



Lokální extrémý test pomocí první derivace Interaktivní kvízy

Robert Mařík

29. ledna 2011

Teorie

Test

Úvodní strana

Print

Titulní strana



Strana 1 z 34


Zpět

Full Screen

Zavřít

Konec

Vyzkoušejte dva, tři nebo dvacet dalších mých kvízů a potom mi prosím vyplňte na webu. Děkuji!

Pro vytvoření vlastního testu podle tohoto vzoru budete potřebovat volně šiřitelný **AcroT_EXeDucation bundle**, zdrojový soubor pro T_EX  a přečíst si návod na **domovské stránce**.





1. Teorie

Definice 1 (lokální extrém) *Bud' f funkce a $x_0 \in \text{Dom}(f)$.*

- Řekneme, že funkce má v bodě x_0 **lokální maximum**, jestliže existuje ryzí okolí $\bar{O}(x_0)$, takové, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro všechna $x \in \bar{O}(x_0)$. Je-li nerovnost ostrá, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **ostré lokální maximum**.
- Platí-li opačné nerovnosti, říkáme, že funkce má v bodě x_0 **lokální minimum a ostré lokální minimum**.
- Lokální maximum a minimum nazýváme společným názvem **lokální extrémy**. Ostré lokální maximum a ostré lokální minimum nazýváme společným názvem **ostré lokální extrémy**.

Funkce má v bodě x_0 ostré lokální maximum (minimum), jestliže v nějakém ryzím okolí bodu x_0 nabývá pouze nižších (vyšších) funkčních hodnot, než $f(x_0)$. Hodnota $f(x_0)$ je tedy jediná nejvyšší (nejnižší) funkční hodnota v nějakém okolí bodu x_0 .

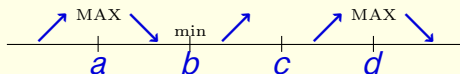


Věta 1 (postačující podmínky pro existenci a neexistenci lokálních extrémů)

Bud' f funkce definovaná a spojitá v nějakém okolí bodu x_0 .

- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce rostoucí a pravé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce klesající, je bod x_0 bodem ostrého lokálního maxima funkce f .
- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce klesající a pravé okolí bodu x_0 , ve kterém je funkce rostoucí, je bod x_0 bodem ostrého lokálního minima funkce f .
- Jestliže existuje okolí bodu x_0 ve kterém je funkce ryze monotonní, lokální extrém v bodě x_0 nenastává.

Graficky můžeme předchozí větu ilustrovat následovně.





Definice 2 (stacionární bod) Řekneme, že bod x_0 je *stacionárním bodem* funkce f , jestliže funkce f má v bodě x_0 nulovou derivaci, tj. $f'(x_0) = 0$.

Věta 2 (souvislost derivace a lokálních extrémů) Necht' má funkce v bodě x_0 lokální extrém. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá derivaci, nebo je tato derivace nulová, tj. platí $f'(x_0) = 0$ a x_0 je stacionárním bodem funkce f .

Věta 3 (souvislost derivace a monotonie) Necht' funkce f má derivaci na otevřeném intervalu I .

- Je-li $f'(x) > 0$ na intervalu I , je funkce f rostoucí na I .
- Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu I , je funkce f klesající na I .



Hledání lokálních extrémů.

1. Najdeme definiční obor funkce f .
2. Najdeme derivaci $f'(x)$ funkce $f(x)$.
3. Vyřešíme rovnici $f'(x) = 0$ a najdeme tak stacionární body.
4. Najdeme definiční obor a body nespjitosti derivace $f'(x)$ (Zpravidla stejné jako pro funkci $f(x)$).
5. Vyznačíme nulové body první derivace a body nespojitosti první derivace na reálnou osu. Tím se osa rozpadne na podintervaly.
6. Na každém podintervalu si funkce zachovává typ monotonie. Tento typ určíme podle znaménka první derivace.
7. V bodě kde není nespojitost a kde funkce mění monotonii je lokální extrém.
8. Ve stacionárním bodě kde není nespojitost a kde funkce nemění monotonii je inflexní bod.



2. Test

Kvíz. V následujícím kvízu máte zadánu funkci a její derivaci (po úpravě).

- Určete stacionární body a body nespojitosti
- Vyznačte je ve správném pořadí na osu x .
- Určete typ monotonie na podintervalech anebo zaklikněte, že funkce an daném podintervalu není definovaná.
- Určete lokální extrémy.

První dva nebo tři kvízy jsou *naprosto triviální*, abyste si oběřili že chápete *ovládání testu*.



Příklad. Funkce nemá stacionární body, má jeden bod nespojitosti, není definovaná na $(-\infty, 0)$ a roste na intervalu $(0, \infty)$ (tahle odpověď se mi nepovedla, proto červený křížek).

2. Find extrema of the function $y = \ln(x)$.

Hint: the derivative is $y' = \frac{1}{x}$.

The answer to the following two questions is a comma separated list of numbers, or word **empty**.

(a) Stationary points: ?

(b) Points of discontinuity: ?

- (c) increasing
 decreasing
 undefined

- (e) increasing
 decreasing
 undefined

?

- (d) MAXIMUM
 minimum
 discontinuity
 inflection

1. Najděte lokální extrémy funkce $y = x^2$.

Nápověda: derivace je $y' = 2x$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko **nejsou**.

(a) Stacionární body:

(b) Nespojitosti:

(c) roste
klesá
není definovaná

(e) roste
klesá
není definovaná

(d) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe

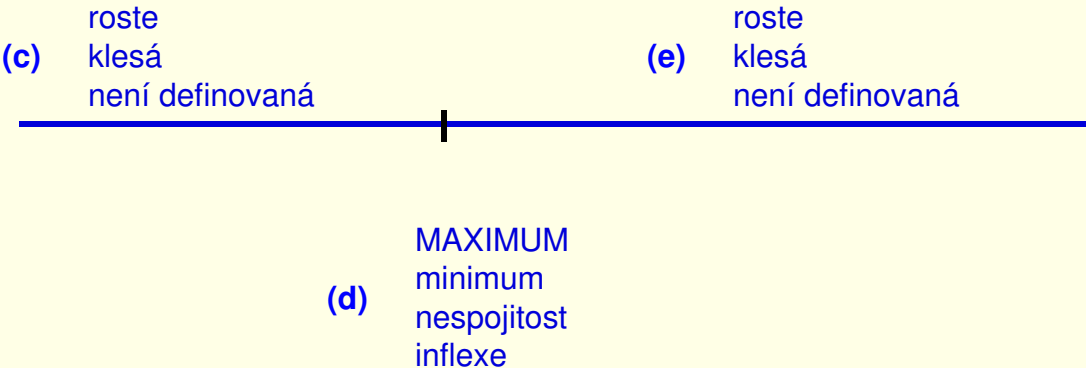


2. Najděte lokální extrémy funkce $y = \ln(x)$.

Nápověda: derivace je $y' = \frac{1}{x}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko **nejsou**.

- (a) Stacionární body:
- (b) Nespojitosti:



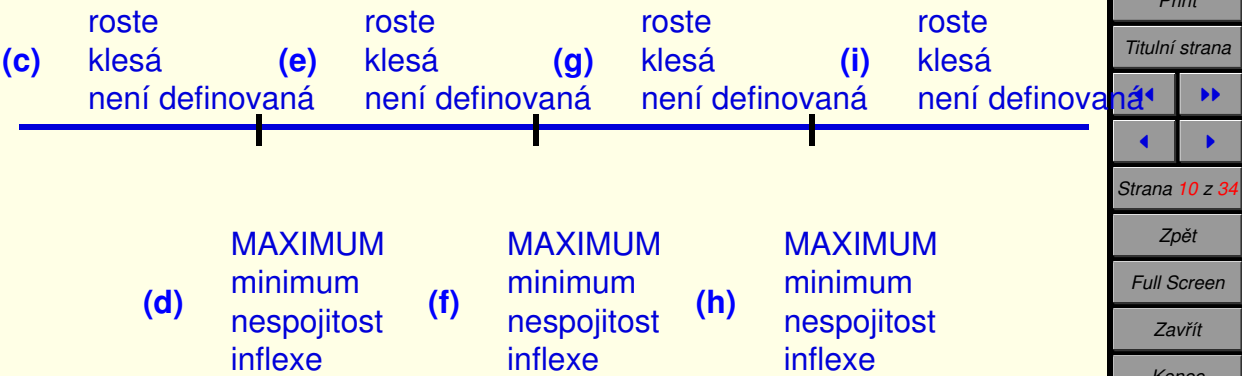


3. Najděte lokální extrémý funkce $y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$.

Nápověda: derivace je $y' = -\frac{4}{9}x(x^2 - 3)$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko nejsou.

- (a) Stacionární body:
- (b) Nespojitosti:



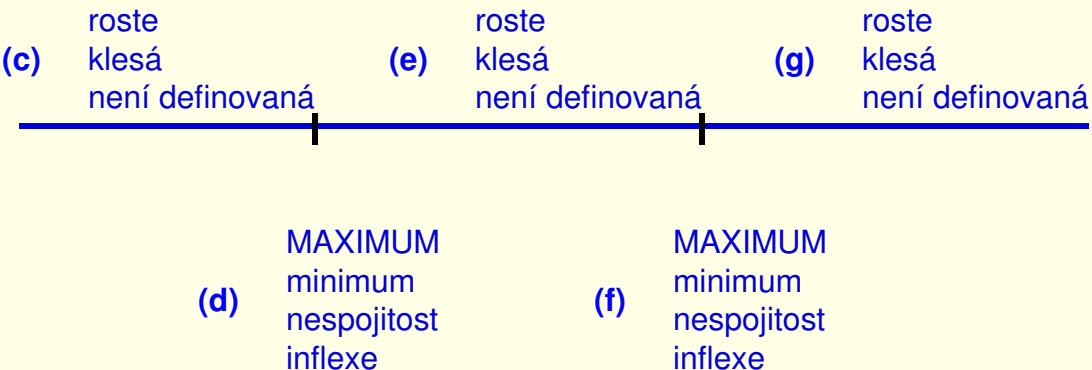
4. Najděte lokální extrémy funkce $y = 4x^3 - 3x^4$.

Nápověda: derivace je $y' = 12x^2(1 - x)$.

odpovědi na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko *nejsou*.

(a) Stacionární body:

(b) Nespojitosti:



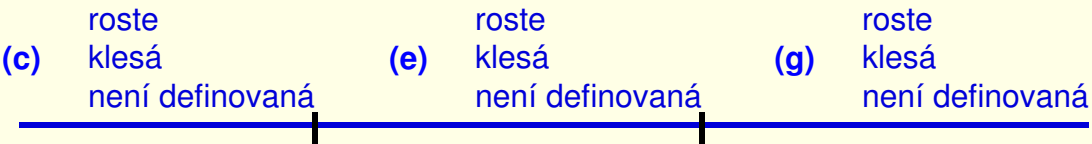
5. Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$.

Nápověda: derivace je $y' = -4\frac{x+1}{(x-1)^3}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko *nejsou*.

(a) Stacionární body:

(b) Nespojitosti:



(d) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe

(f) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe



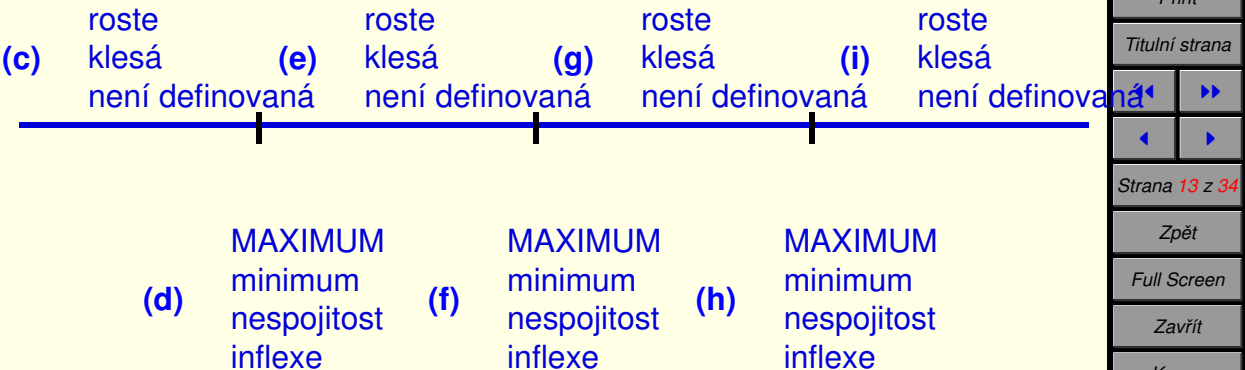
6. Najděte lokální extrémy funkce $y = x + \frac{4}{x}$.

Nápověda: derivace je $y' = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$.

odpovědi na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko *nejsou*.

(a) Stacionární body:

(b) Nespojitosti:



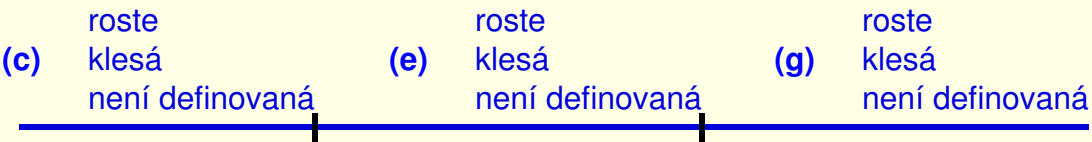
7. Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x}{(x+1)^2}$.

Nápověda: derivace je $y' = \frac{1-x}{(x+1)^3}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko *nejsou*.

(a) Stacionární body:

(b) Nespojitosti:



(d) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe

(f) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe



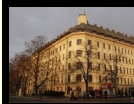
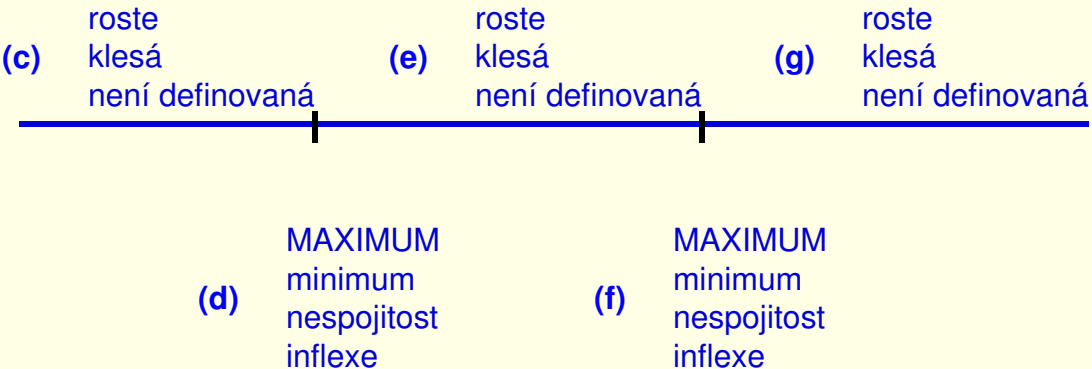
8. Najděte lokální extrémy funkce $y = x^2 - 2 \ln x$.

Nápověda: derivace je $y' = 2 \frac{(x - 1)(x + 1)}{x}$.

odpovědi na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko *nejsou*.

(a) Stacionární body:

(b) Nespojitosti:



9. Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^2}{1-x}$.

Nápověda: derivace je $y' = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$.

odpovědi na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko *nejsou*.

(a) Stacionární body:

(b) Nespojitosti:

(c) roste klesá (e) roste klesá (g) roste klesá (i) roste klesá
není definovaná není definovaná není definovaná není definovaná

(d) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe

(f) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe

(h) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe



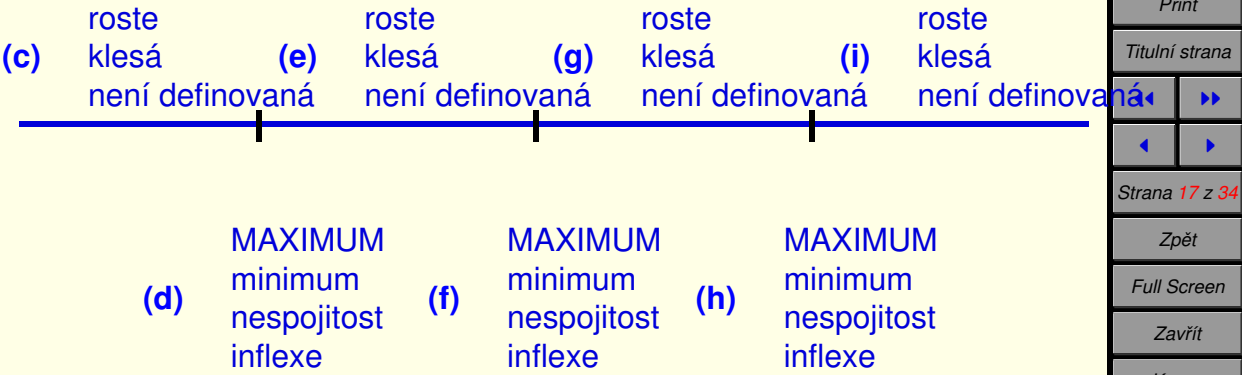


10. Najděte lokální extrémý funkce $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$.

Nápověda: derivace je $y' = -2x(x - 1)(x + 1)$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko nejsou.

- (a) Stacionární body:
- (b) Nespojitosti:



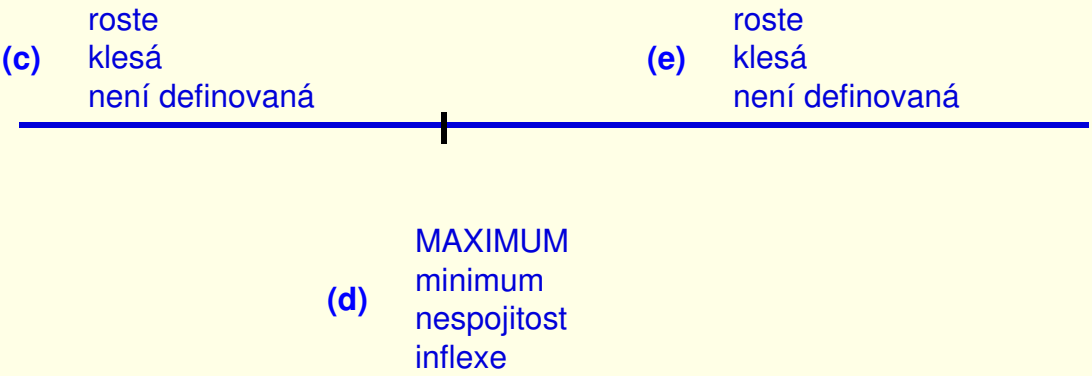


11. Najděte lokální extrémý funkce $y = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Nápověda: derivace je $y' = \frac{2x + 1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko *nejsou*.

- (a) Stacionární body:
- (b) Nespojitosti:



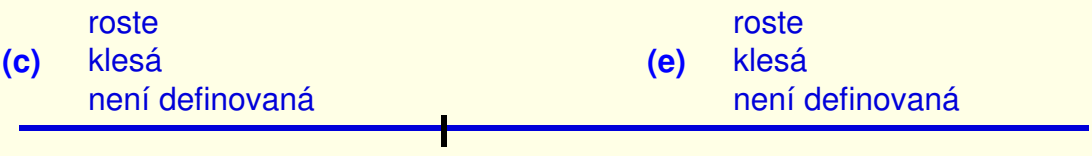


12. Najděte lokální extrémý funkce $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

Nápověda: derivace je $y' = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko *nejsou*.

- (a) Stacionární body:
- (b) Nespojitosti:





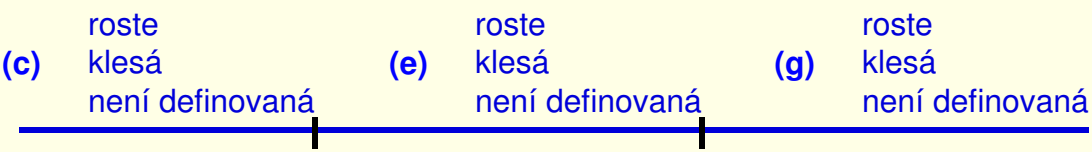
13. Najděte lokální extrémý funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$.

Nápověda: derivace je $y' = -4\frac{x+1}{(x-1)^3}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko nejsou.

(a) Stacionární body:

(b) Nespojitosti:



(d) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe

(f) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe



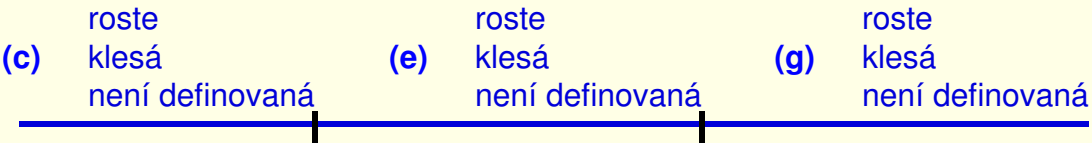
14. Najděte lokální extrémý funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

Nápověda: derivace je $y' = -8\frac{(x+1)^3}{(x-1)^5}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko *nejsou*.

(a) Stacionární body:

(b) Nespojitosti:



(d) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe

(f) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe



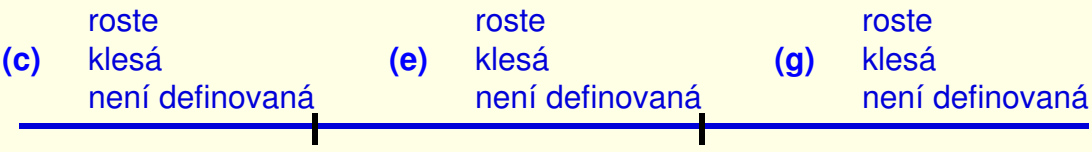
15. Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x}{1+x^2}$.

Nápověda: derivace je $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko nejsou.

(a) Stacionární body:

(b) Nespojitosti:



(d) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe

(f) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe

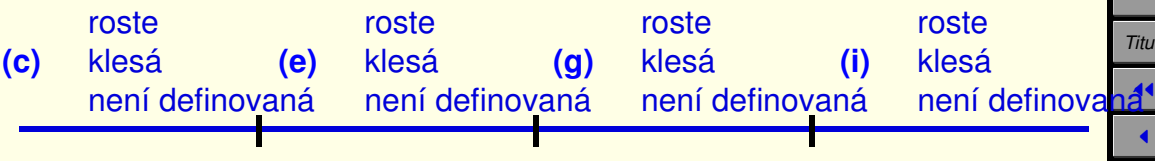


16. Najděte lokální extrémý funkce $y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2} = -1 + \frac{2}{1 - x^2}$.

Nápověda: derivace je $y' = \frac{4x}{(1 - x^2)^2}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko nejsou.

- (a) Stacionární body:
- (b) Nespojitosti:



- (d) MAXIMUM
- minimum
- nespojitosť
- inflexe
- (f) MAXIMUM
- minimum
- nespojitosť
- inflexe
- (h) MAXIMUM
- minimum
- nespojitosť
- inflexe



17. Najděte lokální extrémý funkce $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

Nápověda: derivace je $y' = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko *nejsou*.

- (a) Stacionární body:
- (b) Nespojitosti:

	(e)	(g)	(i)
(c)	(e)	(g)	(i)
roste klesá není definovaná	roste klesá není definovaná	roste klesá není definovaná	roste klesá není definovaná
<hr style="border: 2px solid blue;"/>			
(d)	(f)	(h)	
MAXIMUM minimum nespojitosť inflexe	MAXIMUM minimum nespojitosť inflexe	MAXIMUM minimum nespojitosť inflexe	

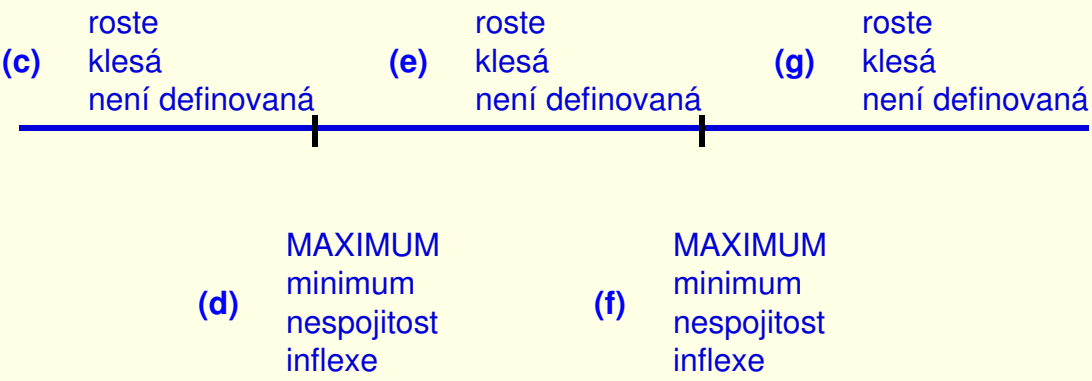


18. Najděte lokální extrémý funkce $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Nápověda: derivace je $y' = \frac{2 - \ln x}{2x^{3/2}}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko nejsou.

- (a) Stacionární body:
- (b) Nespojitosti:



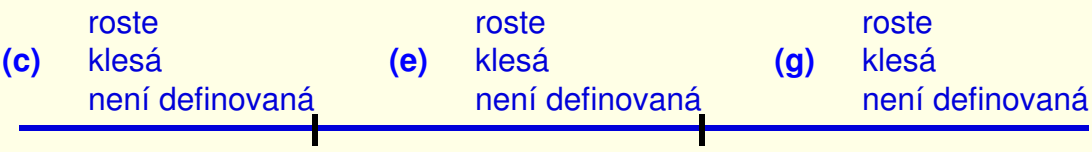


19. Najděte lokální extrémý funkce $y = \frac{e^x}{1+x}$.

Nápověda: derivace je $y' = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko nejsou.

- (a) Stacionární body:
- (b) Nespojitosti:



- (d) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe
- (f) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe

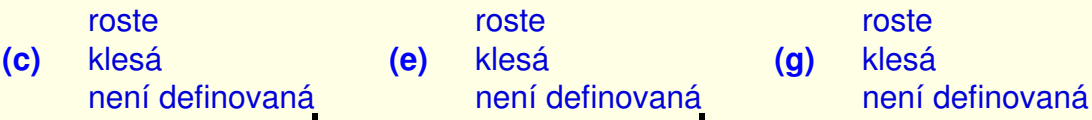


20. Najděte lokální extrémý funkce $y = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.

Nápověda: derivace je $y' = e^{-x} \frac{2 - 3x}{3\sqrt[3]{x}}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko nejsou.

- (a) Stacionární body:
- (b) Nespojitosti:



- (d) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe
- (f) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe

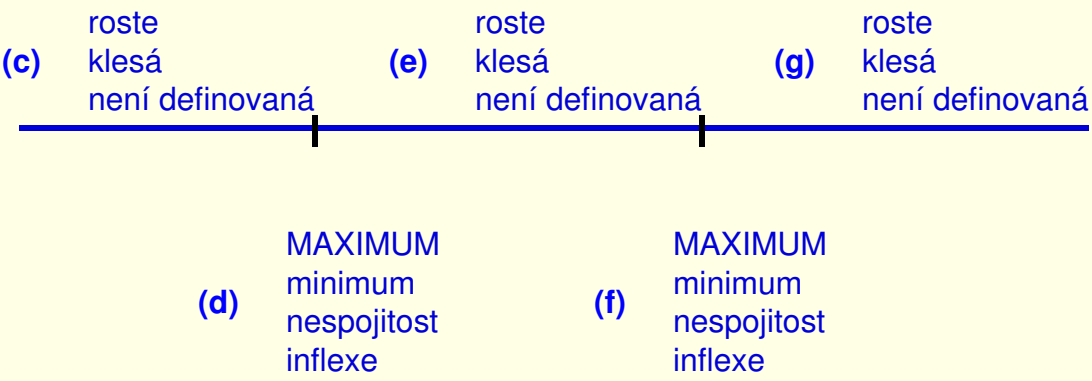


21. Najděte lokální extrémý funkce $y = x^2 e^{-x}$.

Nápověda: derivace je $y' = e^{-x} x(2 - x)$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko nejsou.

- (a) Stacionární body:
- (b) Nespojitosti:





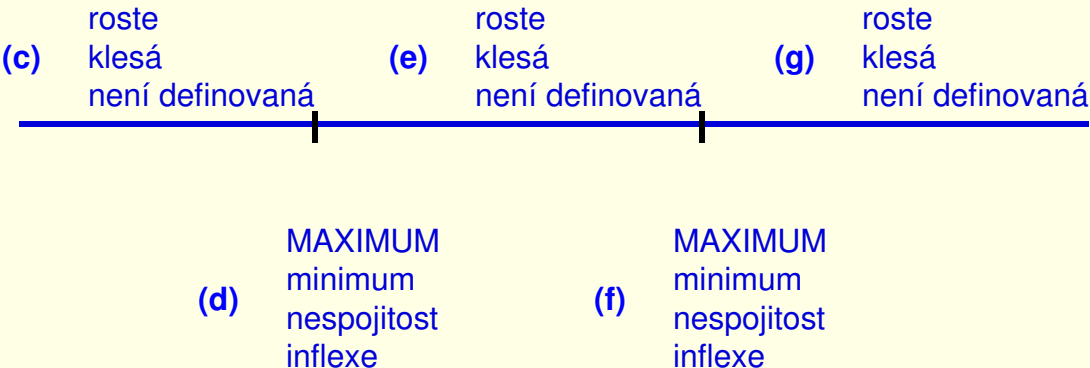
22. Najděte lokální extrémý funkce $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

Nápověda: derivace je $y' = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko *nejsou*.

(a) Stacionární body:

(b) Nespojitosti:



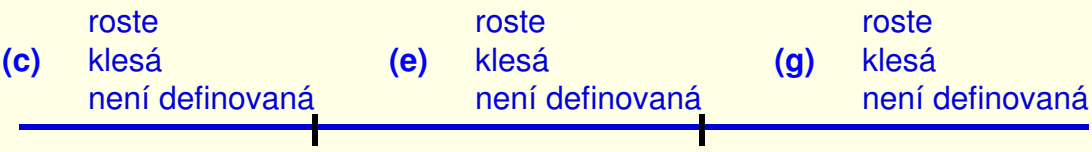


23. Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^2}{2} - \ln(1 + x)$.

Nápověda: derivace je $y' = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko nejsou.

- (a) Stacionární body:
- (b) Nespojitosti:



- (d) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe
- (f) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe

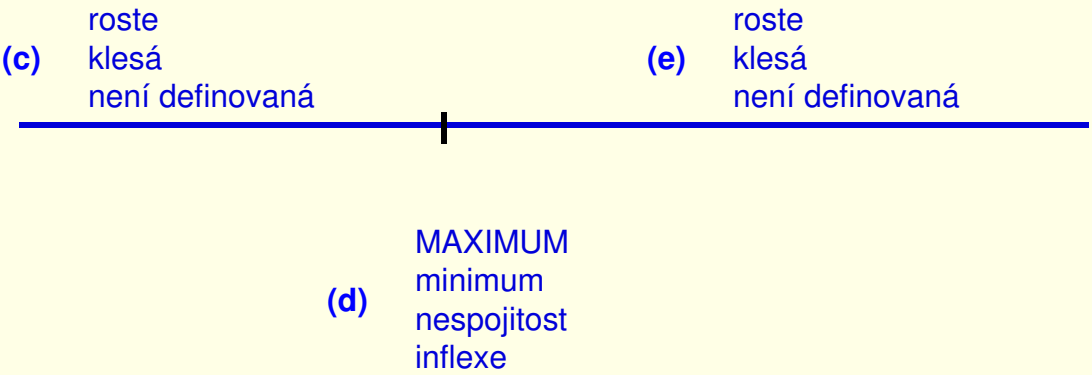


24. Najděte lokální extrémý funkce $y = x - \ln(1 + x^2)$.

Nápověda: derivace je $y' = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko nejsou.

- (a) Stacionární body:
- (b) Nespojitosti:



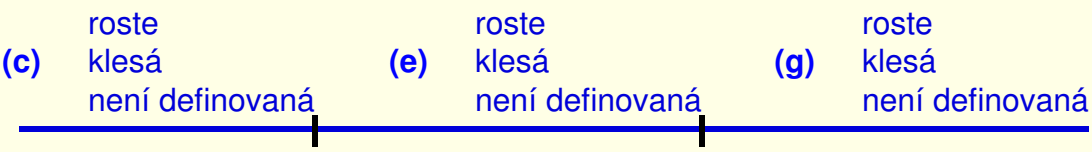


25. Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^3}$.

Nápověda: derivace je $y' = \frac{x^5 - 24}{x^4}$.

odpovědi na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko nejsou.

- (a) Stacionární body:
- (b) Nespojitosti:



- (d) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe
- (f) MAXIMUM
minimum
nespojitosť
inflexe



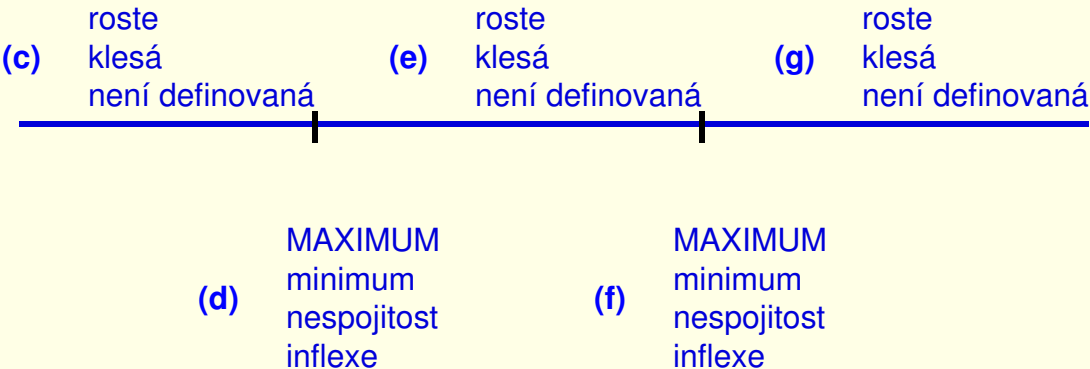
26. Najděte lokální extrémý funkce $y = (x + 1)^{10}e^{-x}$.

Nápověda: derivace je $y' = e^{-x}(x + 1)^9(9 - x)$.

odpovědi na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko *nejdou*.

(a) Stacionární body:

(b) Nespojitosti:





27. Najděte lokální extrémý funkce $y = \frac{x^2}{2^x}$.

Nápověda: derivace je $y' = \frac{x(2 - x \ln 2)}{2^x}$.

odpovědí na následující otázku jsou čísla, oddělená čárkou, nebo slovíčko *nejsou*.

(a) Stacionární body:

(b) Nespojitosti:

