Matematika

Robert Mařík
Ústav matematiky, LDF, MZLU
5. patro, budova B
marik@mendelu.cz
user.mendelu.cz/marik

- P. Rádl, B. Černá, L. Stará: Základy vyšší matematiky, skriptum MZLU
- Text přednášky na user.mendelu.cz/marik, záložka „Výuka/Teaching - Matematika“
- Důležitá sdělení:
  - is.mendelu.cz – přihlásit se heslem, jít na Dokumentový server, LDF–Předměty–Název předmětu
- Příklady: skripta, user.mendelu.cz/marik záložka „Výuka/Teaching - Příklady“

Obsah

1 Funkce, vlastnosti funkcí

V této kapitole se budeme zabývat funkcemi. Pomocí funkcí v praxi popisujeme vztahy mezi veličinami. Nejprve se zaměříme na nejjednodušší vlastnosti funkcí.

Definice (funkce)**.** Buďte A a B neprázdné podmnožiny množiny reálných čísel.

Pravidlo f, které každému prvku množiny A přiřadí jediný prvek množiny B se nazývá *funkce* (přesněji: *reálná funkce jedné reálné proměnné*). Zapisujeme $f : A \to B$. Skutečnost, že prvku $a \in A$ je přiřazen prvek $b \in B$ zapisujeme takto: $f(a) = b$. Přitom říkáme, že b je *obrazem prvku* a při zobrazení f, resp. že a je *vzorem prvku* b při zobrazení f.

Je-li množinou B množina reálných čísel (tj. $B \subset \mathbb{R}$), potom zobrazení f nazýváme *reálnou funkcí*. Je-li navíc množina A podmnožinou množiny $\mathbb{R}$, tj. $A \subset \mathbb{R}$, nazýváme zobrazení f *reálnou funkcí jedné reálné proměnné*, zkráceně též *funkcí*.

Definice (pojmy spojené s funkcemi)**.** Množina A z definice funkce se nazývá *definiční obor funkce* f. Označujeme $D(f)$ (resp. $Dom(f)$). Množina všech $b \in B$, pro které existuje $a \in A$ s vlastností $f(a) = b$ se nazývá *obor hodnot funkce* f. Označujeme $H(f)$ (resp. $Im(f)$).

Je-li $y = f(x)$ nazýváme proměnnou x též *nezávislou proměnnou* a proměnnou y *závislou proměnnou*. *Grafem* funkce rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ s vlastností $y = f(x)$.

Poznámka 1. Funkce je tedy pravidlo, které jednomu reálnému číslu přiřadí jediné, přesně definované jiné reálné číslo.

- „y = vzorec s proměnnou x“, *explicitní tvar funkce*, např. $y = x^2 + \ln x$.
- „vzorec s proměnnými $x, y = 0$“, *implicitní tvar funkce*, např. $x - y - \ln y = 0$.
- Zjednodušeně řečeno se tedy jedná o pravidlo, které je buď „efektivní“ (explicitní tvar) nebo „málo efektivní“ (implicitní tvar) pro výpočet funkčních hodnot.

Definice (periodičnost funkce). Řekneme, že funkce f je *periodická*, existuje-li kladné číslo p s vlastnostmi: je-li $x \in D(f)$, je i $x + p \in D(f)$ a $f(x) = f(x + p)$. Nejmenší číslo p s touto vlastností nazýváme *(nejmenší) periodou*.

V následující definici se budeme zajímat o to, jestli existuje nějaký vztah mezi funkční hodnotou v bodě x z definičního oboru a v bodě opačném.

Definice (parita funkce). Nechť funkce f splňuje následující podmínku: $x \in D(x) \Rightarrow (-x) \in D(f)$.

1. Řekneme, že funkce f je *sudá* pokud platí $f(-x) = f(x)$.
2. Řekneme, že funkce f je *lichá* pokud platí $f(-x) = -f(x)$.
3. Řekneme, že funkce f má *paritu*, je-li sudá nebo lichá.

Poznámka 2 (graf funkce mající paritu).

- Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy y.
- Graf liché funkce je středově souměrný podle bodu $[0, 0]$.

Věta 1. Paritu polynomů a racionálních funkcí lze určit následovně:

1. Polynom je sudá (lichá) funkce právě tehdy, když obsahuje právě členy se sudým (s lichým) exponentem.
2. Racionální funkce je lichá právě tehdy, když je podílem sudého a lichého polynomu (v libovolném pořadí).
3. Racionální funkce je sudá právě tehdy, když je podílem dvou sudých nebo dvou lichých polynomů.

Příklad 1 (parita)**.** Následující funkce jsou sudé: $f(x) = x^4 - 6$, $g(x) = \dfrac{x^3 + x}{2x^5 - 3x}$, $h(x) = \dfrac{x^4 - 6}{x^2 + 1}$.

Následující funkce jsou liché: $f(x) = x^3 - 6x^7$, $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{2x^4 - 3}$, $h(x) = \dfrac{x^6 - 3}{x^3 - x}$.

Následující funkce nejsou ani sudé ani liché: $f(x) = x^4 + x^2 - x$, $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{2x^4 - 3x}$, $y = e^x$.

Definice (ohraničenost)**.** Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f.

1. Řekneme, že funkce f je na množině M *zdola ohraničená*, existuje-li reálné číslo a s vlastností $a \leq f(x)$ pro všechna $x \in M$.
2. Řekneme, že funkce f je na množině M *shora ohraničená*, existuje-li reálné číslo b s vlastností $f(x) \leq b$ pro všechna $x \in M$.
3. Řekneme, že funkce f je na množině M *ohraničená*, je-li na M ohraničená zdola i shora.

Nespecifikujeme-li množinu M, máme na mysli, že uvedená vlastnost platí na celém definičním oboru funkce f.

Poznámka 3 (grafický důsledek)**.** Funkce je shora ohraničená, jestliže existuje vodorovná přímka, která leží celá nad grafem funkce. Podobně poznáváme na grafu ohraničenost zdola.

Motivace. Pro libovolnou dobře definovanou funkci f platí implikace

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Nyní se budeme zajímat o to, za jakých podmínek lze tuto implikaci obrátit. Obrácení implikace by totiž mohlo být užitečné při řešení některých nelineárních rovnic.

Definice (prostost)**.** Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f.

Řekneme, že funkce f je *prostá*, jestliže každý obraz má jen jediný vzor, tj. pro každé $y \in f(M)$ existuje jediné $x \in M$ s vlastností $f(x) = y$.

Nespecifikujeme-li množinu M, máme na mysli, že uvedená vlastnost platí na celém definičním oboru funkce f.

Poznámka 4 (grafický důsledek)**.** Funkce je prostá, jestliže každá vodorovná přímka protíná graf nejvýše jednou.

Funkce $y = f(x)$	Funkce inverzní $y = f^{-1}(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y = x^2,\ x \geq 0$
$y = x^2,\ x \geq 0$	$y = \sqrt{x}$
$y = e^x$	$y = \ln x$
$y = \ln x$	$y = e^x$
$y = a^x$	$y = \log_a x$
$y = \sin x,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$	$y = \arcsin x$
$y = \cos x,\ x \in [0, \pi]$	$y = \arccos x$
$y = \mathrm{tg}\, x,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$	$y = \mathrm{arctg}\, x$

Tabulka 1: Inverzní funkce k základním elementárním funkcím.

Definice (inverzní funkce)**.** Nechť funkce $f : A \to B$ je prostá. Pravidlo, které každému x z množiny $f(A)$ přiřadí to (jediné) y, pro které platí $f(y) = x$ se nazývá *inverzní funkce* k funkci f, označujeme f^{-1}.

Poznámka 5 (zápis čísla jako výsledku předem zadané operace)**.** Je zřejmé, že $f(f^{-1}(x)) = x$ a $f^{-1}(f(x)) = x$ pro všechna, pro která má tento zápis smysl.

Toto nám umožňuje zapsat dané číslo jako výsledek nějaké operace. Např. číslo 1 lze zapsat libovolnou z následujících možností

$$1 = \ln e^1 = \log_5 5^1 = 6^{\log_6 1} = \sin(\arcsin 1) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1) = (\sqrt{1})^2$$

Poznámka 6 (nelineární rovnice)**.** Má-li funkce f inverzní funkci f^{-1} a je-li tato inverzní funkce definována v bodě x, potom má nelineární rovnice s neznámou y

$$f(y) = x$$

právě jedno řešení dané vzorcem

$$y = f^{-1}(x).$$

Příklad 2 (nelineární rovnice). Řešme rovnici

$$e^{\frac{2}{x-1}} = 2.$$

Protože k exponenciální funkci je inverzní logaritmická funkce, plyne odsud

$$\frac{2}{x-1} = \ln 2,$$

odkud již snadno vyjádříme

$$x = \frac{2}{\ln 2} + 1.$$

Definice (monotonie funkce). Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f.

1. Řekneme, že funkce f je na množině M *rostoucí* jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ s vlastností $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.
2. Řekneme, že funkce f je na množině M *klesající* jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ s vlastností $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.
3. Řekneme, že funkce f je na množině M *(ryze) monotonní* je-li buď rostoucí, nebo klesající na M.

Nespecifikujeme-li množinu M, máme na mysli, že uvedená vlastnost platí na celém definičním oboru funkce f.

Příklad 3 (nelineární nerovnice)**.** Nerovnici

$$\ln(x^2 - 4x - 4) > 0$$

lze řešit například tak, že ji přepíšeme do tvaru s logaritmy na obou stranách nerovnice

$$\ln(x^2 - 4x - 4) > \ln 1$$

a odlogaritmujeme:

$$x^2 - 4x - 4 > 1.$$

Odsud poté dostáváme postupně:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 5 &> 0 \\ (x-5)(x+1) &> 0 \\ & x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty), \end{aligned}$$

přičemž kvadratickou nerovnici vyřešíme například graficky.

Věta 2. Je-li funkce f na množině M ryze monotonní, je na této množině i prostá.

Věta 3. Je-li funkce $f(x)$ rostoucí (klesající, lichá), má tutéž vlastnost i funkce inverzní $f^{-1}(x)$.

Poznámka 7. Sudá funkce není prostá, nemá proto inverzní funkci.

Poznámka 8.

$$a = b \overset{f \text{ je prostá}}{\Longleftrightarrow} f(a) = f(b)$$

$$a < b \overset{f \text{ je rostoucí}}{\Longleftrightarrow} f(a) < f(b) \qquad a \leq b \overset{f \text{ je rostoucí}}{\Longleftrightarrow} f(a) \leq f(b)$$

$$a < b \overset{f \text{ je klesající}}{\Longleftrightarrow} f(a) > f(b) \qquad a \leq b \overset{f \text{ je klesající}}{\Longleftrightarrow} f(a) \geq f(b)$$

Je-li funkce f prostá, pak pro každé $y \in H(f)$ má rovnice

$$f(x) = y$$

s neznámou x právě jedno řešení a toto řešení je možno vyjádřit vztahem

$$x = f^{-1}(y).$$

2 Limita, spojitost

Rovnoběžky se sbíhají v nekonečnu. Ale co to vlastně to nekonečno je? Jak se s ním pracuje? Jde s ním počítat?

Definice (rozšířená množina reálných čísel). *Rozšířenou množinou reálných čísel* $\mathbb{R}^*$ rozumíme množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšířenou o body $\pm\infty$ následovně: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, přičemž pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

$$a + \infty = \infty, \qquad a - \infty = -\infty, \qquad \infty + \infty = \infty, \qquad -\infty - \infty = -\infty$$

$$\infty.\infty = -\infty.(-\infty) = \infty, \qquad \infty.(-\infty) = -\infty, \qquad \frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$$

$$-\infty < a < \infty, \qquad |\pm\infty| = \infty,$$

je-li $a > 0$ definujeme $a.\infty = \infty$ a $a.(-\infty) = -\infty$,
je-li $a < 0$ definujeme $a.\infty = -\infty$ a $a.(-\infty) = \infty$. Další operace definujeme pomocí komutativnosti operací „$+$“ a „$.$“. Body $\pm\infty$ nazýváme *nevlastní body*, body množiny $\mathbb{R}$ nazýváme *vlastní body*.

Poznámka 9. Nejsou tedy definovány operace „$\infty - \infty$“, „$\pm\infty.0$“ a „$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$“. Poznamenejme, že samozřejmě není definováno dělení nulou.

Definice (okolí). *Okolím* bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme libovolný otevřený interval, který ve svém vnitřku obsahuje bod a, značíme $O(a)$. *Ryzím* (též *prstencovým*) *okolím* bodu a rozumíme množinu $O(a) \setminus \{a\}$, značíme $\overline{O}(a)$. *Okolím bodu* ∞ rozumíme libovolný interval tvaru (A, ∞), kde A je reálné číslo a *okolím bodu* $-\infty$ interval $(-\infty, A)$. Ryzím okolím nevlastních bodů rozumíme totéž, co okolím těchto bodů.

Definice (limita funkce). Nechť $a, L \in \mathbb{R}^*$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nechť je funkce f definovaná v nějakém ryzím okolí bodu a.

Řekneme, že funkce f má v bodě a *limitu* rovnu číslu L, jestliže ke každému okolí $O(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\overline{O}(a)$ bodu a takové, že pro libovolné $x \in \overline{O}(a)$ je $f(x) \in O(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \tag{1}$$

nebo $f(x) \to L$ pro $x \to a$.

Definice (vlastní a nevlastní limita). Je-li v předchozí definici $L \in \mathbb{R}$, nazývá se limita *vlastní*, je-li $L \in \{\infty, -\infty\}$, nazývá se limita *nevlastní*.

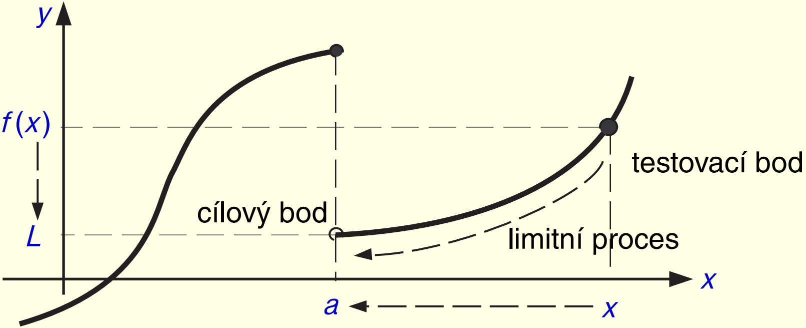
Poznámka 10 (zkrácená forma zápisu). Jiná forma zápisu jednostranné limity je $f(a+) = L$ pro limitu zprava a $f(a-) = L$ pro limitu zleva. Pro oboustranné limity se symbolika tohoto typu používá zřídka, píšeme potom $f(a\pm)$.

Poznámka 11. Vidíme, že nedefinujeme ani jednostranná okolí nevlastních bodů ani jednostranné limity v těchto bodech.

Poznámka 12. Aby existovala limita v bodě $a \in \mathbb{R}$, nemusí být funkce f v bodě a definována, protože $f(a)$ v definici limity nikde nevystupuje. Například limita funkce $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ existuje, i když tato funkce není definována v bodě 0. Naopak, nedefinujeme například $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{1-3x^2}$, nebo $\lim\limits_{x\to 0^-} \ln(x)$.

Věta 4 (jednoznačnost limity). Funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu (limitu zprava, limitu zleva).

Věta 5 (souvislost limity s jednostrannými limitami). Funkce má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu právě tehdy, má-li v tomto bodě obě jednostranné limity a tyto limity jsou shodné.


y
f(x)
L
cílový bod
testovací bod
limitní proces
x
a
x

Skokům, hrotům a dírám se každý rozumný člověk raději vyhne. Ve skalách i v matematice.

Definice (spojitost v bodě). Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *spojitá* v bodě a, jestliže a je v definičním oboru funkce f a $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *spojitá zprava* (*spojitá zleva*) v bodě a, jestliže a je v definičním oboru funkce f a $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ ($\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$).

Definice (spojitost na intervalu). Řekneme, že funkce je *spojitá na otevřeném intervalu* (a, b), je-li spojitá v každém jeho vnitřním bodě. Řekneme, že funkce je *spojitá na uzavřeném intervalu* $[a, b]$, je-li spojitá v každém jeho vnitřním bodě, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Označení. Množinu všech funkcí spojitých[1] na intervalu I označujeme $C(I)$. Je-li $I = (a, b)$ nebo $I = [a, b]$, píšeme $C((a, b))$, nebo $C([a, b])$.
Následující definice se týká naprosté většiny funkcí, se kterými budeme pracovat.

[1] anglicky *continuous*

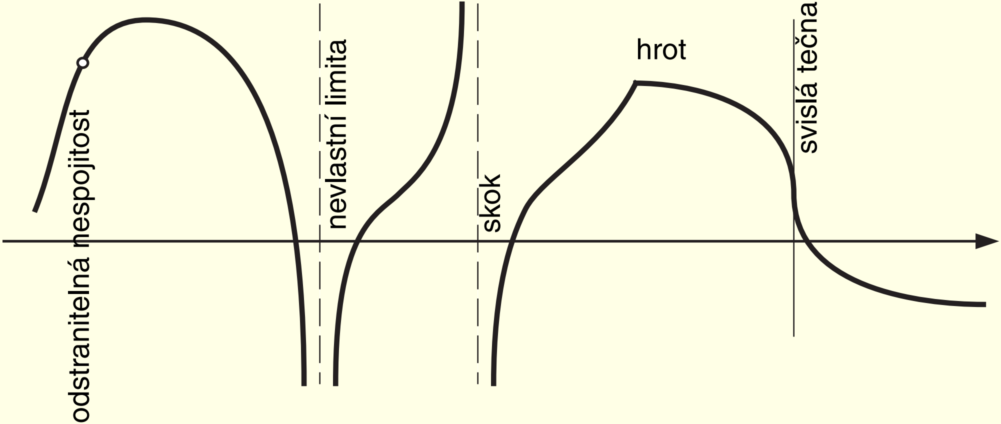
Definice (základní elementární funkce). Všechny mnohočleny, goniometrické, cyklometrické, exponenciální a logaritmické funkce a obecná mocnina se nazývají *základní elementární funkce*.

Definice (elementární funkce). Všechny funkce, které ze základních elementárních funkcí získáme konečným počtem operací sčítání, odečítání, násobení, dělení a skládání těchto funkcí navzájem se nazývají *elementární funkce*.

Věta 6 (spojitost elementárních funkcí). Elementární funkce jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Příklad 4 (výpočet limity dosazením). Funkce $y = \dfrac{e^x \ln(x)}{x^2 - 1}$ je spojitá na intervalech $(0, 1)$ a $(1, \infty)$. Proto např.

$$\lim_{x \to 2} \frac{e^x \ln(x)}{x^2 - 1} = \frac{e^2 \ln 2}{3}.$$



Následující obecné věty o spojitých funkcích zpřesňují názorný fakt, že spojitým obrazem uzavřeného intervalu je opět uzavřený interval.

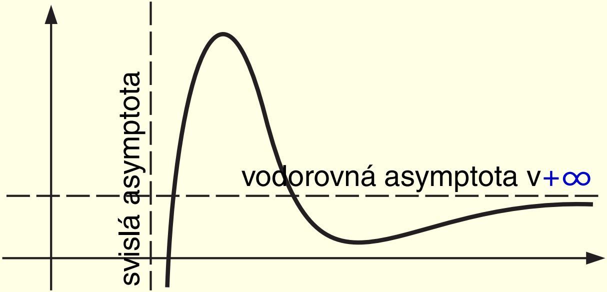
Obecné věty o spojitosti.

Věta 7 (Weierstrassova věta)**.** Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Potom je na tomto intervalu ohraničená a nabývá zde své největší a nejmenší hodnoty, tj. existují čísla $x_1, x_2 \in [a, b]$ s vlastností $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ pro všechna $x \in [a, b]$.

Věta 8 (první Bolzanova věta)**.** Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a platí $f(a).f(b) < 0$ (tj. $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znaménka). Pak funkce $f(x)$ má na intervalu (a, b) nulový bod, tj. existuje číslo $c \in (a, b)$ s vlastností $f(c) = 0$.

Věta 9 (druhá Bolzanova věta)**.** Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Potom nabývá všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou.

Čtenář má ze střední školy pravděpodobně intuitivní představu o asymptotách ke grafu funkce.



Následující definice včleňují asymptoty do konceptu limit.

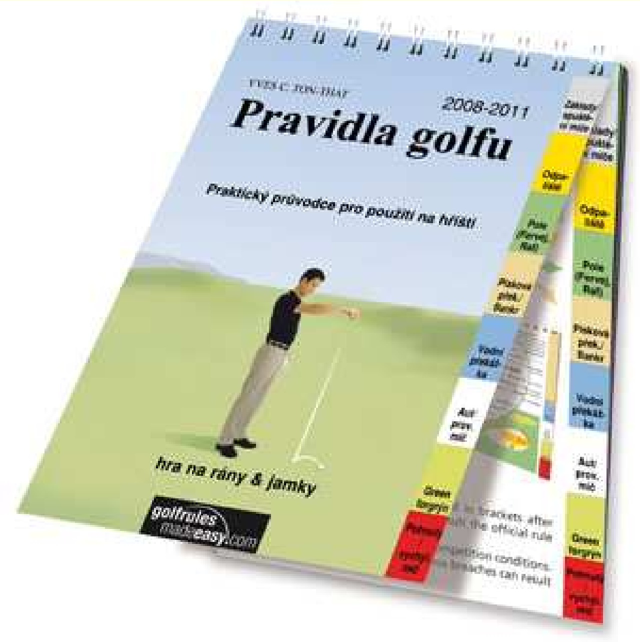
Definice (asymptota bez směrnice, svislá asymptota)**.** Buď f funkce a $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní bod. Řekneme, že přímka $x = x_0$ je *asymptotou bez směrnice* (též *svislá nebo vertikální asymptota*) ke grafu funkce f, jestliže alespoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě x_0 existuje a je nevlastní.

Definice (vodorovná asymptota)**.** Buď $q \in \mathbb{R}$. Přímka $y = q$ je *vodorovnou* (*horizontální*) *asymptotou* ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $+\infty$ právě tehdy, když platí

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = q.$$

Podobně definujeme horizontální asymptotu v bodě $-\infty$.

Poznámka 13 (souvislost mezi limitou a vodorovnou asymptotou)**.** Předchozí věta a definice říkají, že vodorovná (horizontální) asymptota v nevlastním bodě je totéž, co limita v tomto bodě.



Každá hra má svoje pravidla. Nejinak je to s výpočtem limit.

Příklad 5. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{arctg} x+\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\cos x=-\infty.1=-\infty$

Věta 10 (pravidla pro počítání s limitami)**.** Buď $a\in\mathbb{R}^*$, $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Platí

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x) \tag{2}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x) \tag{3}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)} \tag{4}$$

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=|\lim_{x\to a}f(x)|, \tag{5}$$

kde limita vlevo existuje, jestliže existují limity vpravo (vlastní nebo nevlastní) a výraz vpravo je definován. Totéž platí i pro jednotlivé jednostranné limity.

Příklad 6 (limita lomené funkce ve vlastním bodě nepatřícím do definičního oboru)**.**

1. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1-x}{x^2-4} = „\dfrac{-1}{+0}" = -\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1-x}{x^2-4} = „\dfrac{-1}{-0}" = \infty$

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-x}{x^2-4}$ neexistuje

Věta 11 (limita typu „$\frac{L}{0}$“)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$. Nechť existuje ryzí okolí bodu a, ve kterém je funkce $g(x)$ nemění znaménko. Potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{pokud } g(x) \text{ a } L \text{ mají stejné znaménko,} \\ -\infty & \text{pokud } g(x) \text{ a } L \text{ mají různá znaménka.} \end{cases}$$

Totéž platí i pro jednostranná okolí a příslušné jednostranné limity.

Příklad 7 (limita složené funkce).

1. $\lim_{x\to\infty} \cos(e^{-x}) = \cos 0 = 1$

2. $\lim_{x\to 0^+} \ln(\frac{1}{x}) = \text{"}\ln\infty\text{"} = \infty$

Věta 12 (limita složené funkce se spojitou vnější složkou). Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$ a $g(x)$ je funkce spojitá v bodě b, platí $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$, tj.

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)).$$

Totéž platí i pro jednotlivé jednostranné limity.

Věta 13 (limita složené funkce). Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{y\to b} g(y) = L$ a existuje ryzí okolí $\overline{O}(a)$ takové, že pro $x \in \overline{O}(a)$ je $f(x) \neq b$. Potom $\lim_{x\to a} g(f(x)) = L$.

Věta 14 (limita polynomu a racionální funkce v nevlastních bodech)**.** Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$$

Příklad 8 (limita polynomu a lomené funkce v nevlastních bodech)**.**

1. $\lim_{x\to\infty}(6x^3 - 2x + 1) = \lim_{x\to\infty} 6x^3 = 6.(\infty)^3 = \infty$
2. $\lim_{x\to-\infty}(3x^5 - 2x^2 + 2) = 3.(-\infty)^5 = -\infty$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - 2}{2x^3 - 4x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
4. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5 - 2}{2x^3 - 4x^2 + 1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x^2 = \infty$

3 Derivace funkce

Definice (derivace funkce v bodě)**.** Nechť $x \in D(f)$. Řekneme, že funkce f má *v bodě x derivaci* rovnu číslu označenému $f'(x)$, jestliže existuje konečná limita

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{6}$$

Definice (derivace funkce)**.** Nechť má funkce f derivaci v každém bodě otevřeného intervalu I. Předpisem, který každému bodu x z intervalu I přiřadí derivaci funkce f v bodě x je definována funkce, kterou nazýváme *derivací funkce f* na intervalu I a označujeme f'.

Definice (vyšší derivace)**.** Buď $f(x)$ funkce a $f'(x)$ její derivace. Existuje-li derivace $(f'(x))'$ funkce $f'(x)$, nazýváme ji *druhou derivací* funkce $f(x)$ a označujeme $\boldsymbol{f''(x)}$. n-násobným opakováním tohoto postupu dospíváme k n-té derivaci funkce $f(x)$, kterou označujeme $f^{(n)}(x)$.

Poznámka 14 (rovnice tečny)**.** Má-li funkce f v bodě a derivaci, je rovnice tečny ke grafu funkce v tomto bodě

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

V derivaci dostáváte dva nástroje za cenu pouze jedné definice. Derivace udává směr a měří rychlost.

Poznámka 15 (praktický význam derivace). Nechť veličina x označuje čas, měřený ve vhodných jednotkách, a nechť veličina y se mění v průběhu času, tj. $y = y(x)$. Derivace $y'(x)$ poté značí okamžitou rychlost, s níž dochází ke změně velikosti veličiny y v čase x.

V derivaci dostáváte dva nástroje za cenu pouze jedné definice. Derivace udává směr a měří rychlost.

Věta 15 (souvislost derivace a spojitosti). Má-li funkce v bodě (na intervalu I) derivaci, je v tomto bodě (na tomto intervalu) spojitá.

Poznámka 16. Opačná věta neplatí, ze spojitosti funkce obecně neplyne existence derivace. Příkladem budiž funkce $y = |x|$ v bodě $x = 0$.

Označení. Množinu všech funkcí, které mají na intervalu I spojitou derivaci označujeme $C^1(I)$. Tyto funkce zpravidla nazýváme *hladké funkce*. Množinu všech funkcí, které mají na intervalu I spojité všechny derivace až do řádu k, včetně, označujeme $C^k(I)$.

Poznámka 17 (k označení). Je-li funkce f ve tvaru $y = f(x)$, píšeme místo $f'(x)$ také $y'(x)$, nebo stručněji y'. V přírodních a technických vědách se často setkáváme ještě s následujícím ekvivalentním značením derivace $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Výpočet derivace je čistě mechanická záležitost, podobně jako řízení auta. Naučí se to nakonec sice (skoro) každý, ale i tak je při tom potřeba dávat pozor.

Věta 16 (pravidla pro počítání s derivacemi). Nechť f, g jsou funkce a $c \in \mathbb{R}$ konstanta. Platí

$$[cf(x)]' = cf'(x) \tag{7}$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x) \tag{8}$$

$$[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \tag{9}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, \tag{10}$$

přičemž derivace vlevo existují, existují-li derivace vpravo, a je-li výraz vpravo definován (tj. není nula ve jmenovateli zlomku).

Poznámka 18 (technická). Některy je lepší upravit funkci na součet.

1. $[(x+1)(x-2)]' = (x^2 - x - 2)' = 2x - 1$
2. $\left(\dfrac{x^3 - x + 1}{4x}\right)' = \dfrac{1}{4}(x^2 - 1 + x^{-1})' = \dfrac{1}{4}(2x - x^{-2})$.

Věta 17 (derivace složené funkce, řetězové pravidlo). Platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x), \tag{11}$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Příklad 9 (derivace složené funkce).

1. $(\ln(\sin x))' = \dfrac{1}{\sin x}\cos x$
2. $(\ln(x\sin x))' = \dfrac{1}{x\sin x}(\sin x + x\cos x)$

Následující věta nám umožní ve většině případů výpočet limit typu „$\frac{0}{0}$“ a „$\frac{\infty}{\infty}$“.

Věta 18 (l’Hospitalovo pravidlo). Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce f a g jsou definovány v nějakém ryzím okolí bodu a a mají zde derivaci. Nechť dále platí buď $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, nebo $|\lim_{x\to a} g(x)| = \infty$. Platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{12}$$

pokud limita na pravé straně rovnosti (12) existuje. Totéž platí i pro obě jednostranné limity.

Vypočtěte $\lim_{x\to a} f(x)$.

Dosaďte $x = a$ do $f(x)$. Je hodnota $f(a)$ definovaná?

Ano → Máte výsledek.

Ne ↓

Je $x = \pm\infty$ a je f buď polynom, nebo racionální funkce?

Ano → Použijte Větu 14. Počítejte tedy jen s vedoucími členy.

Ne ↓

Substitutce dává . . . . (vyberte si správnou cestičku).

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ → Použijte l'Hospitalovo pravidlo a s novou limitou pracujte od začátku.

$0 \cdot \infty$ → Převeďte, použitím algebraických úprav, na $\frac{0}{0}$, nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

$\frac{\text{nenulová hodnota}}{0}$ → Studujte nejdříve jednostranné limity, pomocí Věty 11. Ze vztahu jednostranných limit vyčtěte případnou existenci a hodnotu limity oboustranné.