

Algebraické rovnice

Robert Mařík

Ústav matematiky, LDF, MZLU

www.mendelu.cz/user/marik

Obsah

1	Základní pojmy a vlastnosti	2
2	Základní numerické metody pro algebraické rovnice	8
	Alg. rce s celočíselnými koeficienty	11
	Půlení intervalu	24
	Iterační metoda	50

1 Základní pojmy a vlastnosti

Definice (algebraická rovnice). Buď n přirozené číslo a

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \quad (\text{Pn})$$

polynom stupně n s reálnými koeficienty a_0, a_1, \dots, a_n , kde $a_0 \neq 0$. Koeficient a_0 se nazývá **vedoucí koeficient polynomu** $P_n(x)$ a koeficient a_n **absolutní člen polynomu** $P_n(x)$. Člen a_0x^n nazýváme **vedoucí člen polynomu** $P_n(x)$. **Algebraickou rovnicí stupně n** rozumíme rovnici tvaru $P_n(x) = 0$, tj.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (\text{Rn})$$

Poznámka 1 (nejjednodušší polynomy). **lineární polynom**, **kvadratický polynom**, **kubický polynom**.

Definice (kořen polynomu, řešení algebraické rovnice). **Řešením (kořenem)** algebraické rovnice (Rn) (**kořenem polynomu** (Pn)) rozumíme číslo c , splňující $P_n(c) = 0$, tj. splňující po dosazení za x rovnost (Rn).

Příklad 1. Čísla $x = 1$ a $x = -2$ jsou kořeny polynomu

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2. \quad (1)$$

Vskutku, přímým výpočtem lze ověřit, že $P(1) = 0$ a $P(-2) = 0$. Číslo $x = 3$ naopak není kořenem tohoto polynomu, protože $P(3) = 40 \neq 0$.

O řešitelnosti algebraických rovnic vypovídá následující věta.

Věta 1 (základní věta algebry). V oboru komplexních čísel má každý nekonstantní polynom kořen.

Věta 2 (Bezoutova věta). Číslo c je kořenem polynomu (P_n) právě tehdy, když existuje polynom $Q_{n-1}(x)$ stupně $(n - 1)$ s vlastností

$$P_n(x) = (x - c)Q_{n-1}(x). \quad (2)$$

Definice (kořenový činitel). Je-li c kořenem polynomu (P_n), pak lineární polynom $(x - c)$ s proměnnou x nazýváme *kořenový činitel příslušný ke kořeni c* .

Příklad 2. Polynom (1) může být zapsán v následujících ekvivalentních tvarech

$$y = (x - 1)(x^2 + 3x + 2), \quad y = (x + 2)(x^2 - 1), \quad y = (x - 1)(x + 1)(x + 2).$$

Definice (násobnost kořene). Necht' c je kořenem polynomu $P_n(x)$. Řekneme že tento kořen je k -**násobný**, jestliže existuje polynom $Q_{n-k}(x)$ stupně $n - k$ takový, že platí

$$P_n(x) = (x - c)^k Q_{n-k}(x) \quad \text{a} \quad Q_{n-k}(c) \neq 0 \quad (3)$$

Věta 3. Polynomy $P_n(x)$ a $Q_{n-k}(x)$ z předchozí definice mají stejné kořeny včetně násobnosti, s výjimkou kořene c .

Poznámka 2 (souvislost násobnosti kořene se změnou znaménka). V okolí kořene liché násobnosti polynom mění znaménko, v okolí kořene sudé násobnosti ne.

Věta 4 (souvislost násobnosti kořene s derivací). Číslo c je k -násobným kořenem polynomu (P_n) (rovnice (R_n)) právě tedy, když platí

$$P_n(c) = P'_n(c) = P''_n(c) = \dots = P_n^{(k-1)}(c) = 0 \quad \text{a} \quad P_n^{(k)}(c) \neq 0.$$

Věta 5 (počet reálných kořenů). V oboru reálných čísel má každý polynom (každá algebraická rovnice) stupně n celkem buď n kořenů, nebo o sudý počet méně. Přitom každý kořen počítáme i s jeho násobností.

Poznámka 3. Umíme vyřešit libovolnou lineární a kvadratickou rovnici. Lze vyřešit i libovolnou algebraickou rovnici řádu 3 a 4. Není však možné sestavit algoritmus pro nalezení kořenů rovnice řádu 5 a více!

2 Základní numerické metody pro algebraické rovnice

Věta 6 (nutná podmínka pro celočíselné kořeny). Nechť všechny koeficienty polynomu (P_n) jsou celá čísla. Je-li $c \in \mathbb{Z}$ kořenem tohoto polynomu, pak je číslo a_n dělitelné číslem c , tj. $c|a_n$.

Věta 7 (Descartova věta). Počet kladných kořenů polynomu (P_n) (algebraické rovnice (R_n)) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, nebo o sudé číslo menší. Případné koeficienty, které jsou rovny nule, přitom neuvažujeme.

Příklad 3 (počet kladných kořenů). Polynom

$$P(x) = x^8 - x^5 + x^3 + x^2 - x + 1$$

má buď 4 nebo 2 nebo žádný reálný kladný kořen.

Věta 8 (ohraničenost kořenů). Budťe x_i (pro $i = 1..n$) kořeny (i komplexní) polynomu (P_n) (algebraické rovnice (R_n)). Platí

$$|x_i| < 1 + \frac{A}{|a_0|}, \quad (4)$$

kde $A = \max\{|a_i|, i = 1..n\}$.

Příklad 4 (odhad velikosti kořenů). Pro kořeny x_i polynomu

$$P(x) = 2x^6 - x^3 + 4x^2 + x - 6$$

platí $|x_i| < 1 + \frac{6}{2} = 4$. Polynom má 3 nebo 1 kladný reálný kořen. Tyto kořeny leží v intervalu $(0, 4)$.

Věta 9 (varianta Descartovy věty pro záporné kořeny). Uvažujme pomocný polynom $\tilde{P}(x) = P(-x)$. Koeficienty tohoto polynomu označme $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$. Počet záporných kořenů polynomu (Pn) (algebraické rovnice (Rn)) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n$, nebo o sudé číslo menší. Případné koeficienty, které jsou rovny nule, přitom neuvažujeme.

Příklad 5 (počet záporných kořenů). Pro polynom $P(x) = 2x^6 - x^3 + 4x^2 + x - 6$ platí $\tilde{P}(x) = P(-x) = 2x^6 + x^3 + 4x^2 - x - 6$ a polynom $P(x)$ má tedy jediný záporný reálný kořen, tj. má jeden kořen na intervalu $(-4, 0)$.

Poznámka 4 (technická). Pomocný polynom $\tilde{P}(x)$ rychle obdržíme z polynomu $P(x)$ uvědomíme-li si, že stačí změnit znaménka u koeficientů polynomu $P(x)$, které přísluší mocninám lichého stupně.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

Vypíšeme dělitele čísla 36 (i záporné).

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

1 1 -5 -9 -24 -36

Budeme počítat hodnoty pomocí Hornerova schematu. Připravíme si proto koeficienty polynomu z levé strany rovnice do tabulky.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72

Dosadíme $x = 1$. Je-li $P(x)$ polynom z pravé strany rovnice, vidíme, že $P(1) = -72$ a toto číslo $x = 1$ není kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16

Podobně ani $x = -1$ není kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$

Ani $x = 2$ není kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
-2	1	-1	-3	-3	-18	$\parallel 0$

Nyní jsme zjistili, že $x = -2$ je kořenem. Levou stranu rovnice je tedy možno přepsat do tvaru

$$(x + 2)(x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 18) = 0.$$

Dál zkoumáme jenom polynom, který stojí v tomto součinu jako druhý.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36	
1	1	2	-3	-12	-36	-72	
-1	1	0	-5	-4	-20	-16	
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$	
-2	1	-1	-3	-3	-18	$\parallel 0$	
-2	1	-3	3	-9	$\parallel 0$		

Dosadíme opět $x = -2$. Opět je toto číslo kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36	
1	1	2	-3	-12	-36	-72	
-1	1	0	-5	-4	-20	-16	
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$	
-2	1	-1	-3	-3	-18	$\parallel 0$	
-2	1	-3	3	-9	$\parallel 0$		
-2	1	-5	13	-35			

- Dosadíme opět $x = -2$. Nyní již se o kořen nejedná.
- Protože na konci polynomu, do kterého nyní dosazujeme, stojí číslo 9, zajímáme se jen o dělitele tohoto čísla.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
-2	1	-1	-3	-3	-18	$\parallel 0$
-2	1	-3	3	-9	$\parallel 0$	
-2	1	-5	13	-35		
3	1	0	3	$\parallel 0$		

- Vyškrtneme čísla která nedělí číslo 9 a dosazujeme další na řadě, $x = 3$.
- Vidíme, že $x = 3$ je kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
-2	1	-1	-3	-3	-18	$\parallel 0$
-2	1	-3	3	-9	$\parallel 0$	
-2	1	-5	13	-35		
3	1	0	3	$\parallel 0$		
-3	1	-3	12			

Dál se zabýváme jenom děliteli posledního koeficientu — čísla 3. Navíc posloupnost koeficientů polynomu nemá žádnou znaménkovou změnu a podle Descartovy věty polynom nemá kladný kořen. Zbývá tedy již jen číslo $x = -3$, které není kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ a ± 36 .

	1	1	-5	-9	-24	-36
1	1	2	-3	-12	-36	-72
-1	1	0	-5	-4	-20	-16
2	1	3	1	-7	-38	$\neq 0$
-2	1	-1	-3	-3	-18	$\parallel 0$
-2	1	-3	3	-9	$\parallel 0$	
-2	1	-5	13	-35		
3	1	0	3	$\parallel 0$		
-3	1	-3	12			

Rozklad na součin je $(x + 2)^2(x - 3)(x^2 + 3) = 0$.

- Polynom má dvojnásobný kořen $x = -2$, jednoduchý kořen $x = 3$ a nemá žádný další celočíselný kořen.
- Polynom, který zůstal, má koeficienty 1, 0, 3, jedná se tedy o polynom $x^2 + 0x + 3$.

Poznámka 5 (separace kořenů). Další úlohou spojenou s hledáním kořenů algebraické rovnice (polynomu) je separace kořenů – tj. nalezení systému intervalů, které obsahují právě jeden kořen. Separaci kořenů provádíme zpravidla takto:

- Stanovíme interval, ve kterém všechny kořeny leží, například s použitím Věty 8.
- Vypočteme funkční hodnoty ve vhodných bodech — obvykle volíme celá čísla z uvažovaného intervalu a lokální extrémy. V každém intervalu typu (m, n) , kde funkce mění znaménko (tj. $P(m)P(n) < 0$) leží jeden nebo lichý počet kořenů polynomu $P(x)$. V každém intervalu typu (m, n) , kde funkce nemění znaménko (tj. $P(m)P(n) > 0$) neleží žádný, nebo leží sudý počet kořenů polynomu $P(x)$.

V některých případech, obzvláště tehdy, když polynom neobsahuje mnoho členů, lze kořeny odseparovat graficky. Převédeme vhodné členy z levé strany algebraické rovnice na pravou, tak abychom dostali rovnici tvaru $p(x) = q(x)$, kde $p(x)$ a $q(x)$ jsou polynomy, jejichž grafy umíme zakreslit. Po nakreslení obrázku vidíme ihned, kolik mají grafy těchto křivek průsečíků a v kterých intervalech leží. Tyto průsečíky jsou kořeny původního polynomu (řešeními původní algebraické rovnice).

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

- Všechny koeficienty jsou plus nebo minus jedna.
- Největší koeficient (v absolutní hodnotě) je tedy také jedna.
- Všechny kořeny splňují odhad

$$|x_i| < 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

+ + -, jeden kladný kořen

- Napíšeme posloupnost znamének.
- Je zde jedna znaménková změna.
- Rovnice má tedy jeden kladný kořen.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

+ + -, jeden kladný kořen

$$P(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x - 1$$

- Hledejme počet záporných kořenů.
- Nalezneme pomocný polynom $P(-x)$ a určíme počet znaménkových změn.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

+ + -, jeden kladný kořen

$$P(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x - 1$$

- - -, není záporný kořen

Znaménková změna není žádná a polynom tedy nemá záporný kořen.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

+ + -, jeden kladný kořen

$$P(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x - 1$$

- - -, není záporný kořen

$$P(0) = -1;$$

$$P(1) = 1 + 1 - 1 = 1;$$

$$P(2) = 8 + 2 - 1 = 9;$$

- Kořen je v intervalu $(0, 2)$.
- Výpočtem funkčních hodnot polynomu v celých číslech kořen můžeme lokalizovat do intervalu délky 1.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

+ + -, jeden kladný kořen

$$P(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x - 1$$

- - -, není záporný kořen

$$P(0) = -1;$$

$$P(1) = 1 + 1 - 1 = 1;$$

$$P(2) = 8 + 2 - 1 = 9; \text{ Kořen je v intervalu } (0, 1)$$

- Lokalizovali jsme kořen.
- Nyní tuto lokalizaci zpřesníme na požadovanou přesnost. (Stávající přesnost je 0.5.)

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0		1	-		+	

- Sestavíme tabulku a zapíšeme do ní dosažený odhad kořene.
- U funkčních hodnot stačí zapisovat znaménka.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-		+	

Vypočteme polovinu intervalu $[a, b]$.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5		1	-		+	

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-		+	

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

Opět rozpůlíme interval. Číslo v polovině intervalu je kořenem s přesností

$$\epsilon = \frac{1 - 0.5}{2} = 0.25,$$

což je více, než potřebujeme.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

$$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5		0.75	-		+	

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

$$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$$

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-		+	

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

$$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$$

Opět rozpůlíme interval.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

$$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$$

$$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625		0.75	-		+	

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

$$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$$

$$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$$

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625		0.75	-		+	0.62

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

$$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$$

$$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$$

Určíme dosaženou přesnost.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	-		+	0.62

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

$$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$$

$$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$$

Rozpůlíme interval.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	-	+0.01	+	0.62

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

$$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$$

$$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$$

$$(0.6875)^3 + 0.6875 - 1 = 0.0124511$$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	-	+0.01	+	0.62
0.625		0.6875	-		+	

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

$$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$$

$$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$$

$$(0.6875)^3 + 0.6875 - 1 = 0.0124511$$

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	-	+0.01	+	0.62
0.625	0.6563	0.6875	-		+	0.0312

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

$$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$$

$$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$$

$$(0.6875)^3 + 0.6875 - 1 = 0.0124511$$

Určíme polovinu intervalu a dosaženou přesnost.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	-	+0.01	+	0.62
0.625	0.6563	0.6875	-	-0.06	+	0.0312

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

$$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$$

$$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$$

$$(0.6875)^3 + 0.6875 - 1 = 0.0124511$$

$$(0.6563)^3 + 0.6563 - 1 = -0.06$$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	-	+0.01	+	0.62
0.625	0.6563	0.6875	-	-0.06	+	0.0312
0.6563		0.6875				

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

$$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$$

$$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$$

$$(0.6875)^3 + 0.6875 - 1 = 0.0124511$$

$$(0.6563)^3 + 0.6563 - 1 = -0.06$$

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	-	+0.01	+	0.62
0.625	0.6563	0.6875	-	-0.06	+	0.0312
0.6563	0.6719	0.6875				0.0156

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

$$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$$

$$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$$

$$(0.6875)^3 + 0.6875 - 1 = 0.0124511$$

$$(0.6563)^3 + 0.6563 - 1 = -0.06$$

- Přesnost je nyní dostatečná.
- Stačí již jen rozpůlit interval.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu (0, 1)

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$e = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	-	-0.37	+	
0.5	0.75	1	-	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	-	-0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	-	+0.01	+	0.62
0.625	0.6563	0.6875	-	-0.06	+	0.0312
0.6563	0.6719	0.6875				0.0156

$$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$$

$$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$$

$$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$$

$$(0.6875)^3 + 0.6875 - 1 = 0.0124511$$

$$(0.6563)^3 + 0.6563 - 1 = -0.06$$

Kořen je $x = 0.67 \pm 0.02$. Leží tedy uvnitř intervalu (0.65, 0.69).

- Chybu zokrouhlíme nahoru (vždy nahoru) na jednu platnou číslici a odhad kořene na stejný počet desetinných míst.
- Zkontrolujeme, že i po zaokrouhlení jsou poslední hodnoty odhadů a a b uvnitř intervalu, ve kterém deklarujeme existenci kořene.

Iterační metoda

Někdy je výhodné rovnici $f(x) = 0$ přepsat do tvaru

$$g(x) = x \quad (5)$$

a hledat tedy bod, který se při zobrazení funkcí $g(x)$ zobrazí sám na sebe. Například rovnici

$$\cos(x) - x = 0$$

můžeme přepsat do tvaru

$$\cos(x) = x.$$

Problém najít bod, ve kterém funkce $f(x) = \cos(x) - x$ protíná osu x se tím modifikuje na problém najít bod, který se po aplikaci funkce $g(x) = \cos(x)$ zobrazí sám na sebe.

Definice (pevný bod). Číslo x_* se nazývá *pevný bod funkce $g(x)$* , jestliže platí $g(x_*) = x_*$, tj. jestliže toto číslo je řešením rovnice (5).

Věta 10 (věta o pevném bodu). Nechť $g(x)$ je funkce spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, která

1. zobrazuje interval $[a, b]$ do sebe
2. je diferencovatelná na intervalu (a, b) a splňuje zde pro nějakou reálnou konstantu $L \in (0, 1)$ nerovnost

$$|g'(x)| < L \quad (6)$$

Pak má funkce $g(x)$ na intervalu $[a, b]$ jediný pevný bod x_* . Je-li x_0 libovolný bod intervalu $[a, b]$ a definujeme-li posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ vztahem $x_{k+1} = g(x_k)$, pak tato posloupnost konverguje k pevnému bodu x_* . Odhad chyby při aproximaci bodu x_* pomocí členů posloupnosti je

$$|x_{k+1} - x_*| \leq \frac{L}{1-L} |x_{k+1} - x_k|.$$

Poznámka 6 (ověření podmínek věty o pevném bodě). Pro ověření toho, že funkce $g(x)$ zobrazuje interval $[a, b]$ do sebe, stačí ověřit podmínku (6) a podmínky $g(a) \geq a$ a $g(b) \leq b$.

Poznámka 7 (iterace). Aplikujeme-li na daný vzor k -krát funkci g , nazývá se výsledek k -tá iterace funkce g . Například složená funkce $g(g(g(x)))$ je třetí iterací funkce g . Posloupnost, která podle předchozí věty slouží k aproximaci pevného bodu je tedy posloupností jednotlivých iterací funkce $g(x)$. k -tá iterace funkce se někdy označuje $g^k(x)$.

Příklad 6 (iteační metoda). Řešme rovnici $x^3 + x - 1 = 0$.

Řešení. Graficky nebo separací kořenů algebraické rovnice (viz předchozí slidy) se snadno přesvědčíme, že funkce má kořen na intervalu $[0, 1]$. Přepíšeme-li rovnici do tvaru

$$x = 1 - x^3$$

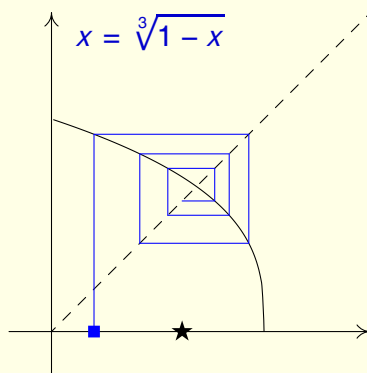
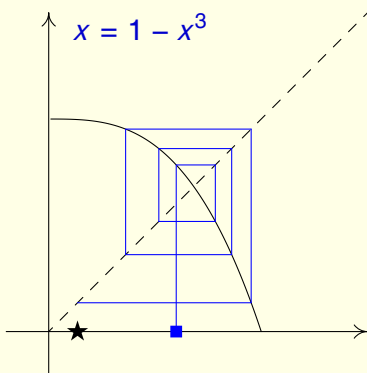
a sestavujeme-li iterační posloupnost dostáváme: $g(0.5) = 0.875$, $g(0.875) = 0.330$, $g(0.330) = 0.964$, $g(0.964) = 0.104$, ... (Ověřte si dopočítáním dalších členů sami, že posloupnost nekonverguje¹.) Přepíšeme-li však rovnici do tvaru

$$x = \sqrt[3]{1 - x}$$

dostáváme

x	0.5	0.7937	0.5908	0.7423	0.6363	...
$g(x)$	0.7937	0.5908	0.7423	0.6363	0.7138	...

¹Divergence je patrná i z Obrázku 1. Selhání metody je způsobeno tím, že jsme nebyli důslední a neověřili předpoklady Věty 10. Derivace funkce ve skutečnosti není ohraničena konstantou menší než 1.



Obrázek 1: Divergence a konvergence iterační metody pro rovnici $x^3 + x - 1 = 0$.

a tato posloupnost konverguje k řešení rovnice. 14-tá iterace funkce je 0.6807 . Konvergence metody je patrná i z Obrázku 1.

Poznámka 8. Chyba při výpočtu metodou nejmenších čtverců se zmenšuje geometrickou řadou s kvocientem $\frac{1}{2}$. Rychlost konvergence výpočtu založeného na větě o pevném bodu závisí na velikosti konstanty L a lze ukázat, že při použití této metody se chyba zmenšuje geometrickou řadou s kvocientem L . Konstantu L je možno do jisté míry měnit převodem rovnice na jiný tvar, který je vhodnější pro iterace, jak jsme viděli v Příkladu 6.

