(t)$ ,  $y(t)$  je řešením systému (2.1). Množina  $T$  bodů v rovině  $(x, y)$  definovaná relací*

$$T = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : x(\tilde{t}) = \tilde{x} \text{ a } y(\tilde{t}) = \tilde{y} \text{ pro nějaké } \tilde{t} \in \mathbb{R}\}$$

*se nazývá **trajektorie systému** (2.1). Rovinu, do které zakresluje trajektorie, nazýváme **fázovou rovinou**.*

*Trajektorie stacionárního řešení je tvořena jediným bodem  $(x^*, y^*)$  a nazývá se **stacionární bod**.*

Jediným stacionárním bodem systému (1.1) je počátek, tj. bod  $[0, 0]$ . Ostatní trajektorie jsou kružnice se středem v počátku. Všimněte si, že trajektorie odpovídající řešení (1.4) a (1.5) jsou totožné, i když se jedná o různé funkce!

**Poznámka 2.2** (geometrické vlastnosti trajektorií). Zakreslíme-li trajektorii nějakého řešení autonomního systému, ztrácíme informaci o čase. Máme pouze informace, kterých hodnot  $(x, y)$  řešení nabývají v tomtéž okamžiku, ovšem nemáme informaci o tom, za jak dlouho řešení do tohoto stavu dospěje. Abychom alespoň měli zachycenu informaci o tom, který stav předchází a který následuje, zpravidla trajektorie orientujeme podle směru toku času.

Prochází-li trajektorie bodem  $(x^*, y^*)$ , jedná se o trajektorii odpovídající řešení počáteční úlohy

$$\begin{cases} x(0) = x^* \\ y(0) = y^* \end{cases}$$

Tato trajektorie má v bodě  $(x^*, y^*)$  tečnu danou směrovým vektorem  $(f(x^*, y^*), g(x^*, y^*))$ . Podobně jako u směrového pole diferenciální rovnice, zakreslení směrových vektorů tečných k trajektoriím lze uskutečnit jen ze znalosti funkcí  $f$  a  $g$  a odsud je zpravidla možné si udělat základní představu o tvaru trajektorií. Systém těchto vektorů spolu se zakreslenými vybranými trajektoriemi se nazývá

**fázový portrét** autonomního systému. Jedná se o jakousi obdobu směrového pole diferenciální rovnice.

Vzhledem k jednoznačné řešitelnosti se dvě různé trajektorie nikde neprotínají. Mají-li proto dvě trajektorie společný alespoň jeden bod, jsou zcela totožné!

**Poznámka 2.3** (trajektorie jako integrální křivky). Na část trajektorie  $T$ , kde každému  $x$  odpovídá jediné  $y$ , lze pohlížet jako na graf funkce  $y = y(x)$ . Vzhledem k tomu, že podle pravidla pro derivaci složené a inverzní funkce platí v diferenciální symbolice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

vyhovuje uvažovaná část trajektorie diferenciální rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Tato rovnice definuje jednoznačně trajektorie (až na směr toku času) podobně, jako systém (2.1). Poznamenejme, že v bodech  $x$ -nulkin (viz dále) je pravá strana rovnice nespojitá a v singulárních bodech může být porušena jednoznačnost řešení.

**Poznámka 2.4** (klasifikace trajektorií). Předpokládejme, že každá trajektorie systému (2.1) je prodloužena maximálně oběma směry, tj. pro  $t \rightarrow \pm\infty$ . Rozeznáváme pouze tři následující typy trajektorií

- (i) **Stacionární body**. Tyto body odpovídají stacionárním řešením.
- (ii) **Uzavřené trajektorie (cykly)**. Tyto trajektorie odpovídají periodickým řešením. Uvnitř každého cyklu leží alespoň jeden stacionární bod.

- (iii) Trajektorie, které samy sebe nikde neprotínají a pro  $t \rightarrow \pm\infty$  tyto trajektorie mají jednu z následujících vlastností.
- (a) Trajektorie mají alespoň jednu složku neohraničenou.
  - (b) Trajektorie konvergují k některému ze stacionárních bodů.
  - (c) Trajektorie konvergují k některému z cyklů.
  - (d) Trajektorie konvergují k množině tvořené konečným počtem singulárních bodů a jinými trajektoriemi, které vedou z jednoho stacionárního bodu do druhého.

V praxi se s posledním typem trajektorií většinou nesetkáváme a každá trajektorie, která je ohraňovaná a není stacionárním bodem ani cyklem začíná a končí buď ve stacionárním bodě, se odmotává z nějakého cyklu (resp. namotává na nějaký cyklus).

**Příklad 2.1.** Systém (1.1) má dva druhy trajektorií: stacionární bod v počátku a cykly, které jsou tvořeny soustřednými kružnicemi.

**Poznámka 2.5** (nulkliny). Křivka složená z bodů  $(x, y)$  v rovině, které splňují  $f(x, y) = 0$  se nazývá  **$x$ -nulklina**. V bodech této nulkliny platí  $x' = 0$  a veličina  $x$  se tedy v okolí této nulkliny nemění (resp. mění velice pomalu). Z geometrického hlediska má tato křivka vlastnost, že každá trajektorie ji protíná ve svislém směru (zdola nahoru nebo shora dolů). Podobně, křivka složená z bodů  $(x, y)$  v rovině, které splňují  $g(x, y) = 0$  se nazývá  **$y$ -nulklina**. Tato křivka má tu vlastnost, že každá trajektorie ji protíná ve vodorovném směru, protože v bodech  $y$ -nulkliny platí  $y' = 0$ .

**Příklad 2.2.** Systém (1.1) má jednu  $x$ -nulklinu (přímku  $y = 0$ , tj. osu  $x$ ) a jednu  $y$ -nulklinu (přímku  $x = 0$ , tj. osu  $y$ ).

**Poznámka 2.6** (spojitá závislost na počátečních podmínkách). Malá změna počátečních podmínek vyvolává relativně malou změnu výsledného řešení autonomního systému. Z tohoto důvodu dvě trajektorie, které prochází dvěma dostatečně blízkými body, mají v okolí tohoto bodu přibližně stejný směr, s výjimkou okolí stacionárních bodů.

**Poznámka 2.7** (klasifikace stacionárních bodů). Podle chování trajektorií v okolí stacionárních bodů rozdělujeme tyto stacionární body do několika navzájem disjunktních skupin. Necht'  $(x^*, y^*)$  je singulárním bodem systému (2.1).

**Uzel** Stacionární bod  $(x^*, y^*)$  se nazývá *uzel*, jestliže všechny trajektorie  $(x(t), y(t))$  z nějakého okolí tohoto bodu konvergují pro  $t \rightarrow \infty$  nebo  $t \rightarrow -\infty$  k  $(x^*, y^*)$  tak, že nedochází k oscilacím kolem limitní hodnoty.

**Ohnisko** Stacionární bod  $(x^*, y^*)$  se nazývá *ohnisko*, jestliže všechny trajektorie z nějakého okolí tohoto stacionární bodu do tohoto bodu konvergují buď pro  $t \rightarrow \infty$  nebo pro  $t \rightarrow -\infty$  a to tak, že kolem tohoto bodu oscilují se zmenšující se amplitudou.

**Sedlo** Stacionární bod  $(x^*, y^*)$  se nazývá *sedlo*, jestliže v každém jeho okolí existuje pouze konečný počet trajektorií, které pro  $t \rightarrow \pm\infty$  konvergují k tomuto bodu.

**Střed a bod rotace** Stacionární bod  $(x^*, y^*)$  se nazývá *bod rotace*, jestliže každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho trajektorií, které jsou cykly. Pokud v nějakém okolí existují pouze cykly, nazývá se tento bod navíc *střed*.

- Uzel nebo ohnisko nazýváme *stabilní*, jestliže všechny trajektorie do něj konvergují pro  $t \rightarrow \infty$ , tj. všechny trajektorie z nějakého okolí směřují do tohoto bodu. V opačném případě tento bod nazýváme *nestabilní*.

- Pro stabilní uzel a ohnisko existují oblasti ve fázové rovině které mají tu vlastnost, že všechny trajektorie procházející některou z těchto oblastí konvergují pro  $t \rightarrow \infty$  do tohoto stacionárního bodu. Takové oblasti se nazývají **oblasti atraktivity** stacionárního bodu.
- Ve fázové rovině mohou existovat oblasti, které mají tu vlastnost, že každá trajektorie která vstoupí do této oblasti ji již v žádném pozdějším čase nemůže opustit. Tyto oblasti se nazývají **pozitivně invariantní oblasti**.
- Naopak, oblasti které mají tu vlastnost, že pokud se v nich trajektorie vyskytuje v jistém čase, vyskytuje se v nich i ve všech dřívějších časech, se nazývají **negativně invariantní**.

**Příklad 2.3.** Stacionární bod  $[0, 0]$  systému (1.1) je střed.

**Definice 2.5** ( $\alpha$ - a  $\omega$ - limitní množina). *Bud'  $T$  trajektorie nějakého řešení  $(x(t), y(t))$ .  $\omega$ -limitním bodem trajektorie  $T$  nazýváme každý bod  $(x^\dagger, y^\dagger)$ , pro který existuje posloupnost časových okamžiků  $\{t_n\}$  s vlastnostmi*

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} t_n &= \infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) &= x^\dagger, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) &= y^\dagger.\end{aligned}\tag{2.3}$$

*Pokud podmínku (2.3) nahradíme podmínkou*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\infty,$$

*nazývá se bod  $(x^\dagger, y^\dagger)$   $\alpha$ -limitním bodem. Množina všech  $\omega$ -limitních bodů uvažované trajektorie se nazývá  $\omega$ -limitní množina této trajektorie. Podobně je definována  $\alpha$ -limitní množina.*

**Definice 2.6** (Jacobiho matice). *Matice*

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

se nazývá **Jacobiho matice soustavy (2.1)**.

**Definice 2.7.** Charakteristickou rovnicí matice  $A$  rozumíme kvadratickou rovnici  $\det(A - \lambda I) = 0$  s neznámou  $\lambda$ , tj. charakteristickou rovnicí matice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  je rovnice

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$


Kořeny této rovnice (reálné nebo komplexní) nazýváme **vlastní čísla matice  $A$** .

**Příklad 2.4.** Jacobiho matice systému (1.1) v bodě  $[0, 0]$  je matice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

a vlastní čísla této matice jsou  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$ , kde  $i$  je imaginární jednotka (vlastní čísla nejsou reálná).



**Věta 2.1** (klasifikace stacionárních bodů pomocí vlastních čísel Jacobiho matice). Uvažujme vlastní čísla Jacobiho matice vypočtené ve stacionárním bodě. 

- Jsou-li obě vlastní čísla reálná kladná, je stacionární bod **nestabilní uzel**.
- Jsou-li obě vlastní čísla reálná záporná, je stacionární bod **stabilní uzel**.
- Jsou-li vlastní čísla reálná a mají-li opačná znaménka, je stacionární bod **sedlo**.
- Jsou-li vlastní čísla komplexně sdružená s kladnou reálnou částí, je stacionární bod **nestabilní ohnisko**.
- Jsou-li vlastní čísla komplexně sdružená se zápornou reálnou částí, je stacionární bod **stabilní ohnisko**.
- Jsou-li vlastní čísla komplexně sdružená s nulovou reálnou částí, je stacionární bod **ohnisko** nebo **bod rotace**.

**Poznámka 2.8.** Tvzení předchozí věty si snadno odvodíme, zapamatujeme-li si, že kdykoliv má Jacobiho matice vlastní číslo  $\alpha + i\beta$ , kde  $\alpha \neq 0$ , má systém trajektorii, na které se obě komponenty řešení chovají přibližně jako funkce  $e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \text{konst.}$  Platí tedy následující:

- Je-li  $\alpha < 0$ , trajektorie konverguje pro  $t \rightarrow \infty$  ke stacionárnímu bodu. Trajektorie tedy míří do tohoto stacionárního bodu.
- Je-li  $\alpha > 0$ , trajektorie konverguje pro  $t \rightarrow -\infty$  ke stacionárnímu bodu. Trajektorie tedy ze stacionárního bodu vychází a vzdaluje se od něj.

- Je-li  $\beta \neq 0$ , dochází v okolí stacionárního bodu k oscilacím, je-li naopak  $\beta = 0$ , k oscilacím nedochází.

Jiná možnost, jak určit typ stacionárních bodů, je obsažena v následující větě. V této větě  $D$  značí determinant Jacobiho matice v bodě  $(x^*, y^*)$ , tj. a  $\Delta$  stopu<sup>1</sup> Jacobiho matice v tomto bodě, tj.

$$D = \det J(x^*, y^*) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*),$$

$$\Delta = \text{Tr} J(x^*, y^*) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*).$$

**Věta 2.2.** Necht'  $(x^*, y^*)$  je stacionární bod soustavy (2.1) a  $J(x^*, y^*)$  hodnota Jacobiho matice v tomto bodě. Pomocí čísel  $D$  a  $\Delta$  lze rozhodnout o kvalitě stacionárního bodu  $(x^*, y^*)$  podle následující tabulky.

$D < 0$			<i>sedlo</i>
$D > 0$	$\Delta > 0$	$\Delta^2 > 4D$	<i>nestabilní uzel</i>
		$\Delta^2 < 4D$	<i>nestabilní ohnisko</i>
	$\Delta < 0$	$\Delta^2 > 4D$	<i>stabilní uzel</i>
		$\Delta^2 < 4D$	<i>stabilní ohnisko</i>
	$\Delta = 0$		<i>bod rotace nebo ohnisko</i>

<sup>1</sup>Stopa čtvercové matice je součet čísel v hlavní diagonále.

# Kapitola 4

## Dvojný integrál

### 1. Supremum a infimum

**Definice 1.1** (dolní závora). *Bud'  $A$  neprázdná zdola ohraničená množina reálných čísel. Číslo  $m$  se nazývá **dolní závora** množiny  $A$ , jestliže  $m \leq a$  pro všechna  $a \in A$*

**Příklad 1.1.** • Dolní závorou intervalu  $(0, 1)$  jsou například čísla  $-1, -\pi, 0$ .

- Dolní závorou nejsou čísla  $\frac{1}{2}, 6$  ani  $e$ .

**Definice 1.2** (infimum). Bud'  $A$  neprázdná zdola ohraničená množina reálných čísel. Číslo  $\inf(A)$  se nazývá **infimum** množiny  $A$ , jestliže je největší dolní závorkou množiny  $A$ .

**Příklad 1.2.** Intervaly  $(0, 1)$ ,  $[0, 1]$ ,  $(0, 1]$  mají všechny infimum rovno číslu  $0$ .

**Definice 1.3** (horní závorka). Bud'  $A$  neprázdná shora ohraničená množina reálných čísel. Číslo  $M$  se nazývá **horní závorka** množiny  $A$ , jestliže  $M \geq a$  pro všechna  $a \in A$ .

**Definice 1.4** (supremum). Bud'  $A$  neprázdná shora ohraničená množina reálných čísel. Číslo  $\sup(A)$  se nazývá **supremum** množiny  $A$ , jestliže je nejmenší horní závorkou množiny  $A$ .

**Příklad 1.3.** Intervaly  $(0, 1)$ ,  $[0, 1]$ ,  $(0, 1]$  mají všechny supremum rovno číslu  $1$ .

## 2. Dvojný integrál na obdélníku

Definujme funkci na obdélníku  $R = [a, b] \times [c, d]$  ohraničenou funkcí  $f(x, y)$ . Obdélník rozdělme na podobdélníky  $p_1, p_2, \dots, p_n$  o obsahích  $\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_n$ . Toto dělení označme  $D$ .

V obdélníčku  $p_j$  najdeme supremum  $M_j$  a infimum  $m_j$  funkce  $f(x, y)$ . Sestrojme horní a dolní integrální součet příslušný dělení  $D$  podle vzorců

$$S(D) = \sum_{i=1}^k M_i \Delta p_i \dots \text{horní součet}$$

$$s(D) = \sum_{i=1}^k m_i \Delta p_i \dots \text{dolní součet}$$



- Supremum množiny všech dolních součtů nazýváme *dolní dvojný integrál* a značíme

$$\underline{\iint_R f(x, y) \, dx \, dy}.$$

- Infimum množiny všech horních součtů nazýváme *horní dvojný integrál* a značíme

$$\overline{\iint_R f(x, y) \, dx \, dy}.$$

**Definice 2.1** (dvojný integrál). *Jestliže jsou si horní a dolní integrál rovny, pak jejich společnou hodnotu značíme*

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy \quad (2.1)$$

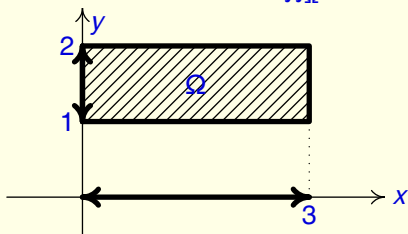
*a nazýváme dvojný integrál funkce  $f$  v  $R$ . O funkci  $f$  říkáme, že je na množině  $R$  integrovatelná.*

Výpočet dvojného integrálu provádíme s využitím následující věty o převodu dvojného integrálu na dvojnásobný (dva “obyčejné” integrály).

**Věta 2.1** (Fubini). *Nechť  $R = [a, b] \times [c, d]$  je uzavřený obdélník v  $\mathbb{R}^2$  a  $f$  funkce definovaná a spojitá na  $R$ . Pak platí*

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy.$$

**Příklad 2.1.** Vypočtěte  $\iint_{\Omega} (x + y) \, dx \, dy$  přes obdélník vyznačený na obrázku.



$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} (x + y) \, dx \, dy &= \int_1^2 \left[ \int_0^3 (x + y) \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[ \frac{x^2}{2} + xy \right]_0^3 dy \\ &= \int_1^2 \left[ \frac{9}{2} + 3y - \left( \frac{0}{2} + 0y \right) \right] dy = \int_1^2 \left( \frac{9}{2} + 3y \right) dy \\ &= \left[ \frac{9}{2}y + 3\frac{y^2}{2} \right]_1^2 = \frac{9}{2} \cdot 2 + 3 \cdot \frac{4}{2} - \left( \frac{9}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= 9 + 6 - 6 = 9\end{aligned}$$

### 3. Dvojný integrál v obecné oblasti

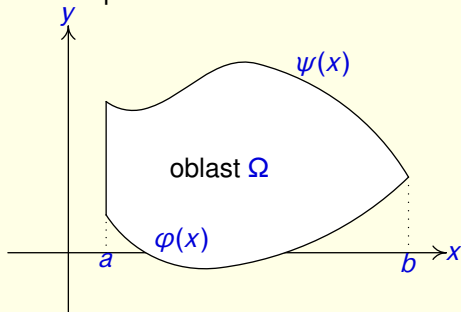
**Definice 3.1** (dvojný integrál v obecné oblasti). Bud'  $\Omega$  uzavřená ohraničená oblast. Bud'  $R$  dostatečně velký obdélník, takový, že  $\Omega \subseteq R$ . Definujme na  $R$  funkci  $g$  předpisem

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Potom definujeme integrál funkce  $f$  na množině  $\Omega$  předpisem

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_R g(x, y) \, dx \, dy.$$

V dalším budeme pro jednoduchost předpokládat, že oblasti přes které integrujeme mají hranici tvořenu po částech hladkou uzavřenou křivkou.

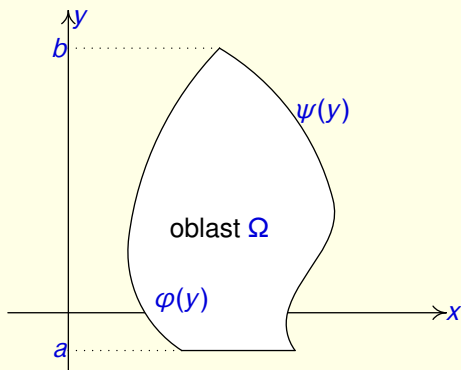


**Věta 3.1 (Fubini).** Necht'  $f$  je funkce spojitá v uzavřené oblasti

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ a } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Potom

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right] dx$$



**Věta 3.2 (Fubini).** Necht'  $f$  je funkce spojitá v uzavřené oblasti

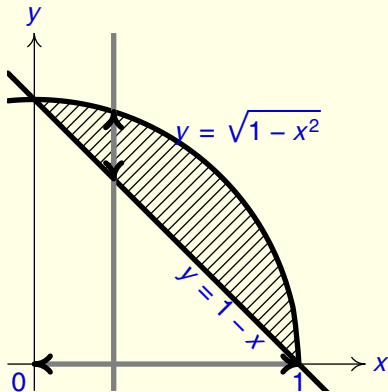
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b \text{ a } \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}.$$

Potom

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) \, dx \right] dy$$



**Příklad 3.1.** Vypočítejte  $\iint_{\Omega} 2y \, dx \, dy$  přes množinu vyznačenou na obrázku.



$$\begin{aligned}x_{\min} &= 0, \\x_{\max} &= 1, \\y_{\min} &= 1 - x, \\y_{\max} &= \sqrt{1 - x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} 2y \, dx \, dy &= \int_0^1 \left( \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} 2y \, dy \right) dx \\&= \int_0^1 \left( [y^2]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\&= \int_0^1 \left( 1 - x^2 - (1 - x)^2 \right) dx \\&= \int_0^1 \left( 1 - x^2 - (1 - 2x + x^2) \right) dx \\&= \int_0^1 (2x - 2x^2) dx \\&= \left[ x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 \\&= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

**Věta 3.3 (linearita integrálu).** Bud'  $f_1, f_2$  funkce integrovatelné v  $\Omega$  a  $c_1, c_2$  libovolná reálná čísla. Platí

$$\iint_{\Omega} [c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y)] \, dx \, dy = c_1 \iint_{\Omega} f_1(x, y) \, dx \, dy + c_2 \iint_{\Omega} f_2(x, y) \, dx \, dy$$

**Věta 3.4** (aditivita vzhledem k oboru integrace). *Nechť je oblast  $\Omega$  rozdělena na dvě oblasti  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$ , které mají společné nejvýše hraniční body. Platí*

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Omega_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{\Omega_2} f(x, y) \, dx \, dy$$

## 4. Polární souřadnice

Dosud jsme používali pouze kartézské souřadnice: dvojici čísel udávající vzdálenost bodu od osy  $y$  a od osy  $x$ , která jednoznačně určuje polohu bodu v rovině<sup>1</sup>. V praxi je někdy výhodnější použít i jiný způsob jak pomocí dvojice čísel charakterizovat polohu bodu v rovině – takové souřadnice potom nazýváme **křivočaré** souřadnice.

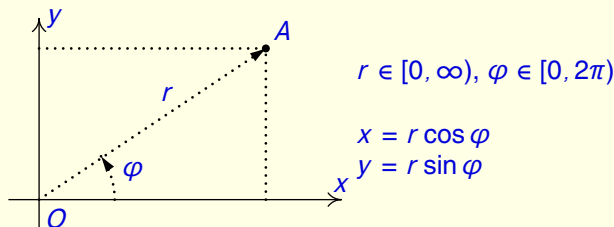
Z křivočarých souřadnic jsou nejdůležitější **polární souřadnice**. Při jejich použití polohu bodu  $A$  zadáváme tak, že určíme vzdálenost  $r$  bodu od počátku soustavy souřadnic  $O$  a úhel  $\varphi$ , který svírá spojnice bodů  $O$  a  $A$  s kladnou částí osy  $x$ .

Chceme-li převést dvojný integrál do polárních souřadnic, provádíme v něm vlastně substituci  $x = r \cos \varphi$  a  $y = r \sin \varphi$ . Přitom se transformují i diferenciály  $dx$  a  $dy$  a výsledný vzorec má tvar

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Omega} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \, d\varphi \, dr.$$

V diferenciálním počtu polární souřadnice používáme především tam, kde má problém radiální symetrii. Například při studiu ochlazování nebo kmitů kruhových desek či válcovitých součástí.

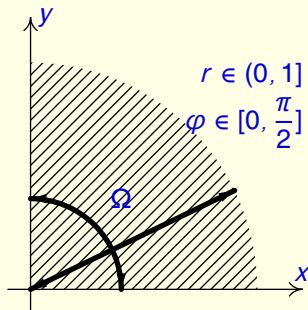
<sup>1</sup> Myšlenka používat takové souřadnice pochází od filozofa Reného Descarta, který jednou pozoroval mouchu na stropě a uvědomil si, že pro jednoznačné stanovení polohy mouchy na stropě stačí zadat její vzdálenost od dvou navzájem kolmých stěn.



Obrázek 4.1: Polární souřadnice

V integrálním počtu tyto souřadnice použijeme zejména v případě, kdy integrujeme přes kružnici nebo její část (např. mezikružší či kruhová výseč). V takovém případě mají totiž integrály které vzniknou po aplikaci Fubiniovy věty pevné meze a výpočet druhého integrálu je zpravidla jednodušší. V následujícím příkladě pro srovnání vypočteme tentýž integrál v polárních i v kartézských souřadnicích.

**Příklad 4.1.** Vypočtěte  $\iint_{\Omega} x \, dx \, dy$ , kde  $\Omega$  je čtvrtina jednotkového kruhu, ležící v prvním kvadrantu.



Výpočet v polárních souřadnicích:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} x \, dx \, dy &= \int_0^1 \left( \int_0^{\pi/2} \underbrace{r \cos \varphi}_{\text{funkce}} \underbrace{r}_{\text{Jakobián}} \, d\varphi \right) dr = \int_0^1 \left[ r^2 \sin \varphi \right]_0^{\pi/2} dr \\
 &= \int_0^1 \left[ r^2 \sin \frac{\pi}{2} - r \sin 0 \right] dr = \int_0^1 \left[ r^2 \right] dr \\
 &= \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Výpočet v kartézských souřadnicích:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} x \, dx \, dy &= \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left[ xy \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} \, dx \\
 &= \text{substituční metodou} \dots \\
 &= \left[ -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\
 &= -\frac{1}{3}(0)^{\frac{3}{2}} - \left( -\frac{1}{3}(1)^{\frac{3}{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

## 5. Obecné křivočaré souřadnice

I když polární souřadnice jsou zdaleka nejpoužívanějšími křivočarými souřadnicemi, v praxi je někdy vhodné či nutné volit i jiné souřadnice. Máme-li korektně definovány obecné křivočaré souřadnice  $u$  a  $v$ , jsou transformační vztahy mezi těmito křivočarými souřadnicemi a kartézskými souřadnicemi  $x$ ,  $y$  ve tvaru

$$\begin{aligned}
 x &= g(u, v) \\
 y &= h(u, v)
 \end{aligned}$$

kde  $g, h$  jsou dostatečně hladké funkce dvou proměnných. Pro převod dvojného integrálu z kartézských souřadnic do souřadnic  $u, v$  je nutno vypočítat následující determinant

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial h(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial g(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial h(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

zvaný **Jakobián**.

**Věta 5.1** (převod dvojného integrálu do křivočarých souřadnic). *Platí*

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Omega} f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| \, du \, dv$$

**Poznámka 5.1.** Výběr křivočarých souřadnic se řídí tvarem množiny  $\Omega$ . Snažíme se o to, aby vyjádření této množiny bylo v nových souřadnicích co nejjednodušší.

## Kapitola 5

# Numerické řešení diferenciálních rovnic

V této kapitole si uvedeme některé základní metody numerického řešení diferenciálních rovnic. Uvědomme si, že zatímco není možné numericky obdržet obecné řešení, řešení počáteční úlohy lze numericky aproximovat poměrně snadno: hlavní myšlenkou je, že začneme v bodě zadaném počáteční podmínkou a v okolí tohoto bodu nahradíme integrální křivku její tečnou. Tím se dostaneme do dalšího bodu, odkud opět integrální křivku aproximujeme tečnou. Směrnici tečny zjistíme z diferenciální rovnice, buď přímo z derivace (Eulerova metoda), nebo poněkud rafinovaněji, kdy bereme v úvahu i konvexnost či konkávnost a fakt, že se derivace mění s měnícím se  $x$  i  $y$ . Stačí tedy mít zvolen *krok* numerické metody (interval, na kterém aproximaci tečnou použijeme) a výstupem metody bude aproximace integrální křivky pomocí lomené čáry (po částech lineární funkcí).

## 1. Metody s konstatním krokem

Řešíme počáteční úlohu pro diferenciální rovnici prvního řádu rozřešenou vzhledem k derivaci:<sup>1</sup>

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Řešení aproximujeme po částech lomenou čarou (viz obrázky 5.2 a 5.3), vodorovná vzdálenost mezi jednotlivými uzly se nazývá **krok**, označujeme jej  $h$ , má-li další část lomené čáry směrnici  $k$ ,

dostaneme další bod pomocí vztahů

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + kh \end{cases}$$

Uvedeme si na ukázkou metody **s pevným krokem**, kdy neměníme krok, ale pouze směr lineární funkce, která aproximuje integrální křivku. Podle toho, jak v jednotlivých krocích volíme směrnici aproximační funkce, rozlišujeme několik metod.

**Eulerova metoda** Jako směrnici tečny použijeme hodnotu směrového pole v bodě, ze kterého vycházíme:  $k = k_1 := f(x_i, y_i)$

**RK** (metoda Runge-Kutta druhého řádu) Jako směrnici tečny použijeme hodnotu směrového pole v bodě, do kterého bychom se dostali po provedení půlky kroku Eulerovou metodou. Podíváme se tedy, kam bychom se dostali Eulerovou metodou, podíváme se jak po cestě vypadá směrové pole a podle toho zvolíme výchozí směr:  $k = k_2 := f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1 \frac{h}{2}\right)$

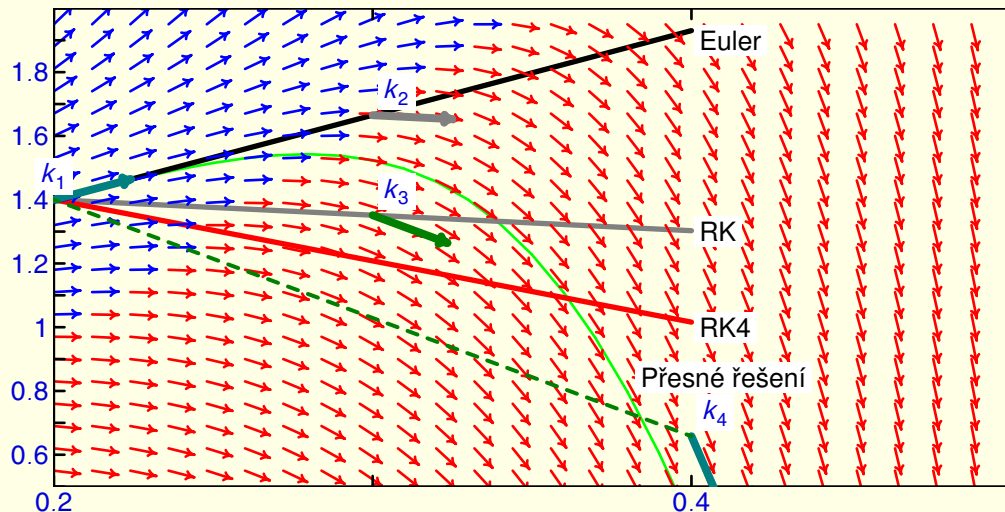
<sup>1</sup> Jak bylo zmíněno, počáteční podmínka je pro numerickou aproximaci důležitá, udává totiž bod, ze kterého začínáme. Numericky proto najdeme pouze partikulární řešení, najít obecné řešení numericky se nám nepodaří



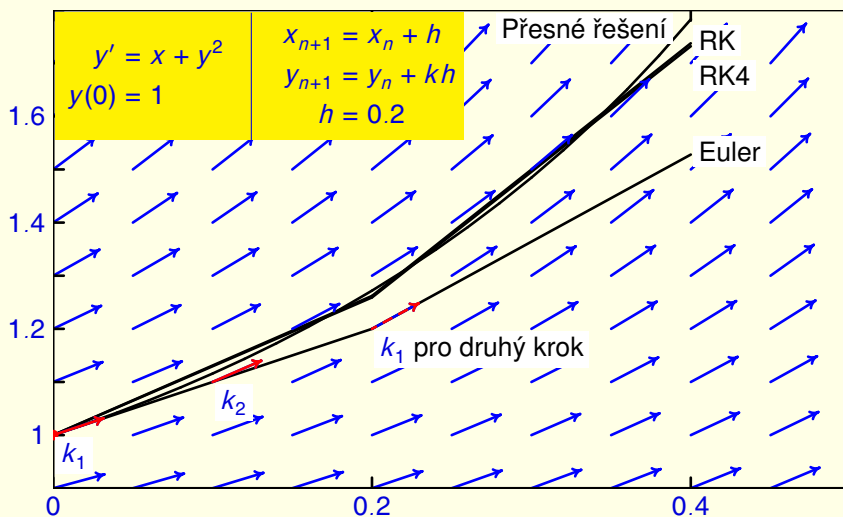
**RK4** (metoda Runge-Kutta čtvrtého řádu) Zde se jedná o poněkud rafinovanější variantu předchozího. Hlavní myšlenka spočívá v tom že podobně jako u metody druhého řádu uděláme fiktivně půl kroku směrem  $k_1$  podle Eulerovy metody a ze směrového pole v bodě do kterého se dostaneme získáme směr  $k_2$ . Poté podobně provedeme opět fiktivně půl kroku směrem  $k_2$  a ze směrového pole v bodě, do kterého se dostaneme, získáme směr  $k_3$ . Konečně, směrem  $k_3$  provedeme fiktivně celý krok a získáme směr  $k_4$ . Ze všech těchto směrů vypočítáme vážený průměr ve kterém jsou  $k_2$  a  $k_3$  zastoupeny dvojnásobnou vahou oproti  $k_1$  a  $k_4$  a získáme směr pro provedení dalšího kroku metody. K předešlým vzorcům tedy přidáváme:

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

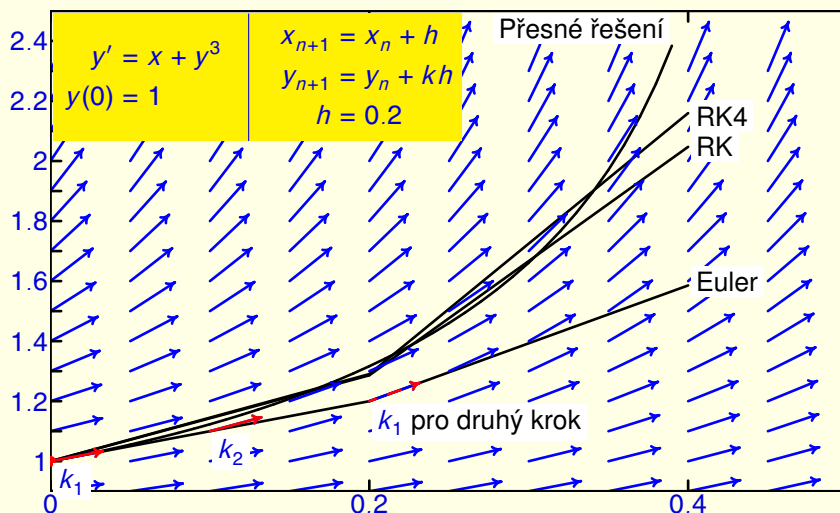
$$\text{kde } k_3 := f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_2 \frac{h}{2}\right) \text{ a } k_4 := f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$



Obrázek 5.1: Jeden krok pro každou z metod a počáteční úlohu  $y' = \frac{3}{2}y^3 - \left(\frac{11}{2}x\right)^4$ ,  $y(0.2) = 1.4$

Obrázek 5.2: Numerické řešení počáteční úlohy  $y' = x + y^2$ ,  $y(0) = 1$

- Stejně se postupuje i pro systém libovolného počtu lineárních rovnic prvního řádu. Například pro autonomní systém  $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$ , počáteční podmínku  $\begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$  a Eulerovu metodu s krokem  $h$  dostáváme  $\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h \\ x_{i+1} = x_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + hg(x_i, y_i) \end{cases}$ .
- Diferenciální rovnici druhého řádu  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  můžeme substitucí  $y_1 = y$ ,  $y_2 = y'$  přepsat na systém  $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(x) - p(x)y_2 - q(x)y_1 \end{cases}$

Obrázek 5.3: Numerické řešení počáteční úlohy  $y' = x + y^3$ ,  $y(0) = 1$



