

MATEMATIKA

Robert Mařík

Ústav matematiky, LDF, MZLU

5. patro, budova B

marik@mendelu.cz

user.mendelu.cz/marik

- P. Rádł, B. Černá, L. Stará: Základy vyšší matematiky, skriptum MZLU
- Text přednášky na user.mendelu.cz/marik, záložka „Výuka/Teaching - Matematika“
- Důležitá sdělení:
 - is.mendelu.cz – přihlásit se heslem, jít na Dokumentový server, LDF–Předměty–Název předmětu
- Příklady: skripta, user.mendelu.cz/marik záložka „Výuka/Teaching - Příklady“

Obsah

1	Funkce, vlastnosti funkcí	4
2	Limita, spojitost	17
3	Derivace funkce	34

1 Funkce, vlastnosti funkcí

V této kapitole se budeme zabývat funkcemi. Pomocí funkcí v praxi popisujeme vztahy mezi veličinami. Nejprve se zaměříme na nejjednodušší vlastnosti funkcí.

Definice (funkce). Buďte A a B neprázdné podmnožiny množiny reálných čísel.

Pravidlo f , které každému prvku množiny A přiřadí jediný prvek množiny B se nazývá *funkce* (přesněji: *reálná funkce jedné reálné proměnné*). Zapisujeme $f : A \rightarrow B$. Skutečnost, že prvku $a \in A$ je přiřazen prvek $b \in B$ zapisujeme takto: $f(a) = b$. Přitom říkáme, že b je *obrazem prvku a* při zobrazení f , resp. že a je *vzorem prvku b* při zobrazení f .

Je-li množinou B množina reálných čísel (tj. $B \subset \mathbb{R}$), potom zobrazení f nazýváme *reálnou funkcí*. Je-li navíc množina A podmnožinou množiny \mathbb{R} , tj. $A \subset \mathbb{R}$, nazýváme zobrazení f *reálnou funkcí jedné reálné proměnné*, zkráceně též *funkcí*.

Definice (pojmy spojené s funkcemi). Množina A z definice funkce se nazývá *definiční obor funkce* f . Označujeme $D(f)$ (resp. $Dom(f)$). Množina všech $b \in B$, pro které existuje $a \in A$ s vlastností $f(a) = b$ se nazývá *obor hodnot funkce* f . Označujeme $H(f)$ (resp. $Im(f)$).

Je-li $y = f(x)$ nazýváme proměnnou x též *nezávislou proměnnou* a proměnnou y *závislou proměnnou*. *Grafem* funkce rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ s vlastností $y = f(x)$.

Poznámka 1. Funkce je tedy pravidlo, které jednomu reálnému číslu přiřadí jediné, přesně definované jiné reálné číslo.

- „ $y =$ vzorec s proměnnou x “, *explicitní tvar funkce*, např. $y = x^2 + \ln x$.
- „vzorec s proměnnými $x, y = 0$ “, *implicitní tvar funkce*, např. $x - y - \ln y = 0$.
- Zjednodušeně řečeno se tedy jedná o pravidlo, které je buď „efektivní“ (explicitní tvar) nebo „málo efektivní“ (implicitní tvar) pro výpočet funkčních hodnot.

Definice (periodičnost funkce). Řekneme, že funkce f je *periodická*, existuje-li kladné číslo p s vlastnostmi: je-li $x \in D(f)$, je i $x + p \in D(f)$ a $f(x) = f(x + p)$. Nejmenší číslo p s touto vlastností nazýváme (*nejmenší*) *periodou*.

V následující definici se budeme zajímat o to, jestli existuje nějaký vztah mezi funkční hodnotou v bodě x z definičního oboru a v bodě opačném.

Definice (parita funkce). Necht' funkce f splňuje následující podmínku: $x \in D(x) \Rightarrow (-x) \in D(f)$.

1. Řekneme, že funkce f je *sudá* pokud platí $f(-x) = f(x)$.
2. Řekneme, že funkce f je *lichá* pokud platí $f(-x) = -f(x)$.
3. Řekneme, že funkce f má *paritu*, je-li sudá nebo lichá.

- Poznámka 2** (graf funkce mající paritu).
- Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy y .
 - Graf liché funkce je středově souměrný podle bodu $[0, 0]$.

Věta 1. Paritu polynomů a racionálních funkcí lze určit následovně:

1. Polynom je sudá (lichá) funkce právě tehdy, když obsahuje právě členy se sudým (s lichým) exponentem.
2. Racionální funkce je lichá právě tehdy, když je podílem sudého a lichého polynomu (v libovolném pořadí).
3. Racionální funkce je sudá právě tehdy, když je podílem dvou sudých nebo dvou lichých polynomů.

Příklad 1 (parita). Následující funkce jsou sudé: $f(x) = x^4 - 6$, $g(x) = \frac{x^3 + x}{2x^5 - 3x}$, $h(x) = \frac{x^4 - 6}{x^2 + 1}$.

Následující funkce jsou liché: $f(x) = x^3 - 6x^7$, $g(x) = \frac{x^3 - x}{2x^4 - 3}$, $h(x) = \frac{x^6 - 3}{x^3 - x}$.

Následující funkce nejsou ani sudé ani liché: $f(x) = x^4 + x^2 - x$, $g(x) = \frac{x^3 - x}{2x^4 - 3x}$, $y = e^x$.

Definice (ohraničenost). Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f .

1. Řekneme, že funkce f je na množině M **zdola ohraničená**, existuje-li reálné číslo a s vlastností $a \leq f(x)$ pro všechna $x \in M$.
2. Řekneme, že funkce f je na množině M **shora ohraničená**, existuje-li reálné číslo b s vlastností $f(x) \leq b$ pro všechna $x \in M$.
3. Řekneme, že funkce f je na množině M **ohraničená**, je-li na M ohraničená zdola i shora.

Nespecifikujeme-li množinu M , máme na mysli, že uvedená vlastnost platí na celém definičním oboru funkce f .

Poznámka 3 (grafický důsledek). Funkce je shora ohraničená, jestliže existuje vodorovná přímka, která leží celá nad grafem funkce. Podobně poznáváme na grafu ohraničenost zdola.

Motivace. Pro libovolnou dobře definovanou funkci f platí implikace

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Nyní se budeme zajímat o to, za jakých podmínek lze tuto implikaci obrátit. Obrácení implikace by totiž mohlo být užitečné při řešení některých nelineárních rovnic.

Definice (prostost). Necht' f je funkce a $M \subseteq D(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f .

Řekneme, že funkce f je **prostá**, jestliže každý obraz má jen jediný vzor, tj. pro každé $y \in f(M)$ existuje jediné $x \in M$ s vlastností $f(x) = y$.

Nespecifikujeme-li množinu M , máme na mysli, že uvedená vlastnost platí na celém definičním oboru funkce f .

Poznámka 4 (grafický důsledek). Funkce je prostá, jestliže každá vodorovná přímka protíná graf nejvýše jednou.

Funkce $y = f(x)$	Funkce inverzní $y = f^{-1}(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y = x^2, x \geq 0$
$y = x^2, x \geq 0$	$y = \sqrt{x}$
$y = e^x$	$y = \ln x$
$y = \ln x$	$y = e^x$
$y = a^x$	$y = \log_a x$
$y = \sin x, x \in [-\pi/2, \pi/2]$	$y = \arcsin x$
$y = \cos x, x \in [0, \pi]$	$y = \arccos x$
$y = \operatorname{tg} x, x \in [-\pi/2, \pi/2]$	$y = \operatorname{arctg} x$

Tabulka 1: Inverzní funkce k základním elementárním funkcím.

Definice (inverzní funkce). Nechť funkce $f : A \rightarrow B$ je prostá. Pravidlo, které každému x z množiny $f(A)$ přiřadí to (jediné) y , pro které platí $f(y) = x$ se nazývá *inverzní funkce* k funkci f , označujeme f^{-1} .

Poznámka 5 (zápis čísla jako výsledku předem zadané operace). Je zřejmé, že $f(f^{-1}(x)) = x$ a $f^{-1}(f(x)) = x$ pro všechna, pro která má tento zápis smysl.

Toto nám umožňuje zapsat dané číslo jako výsledek nějaké operace. Např. číslo 1 lze zapsat libovolnou z následujících možností

$$1 = \ln e^1 = \log_5 5^1 = 6^{\log_6 1} = \sin(\arcsin 1) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1) = (\sqrt{1})^2$$

Poznámka 6 (nelineární rovnice). Má-li funkce f inverzní funkci f^{-1} a je-li tato inverzní funkce definována v bodě x , potom má nelineární rovnice s neznámou y

$$f(y) = x$$

právě jedno řešení dané vzorcem

$$y = f^{-1}(x).$$

Příklad 2 (nelineární rovnice). Řešme rovnici

$$e^{\frac{2}{x-1}} = 2.$$

Protože k exponenciální funkci je inverzní logaritmická funkce, plyne odsud

$$\frac{2}{x-1} = \ln 2,$$

odkud již snadno vyjádříme

$$x = \frac{2}{\ln 2} + 1.$$

Definice (monotonie funkce). Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f .

1. Řekneme, že funkce f je na množině M **rostoucí** jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ s vlastností $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.
2. Řekneme, že funkce f je na množině M **klesající** jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ s vlastností $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.
3. Řekneme, že funkce f je na množině M **(ryze) monotonní** je-li buď rostoucí, nebo klesající na M .

Nespecifikujeme-li množinu M , máme na mysli, že uvedená vlastnost platí na celém definičním oboru funkce f .

Příklad 3 (nelineární nerovnice). Nerovnici

$$\ln(x^2 - 4x - 4) > 0$$

Ize řešit například tak, že ji přepíšeme do tvaru s logaritmy na obou stranách nerovnice

$$\ln(x^2 - 4x - 4) > \ln 1$$

a odlogaritmuje:

$$x^2 - 4x - 4 > 1.$$

Odsud poté dostáváme postupně:

$$x^2 - 4x - 5 > 0$$

$$(x - 5)(x + 1) > 0$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty),$$

přičemž kvadratickou nerovnici vyřešíme například graficky.

Věta 2. Je-li funkce f na množině M ryze monotonní, je na této množině i prostá.

Věta 3. Je-li funkce $f(x)$ rostoucí (klesající, lichá), má tutéž vlastnost i funkce inverzní $f^{-1}(x)$.

Poznámka 7. Sudá funkce není prostá, nemá proto inverzní funkci.

Poznámka 8.

$$a = b \stackrel{f \text{ je prostá}}{\iff} f(a) = f(b)$$

$$a < b \stackrel{f \text{ je rostoucí}}{\iff} f(a) < f(b)$$

$$a \leq b \stackrel{f \text{ je rostoucí}}{\iff} f(a) \leq f(b)$$

$$a < b \stackrel{f \text{ je klesající}}{\iff} f(a) > f(b)$$

$$a \leq b \stackrel{f \text{ je klesající}}{\iff} f(a) \geq f(b)$$

Je-li funkce f prostá, pak pro každé $y \in H(f)$ má rovnice

$$f(x) = y$$

s neznámou x právě jedno řešení a toto řešení je možno vyjádřit vztahem

$$x = f^{-1}(y).$$

2 Limita, spojitost



Rovnoběžky se sbíhají v nekonečnu. Ale co to vlastně to nekonečno je? Jak se s ním pracuje? Jde s ním počítat?

Definice (rozšířená množina reálných čísel). *Rozšířenou množinou reálných čísel* \mathbb{R}^* rozumíme množinu reálných čísel \mathbb{R} rozšířenou o body $\pm\infty$ následovně: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, přičemž pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty, & a - \infty &= -\infty, & \infty + \infty &= \infty, & -\infty - \infty &= -\infty \\ \infty \cdot \infty &= -\infty \cdot (-\infty) = \infty, & \infty \cdot (-\infty) &= -\infty, & \frac{a}{\infty} &= \frac{a}{-\infty} = 0 \\ & & -\infty < a < \infty, & & |\pm\infty| &= \infty, \end{aligned}$$

je-li $a > 0$ definujeme $a \cdot \infty = \infty$ a $a \cdot (-\infty) = -\infty$,

je-li $a < 0$ definujeme $a \cdot \infty = -\infty$ a $a \cdot (-\infty) = \infty$. Další operace definujeme pomocí komutativnosti operací „+“ a „·“. Body $\pm\infty$ nazýváme *nevlastní body*, body množiny \mathbb{R} nazýváme *vlastní body*.

Poznámka 9. Nejsou tedy definovány operace „ $\infty - \infty$ “, „ $\pm\infty \cdot 0$ “ a „ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ “. Poznamenejme, že samozřejmě není definováno dělení nulou.

Definice (okolí). *Okolím* bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme libovolný otevřený interval, který ve svém vnitřku obsahuje bod a , značíme $O(a)$. *Ryzím* (též *prstencovým*) *okolím* bodu a rozumíme množinu $O(a) \setminus \{a\}$, značíme $\overline{O}(a)$. *Okolím bodu* ∞ rozumíme libovolný interval tvaru (A, ∞) , kde A je reálné číslo a *okolím bodu* $-\infty$ interval $(-\infty, A)$. Ryzím okolím nevlastních bodů rozumíme totéž, co okolím těchto bodů.

Definice (limita funkce). Necht' $a, L \in \mathbb{R}^*$ a $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Necht' je funkce f definovaná v nějakém ryzím okolí bodu a .

Řekneme, že funkce f má v bodě a *limitu* rovnu číslu L , jestliže ke každému okolí $O(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\overline{O}(a)$ bodu a takové, že pro libovolné $x \in \overline{O}(a)$ je $f(x) \in O(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad (1)$$

nebo $f(x) \rightarrow L$ pro $x \rightarrow a$.

Definice (vlastní a nevlastní limita). Je-li v předchozí definici $L \in \mathbb{R}$, nazývá se limita *vlastní*, je-li $L \in \{\infty, -\infty\}$, nazývá se limita *nevlastní*.

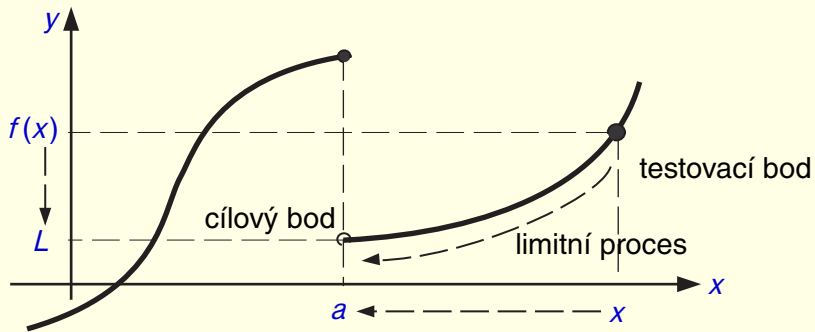
Poznámka 10 (zkrácená forma zápisu). Jiná forma zápisu jednostranné limity je $f(a+) = L$ pro limitu zprava a $f(a-) = L$ pro limitu zleva. Pro oboustranné limity se symbolika tohoto typu používá zřídka, píšeme potom $f(a\pm)$.

Poznámka 11. Vidíme, že nedefinujeme ani jednostranná okolí nevlastních bodů ani jednostranné limity v těchto bodech.

Poznámka 12. Aby existovala limita v bodě $a \in \mathbb{R}$, nemusí být funkce f v bodě a definována, protože $f(a)$ v definici limity nikde nevystupuje. Například limita funkce $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ existuje, i když tato funkce není definována v bodě 0 . Naopak, nedefinujeme například $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1 - 3x^2}$, nebo $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x)$.

Věta 4 (jednoznačnost limity). Funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu (limitu zprava, limitu zleva).

Věta 5 (souvislost limity s jednostrannými limitami). Funkce má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu právě tehdy, má-li v tomto bodě obě jednostranné limity a tyto limity jsou shodné.





Skokům, hrotům a dírákům se každý
rozumný člověk raději vyhne. Ve
skalách i v matematice.

Definice (spojitost v bodě). Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *spojitá* v bodě a , jestliže a je v definičním oboru funkce f a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *spojitá zprava* (*spojitá zleva*) v bodě a , jestliže a je v definičním oboru funkce f a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ($\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$).

Definice (spojitost na intervalu). Řekneme, že funkce je *spojitá na otevřeném intervalu* (a, b) , je-li spojitá v každém jeho vnitřním bodě. Řekneme, že funkce je *spojitá na uzavřeném intervalu* $[a, b]$, je-li spojitá v každém jeho vnitřním bodě, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Označení. Množinu všech funkcí spojitých¹ na intervalu I označujeme $C(I)$. Je-li $I = (a, b)$ nebo $I = [a, b]$, píšeme $C((a, b))$, nebo $C([a, b])$. Následující definice se týká naprosté většiny funkcí, se kterými budeme pracovat.

¹anglicky *continuous*

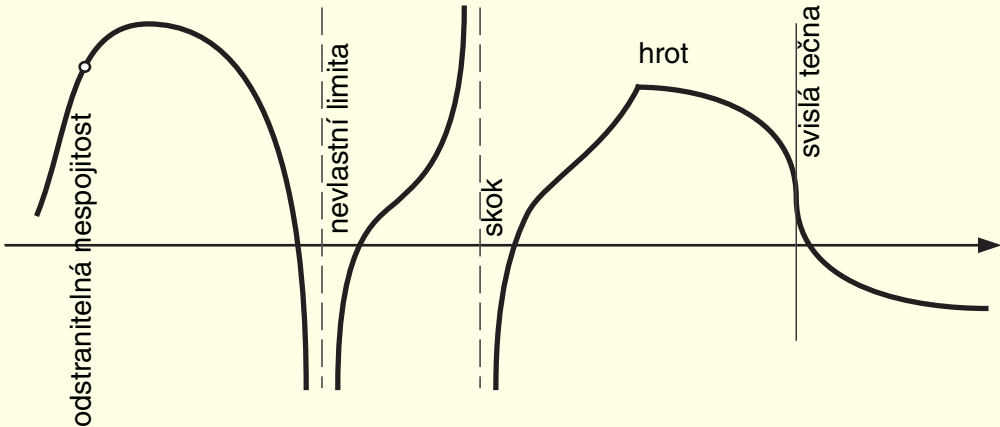
Definice (základní elementární funkce). Všechny mnohočleny, goniometrické, cyklometrické, exponenciální a logaritmické funkce a obecná mocnina se nazývají *základní elementární funkce*.

Definice (elementární funkce). Všechny funkce, které ze základních elementárních funkcí získáme konečným počtem operací sčítání, odečítání, násobení, dělení a skládání těchto funkcí navzájem se nazývají *elementární funkce*.

Věta 6 (spojitost elementárních funkcí). Elementární funkce jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Příklad 4 (výpočet limity dosazením). Funkce $y = \frac{e^x \ln(x)}{x^2 - 1}$ je spojitá na intervalech $(0, 1)$ a $(1, \infty)$. Proto např.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x \ln(x)}{x^2 - 1} = \frac{e^2 \ln 2}{3}.$$



Následující obecné věty o spojitych funkcích zpřesňují názorný fakt, že spojitým obrazem uzavřeného intervalu je opět uzavřený interval.

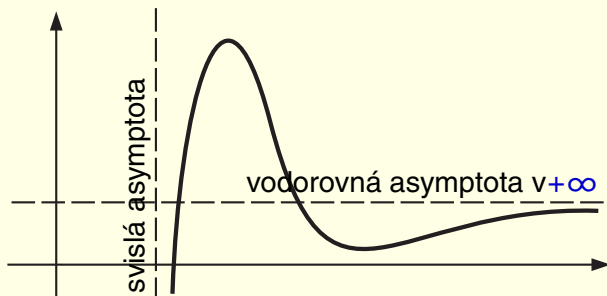
Obecné věty o spojitosti.

Věta 7 (Weierstrassova věta). Necht' funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Potom je na tomto intervalu ohraničená a nabývá zde své největší a nejmenší hodnoty, tj. existují čísla $x_1, x_2 \in [a, b]$ s vlastností $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ pro všechna $x \in [a, b]$.

Věta 8 (první Bolzanova věta). Necht' funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a platí $f(a) \cdot f(b) < 0$ (tj. $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znaménka). Pak funkce $f(x)$ má na intervalu (a, b) nulový bod, tj. existuje číslo $c \in (a, b)$ s vlastností $f(c) = 0$.

Věta 9 (druhá Bolzanova věta). Necht' funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Potom nabývá všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou.

Čtenář má ze střední školy pravděpodobně intuitivní představu o asymptotách ke grafu funkce.



Následující definice včleňují asymptoty do konceptu limit.

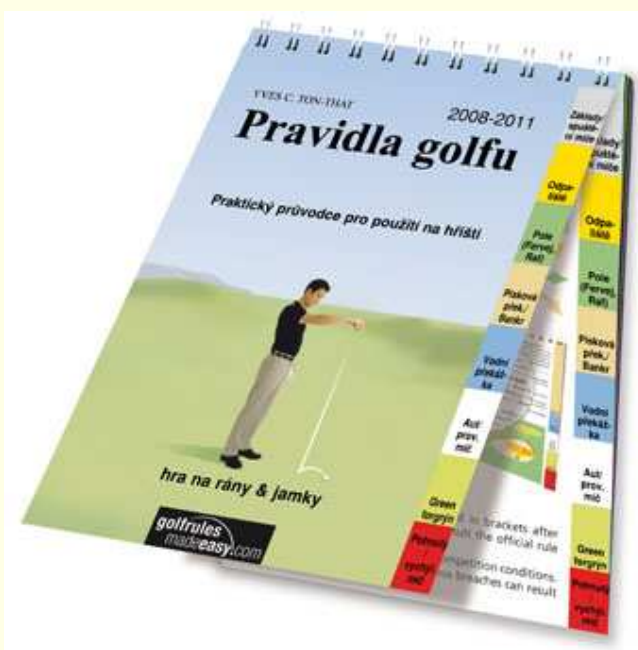
Definice (asymptota bez směrnice, svislá asymptota). Bud' f funkce a $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní bod. Řekneme, že přímka $x = x_0$ je *asymptotou bez směrnice* (též *svislá nebo vertikální asymptota*) ke grafu funkce f , jestliže alespoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě x_0 existuje a je nevlastní.

Definice (vodorovná asymptota). Bud' $q \in \mathbb{R}$. Přímka $y = q$ je *vodorovnou (horizontální) asymptotou* ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $+\infty$ právě tehdy, když platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = q.$$

Podobně definujeme horizontální asymptotu v bodě $-\infty$.

Poznámka 13 (souvislost mezi limitou a vodorovnou asymptotou). Předchozí věta a definice říkají, že vodorovná (horizontální) asymptota v nevlastním bodě je totéž, co limita v tomto bodě.



Každá hra má svoje pravidla. Nejinak je to s výpočtem limit.

Příklad 5. 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \cos x = -\infty \cdot 1 = -\infty$

Věta 10 (pravidla pro počítání s limitami). Buď $a \in \mathbb{R}^*$, $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right|, \quad (5)$$

kde limita vlevo existuje, jestliže existují limity vpravo (vlastní nebo nevlastní) a výraz vpravo je definován. Totéž platí i pro jednotlivé jednostranné limity.

Příklad 6 (limita lomené funkce ve vlastním bodě nepatřícím do definičního oboru).

$$1. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x}{x^2-4} = \frac{-1}{+0} = -\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-x}{x^2-4} = \frac{-1}{-0} = \infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x}{x^2-4} \text{ neexistuje}$$

Věta 11 (limita typu „ $\frac{L}{0}$ “). Necht' $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$. Necht' existuje ryzí okolí bodu a , ve kterém je funkce $g(x)$ nemění znaménko. Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{pokud } g(x) \text{ a } L \text{ mají stejné znaménko,} \\ -\infty & \text{pokud } g(x) \text{ a } L \text{ mají různá znaménka.} \end{cases}$$

Totéž platí i pro jednostranná okolí a příslušné jednostranné limity.

Příklad 7 (limita složené funkce).

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \cos(e^{-x}) = \cos 0 = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \text{"ln } \infty\text{"} = \infty$$

Věta 12 (limita složené funkce se spojitou vnější složkou). Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ a $g(x)$ je funkce spojitá v bodě b , platí $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b)$, tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right).$$

Totéž platí i pro jednotlivé jednostranné limity.

Věta 13 (limita složené funkce). Necht' $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = L$ a existuje ryzí okolí $\overline{O}(a)$ takové, že pro $x \in \overline{O}(a)$ je $f(x) \neq b$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = L$.

Věta 14 (limita polynomu a racionální funkce v nevlastních bodech). Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n$$
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$$

Příklad 8 (limita polynomu a lomené funkce v nevlastních bodech).

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (6x^3 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} 6x^3 = 6 \cdot (\infty)^3 = \infty$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 - 2x^2 + 2) = 3 \cdot (-\infty)^5 = -\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2}{2x^3 - 4x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 2}{2x^3 - 4x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} x^2 = \infty$

3 Derivace funkce

Definice (derivace funkce v bodě). Necht' $x \in D(f)$. Řekneme, že funkce f má *v bodě x derivaci* rovnou číslu označenému $f'(x)$, jestliže existuje konečná limita

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (6)$$

Definice (derivace funkce). Necht' má funkce f derivaci v každém bodě otevřeného intervalu I . Předpisem, který každému bodu x z intervalu I přiřadí derivaci funkce f v bodě x je definována funkce, kterou nazýváme *derivací funkce f na intervalu I* a označujeme f' .

Definice (vyšší derivace). Bud' $f(x)$ funkce a $f'(x)$ její derivace. Existuje-li derivace $(f'(x))'$ funkce $f'(x)$, nazýváme ji *druhou derivací* funkce $f(x)$ a označujeme $f''(x)$. n -násobným opakováním tohoto postupu dospíváme k n -té derivaci funkce $f(x)$, kterou označujeme $f^{(n)}(x)$.

Poznámka 14 (rovnice tečny). Má-li funkce f v bodě a derivaci, je rovnice tečny ke grafu funkce v tomto bodě

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



V derivaci dostáváte dva nástroje za cenu pouze jedné definice. Derivace udává směr a měří rychlost.

Poznámka 15 (praktický význam derivace). Nechť veličina x označuje čas, měřený ve vhodných jednotkách, a nechť veličina y se mění v průběhu času, tj. $y = y(x)$. Derivace $y'(x)$ poté značí okamžitou rychlost, s níž dochází ke změně velikosti veličiny y v čase x .



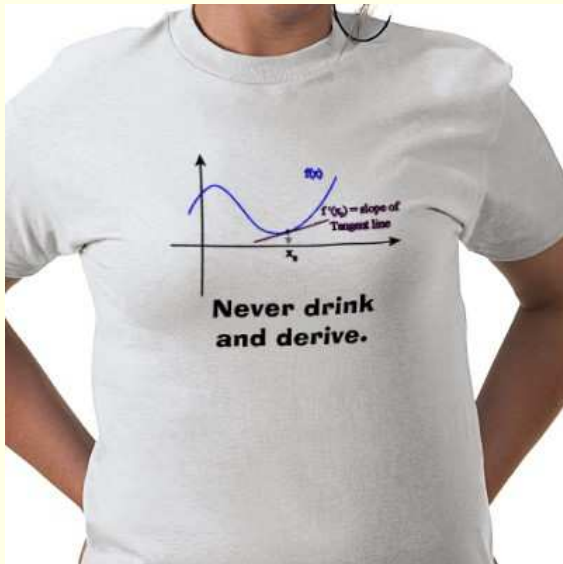
V derivaci dostáváte dva nástroje za cenu pouze jedné definice. Derivace udává směr a měří rychlost.

Věta 15 (souvislost derivace a spojitosti). Má-li funkce v bodě (na intervalu I) derivaci, je v tomto bodě (na tomto intervalu) spojitá.

Poznámka 16. Opačná věta neplatí, ze spojitosti funkce obecně neplyne existence derivace. Příkladem budiž funkce $y = |x|$ v bodě $x = 0$.

Označení. Množinu všech funkcí, které mají na intervalu I spojitou derivaci označujeme $C^1(I)$. Tyto funkce zpravidla nazýváme *hladké funkce*. Množinu všech funkcí, které mají na intervalu I spojitě všechny derivace až do řádu k , včetně, označujeme $C^k(I)$.

Poznámka 17 (k označení). Je-li funkce f ve tvaru $y = f(x)$, píšeme místo $f'(x)$ také $y'(x)$, nebo stručněji y' . V přírodních a technických vědách se často setkáváme ještě s následujícím ekvivalentním značením derivace $y' = \frac{dy}{dx}$.



Výpočet derivace je čistě mechanická záležitost, podobně jako řízení auta. Naučí se to nakonec sice (skoro) každý, ale i tak je při tom potřeba dávat pozor.

Věta 16 (pravidla pro počítání s derivacemi). Necht' f, g jsou funkce a $c \in \mathbb{R}$ konstanta. Platí

$$[cf(x)]' = cf'(x) \quad (7)$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x) \quad (8)$$

$$[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \quad (9)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, \quad (10)$$

přičemž derivace vlevo existují, existují-li derivace vpravo, a je-li výraz vpravo definován (tj. není nula ve jmenovateli zlomku).

Poznámka 18 (technická). Někdy je lepší upravit funkci na součet.

$$1. [(x + 1)(x - 2)]' = (x^2 - x - 2)' = 2x - 1$$

$$2. \left(\frac{x^3 - x + 1}{4x}\right)' = \frac{1}{4}(x^2 - 1 + x^{-1})' = \frac{1}{4}(2x - x^{-2}).$$

Věta 17 (derivace složené funkce, řetězové pravidlo). Platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x), \quad (11)$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Příklad 9 (derivace složené funkce). 1. $(\ln(\sin x))' = \frac{1}{\sin x} \cos x$

2. $(\ln(x \sin x))' = \frac{1}{x \sin x} (\sin x + x \cos x)$

Následující věta nám umožní ve většině případů výpočet limit typu „ $\frac{0}{0}$ “ a „ $\frac{\infty}{\infty}$ “.

Věta 18 (l'Hospitalovo pravidlo). Necht' $a \in \mathbb{R}^*$ a necht' funkce f a g jsou definovány v nějakém ryzím okolí bodu a a mají zde derivaci. Necht' dále platí buď $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, nebo $|\lim_{x \rightarrow a} g(x)| = \infty$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (12)$$

pokud limita na pravé straně rovnosti (12) existuje. Totéž platí i pro obě jednostranné limity.

