




# Diferenciální rovnice prvního řádu

## Explicitní vzorec

Robert Mařík

29. ledna 2011

Vyzkoušejte dva, tři nebo dvacet dalších mých kvízů a potom mi prosím vyplňte [anketu](#) na webu. Děkuji!

Pro vytvoření vlastního testu podle tohoto vzoru budete potřebovat volně šiřitelný [AcroTeXeDucation bundle](#), zdrojový soubor pro  $\TeX$   a přečíst si návod na [domovské stránce](#).



*Teorie*

*Testy*

Úvodní strana

Print

Titulní strana

◀▶

◀▶

Strana 1 z 14

Zpět

Full Screen

Zavřít

Konec



# 1. Teorie

**Definice 1 (lineární DR)** *Nechť funkce  $a$ ,  $b$  jsou spojité na intervalu  $I$ . Rovnice*

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (1)$$

*se nazývá obyčejná lineární diferenciální rovnice prvního řádu (zkráceně píšeme LDR). Je-li navíc  $b(x) \equiv 0$  na  $I$ , nazývá se rovnice (1) homogenní, v opačném případě nehomogenní.*

Tvar (1) budeme v tomto testu nazývat *standartním tvarem*. Například rovnice  $2y' + xy = 4$  má normální tvar  $y' + \frac{x}{2}y = 2$ .

**Definice 2 (homogenní rovnice)** *Bud' dána rovnice (1). Homogenní rovnice, která vznikne z rovnice (1) nahrazením pravé strany nulovou funkcí, tj. rovnice*

$$y' + a(x)y = 0 \quad (2)$$

*se nazývá homogenní rovnice asociovaná s nehomogenní rovnicí (1).*

**Věta 1 (obecné řešení)** • *Je-li  $y_p(x)$  partikulární řešení nehomogenní rovnice a  $y_0(x)$  obecné řešení asociované homogenní rovnice, je funkce*

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x)$$

*obecným řešením nehomogenní rovnice.*

- *Je-li  $y_p(x)$  partikulární řešení nehomogenní rovnice a  $y_0(x)$  nějaké netriviální řešení asociované homogenní rovnice, je funkce*

$$y(x) = y_p(x) + C y_0(x)$$

*obecným řešením této nehomogenní rovnice.*



$$y' + a(x)y = b(x) \quad \text{lineární ODR} \quad (3)$$

$$y' + a(x)y = 0 \quad \text{asoc. hom. ODR} \quad (4)$$

$$y_0(x) = C \underbrace{e^{-\int a(x) dx}}_{\text{part. řešení rce (4)}}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{Obecné řešení rce (4)} \quad (5)$$

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx} \left[ \int b(x) e^{\int a(x) dx} dx + C \right] \quad \text{Obecné řešení rce (3)} \quad (6)$$

$$= \underbrace{e^{-\int a(x) dx} \int b(x) e^{\int a(x) dx} dx}_{y_p(x) \text{ — part. řeš. rce (3)}} + \underbrace{C e^{-\int a(x) dx}}_{y_0(x)} \quad C \in \mathbb{R}$$

Kde  $\int \dots dx$  je *jedna* libovolná z primitivních funkcí (bez integrační konstanty) a je dána jednoznačně až na aditivní konstantu. Proto  $e^{\pm \int a(x) dx}$  je dána jednoznačně až na nenulovou multiplikační konstantu a partikulární řešení je dáno jednoznačně až na aditivní faktor, který je řešením asociované homogení rovnice.



## 2. Testy

Testy začínají na následujících stranách, vždy jeden test na stránku.

- Odpověď na normální tvar LDR je dána jednoznačně, až na to, jestli člen  $b$  uvedete napravo nebo nalevo.
- Integrál funkce  $a$  je dán jednoznačně až na aditivní konstantu. Proto musíte nejprve odpovědět na tuto otázku a poté se vám zobrazí, kterou z primitivních funkcí máte použít. Potom bude odpověď na funkci  $b(x)e^{\int a(x) dx}$  a její integrál dána jednoznačně (resp. jednoznačně až na aditivní konstantu pro integrál).
- Jako obvykle si můžete správné řešení zobrazit kliknutím na tlačítko (i opakovaně, pokud se tlačítko vztahuje k více políčkům). Nedělejte to ale příliš často - úlohy jsou jednoduché a máte se naučit metodu. Příklady na písémkách budou složitější<sup>1</sup>!
- A jako obvykle: Máte-li nějakou připomínku či návrh k těmto testům, dejte mi prosím vědět!

<sup>1</sup>delší integrály, složitější derivace ...



**Kvíz. 1.** Řešte rovnici  $y' - y = 2$

1. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme

$$a(x) =$$

$$b(x) =$$

2. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$$\int a(x) dx =$$

3. V dalším postupu použijte  $\int a(x) dx = -x$

$$\text{Najděte } b(x)e^{\int a(x) dx} =$$

4. Integrujte:  $\int b(x)e^{\int a(x) dx} dx =$

5. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx} \left[ \int b(x)e^{\int a(x) dx} dx + C \right]$$

=



**Kvíz. 2.** Řešte rovnici  $xy' + y = x^2$

1. Standardní tvar rovnice je
2. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme  
 $a(x) =$   
 $b(x) =$
3. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$$\int a(x) dx =$$

4. V dalším postupu použijte  $\int a(x) dx = \ln(x)$

Najděte  $b(x)e^{\int a(x) dx} =$

5. Integrujte:  $\int b(x)e^{\int a(x) dx} dx =$

6. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx} \left[ \int b(x)e^{\int a(x) dx} dx + C \right]$$

=



**Kvíz. 3.** Řešte rovnici  $xy' - y = 1$

1. Standardní tvar rovnice je
2. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme  
 $a(x) =$   
 $b(x) =$
3. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$$\int a(x) dx =$$

4. V dalším postupu použijte  $\int a(x) dx = -\ln(x)$

$$\text{Najděte } b(x)e^{\int a(x) dx} =$$

5. Integrujte:  $\int b(x)e^{\int a(x) dx} dx =$

6. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx} \left[ \int b(x)e^{\int a(x) dx} dx + C \right]$$
$$=$$



**Kvíz. 4.** Řešte rovnici  $(x + 1)y' - 2y = (x + 1)^4$

1. Standardní tvar rovnice je
2. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme  
 $a(x) =$   
 $b(x) =$
3. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$$\int a(x) dx =$$

4. V dalším postupu použijte  $\int a(x) dx = -2 \ln(x + 1)$

Najděte  $b(x)e^{\int a(x) dx} =$

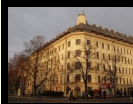
5. Integrujte:  $\int b(x)e^{\int a(x) dx} dx =$

6. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx} \left[ \int b(x)e^{\int a(x) dx} dx + C \right]$$

=





**Kvíz. 5.** Řešte rovnici  $y' \cos(x) + y \sin(x) = 1$

1. Standardní tvar rovnice je
2. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme  
 $a(x) =$   
 $b(x) =$
3. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$$\int a(x) dx =$$

4. V dalším postupu použijte  $\int a(x) dx = -\ln \cos(x)$

Najděte  $b(x)e^{\int a(x) dx} =$

5. Integrujte:  $\int b(x)e^{\int a(x) dx} dx =$

6. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx} \left[ \int b(x)e^{\int a(x) dx} dx + C \right]$$

=



Kvíz. 6. Řešte rovnici  $y' - y = \frac{1 + x^2}{x} e^x$

1. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme

$$a(x) =$$

$$b(x) =$$

2. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$$\int a(x) dx =$$

3. V dalším postupu použijte  $\int a(x) dx = -x$

$$\text{Najděte } b(x)e^{\int a(x) dx} =$$

4. Integrujte:  $\int b(x)e^{\int a(x) dx} dx =$

5. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx} \left[ \int b(x)e^{\int a(x) dx} dx + C \right]$$
$$=$$



**Kvíz. 7.** Řešte rovnici  $y' - y \tan x = \sin x$

1. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme

$$a(x) =$$

$$b(x) =$$

2. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$$\int a(x) dx =$$

3. V dalším postupu použijte  $\int a(x) dx = \ln \cos(x)$

Najděte  $b(x)e^{\int a(x) dx} =$

4. Integrujte:  $\int b(x)e^{\int a(x) dx} dx =$

5. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx} \left[ \int b(x)e^{\int a(x) dx} dx + C \right]$$

=



**Kvíz. 8.** Řešte rovnici  $y' \cos x = (y + 2 \cos x) \sin x$

1. Standardní tvar rovnice je
2. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme  
 $a(x) =$   
 $b(x) =$
3. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$$\int a(x) dx =$$

4. V dalším postupu použijte  $\int a(x) dx = \ln \cos(x)$

Najděte  $b(x)e^{\int a(x) dx} =$

5. Integrujte:  $\int b(x)e^{\int a(x) dx} dx =$

6. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx} \left[ \int b(x)e^{\int a(x) dx} dx + C \right]$$

=



**Kvíz. 9.** Řešte rovnici  $(2x + 1)y' + y = \sqrt{2x + 1} + 3$

1. Standartní tvar rovnice je
2. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme  
 $a(x) =$   
 $b(x) =$
3. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$$\int a(x) dx =$$

4. V dalším postupu použijte  $\int a(x) dx = \frac{1}{2} \ln(2x + 1)$

Najděte  $b(x)e^{\int a(x) dx} =$

5. Integrujte:  $\int b(x)e^{\int a(x) dx} dx =$

6. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx} \left[ \int b(x)e^{\int a(x) dx} dx + C \right]$$

=



Kvíz. 10. Řešte rovnici  $xy' + 2y = e^{-x^2}$

1. Standardní tvar rovnice je

2. Porovnáním s obecným tvarem rovnice vidíme

$$a(x) =$$

$$b(x) =$$

3. Integrujte (konstantu integrace použijte nulovou)

$$\int a(x) dx =$$

4. V dalším postupu použijte  $\int a(x) dx = 2 \ln(x)$

$$\text{Najděte } b(x)e^{\int a(x) dx} =$$

5. Integrujte:  $\int b(x)e^{\int a(x) dx} dx =$

6. Napište obecné řešení

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx} \left[ \int b(x)e^{\int a(x) dx} dx + C \right]$$
$$=$$