Algebraické rovnice

Robert Mařík
Ústav matematiky, LDF, MZLU
www.mendelu.cz/user/marik

Obsah

1 Základní pojmy a vlastnosti

Definice (algebraická rovnice). Buď n přirozené číslo a

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \tag{Pn}$$

polynom stupně n s reálnými koeficienty a_0, a_1, $\dots a_n$, kde $a_0 \neq 0$. Koeficient a_0 se nazýváme *vedoucí koeficient polynomu* $P_n(x)$ a koeficient a_n *absolutní člen polynomu* $P_n(x)$. Člen a_0x^n nazýváme *vedoucí člen polynomu* $P_n(x)$. *Algebraickou rovnicí stupně* n rozumíme rovnici tvaru $P_n(x) = 0$, tj.

$$\mathbf{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0} \tag{Rn}$$

Poznámka 1 (nejjednodušší polynomy). *lineární polynom*, *kvadratický polynom*, *kubický polynom*.

Definice (kořen polynomu, řešení algebraické rovnice). *Řešením (kořenem)* algebraické rovnice (Rn) (*kořenem polynomu* (Pn)) rozumíme číslo c, splňující $P_n(c) = 0$, tj. splňující po dosazení za x rovnost (Rn).

Příklad 1. Čísla $x = 1$ a $x = -2$ jsou kořeny polynomu

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2. \tag{1}$$

Vskutku, přímým výpočtem lze ověřit, že $P(1) = 0$ a $P(-2) = 0$. Číslo $x = 3$ naopak není kořenem tohoto polynomu, protože $P(3) = 40 \neq 0$.

O řešitelnosti algebraických rovnic vypovídá následující věta.

Věta 1 (základní věta algebry). V oboru komplexních čísel má každý nekonstantní polynom kořen.

Věta 2 (Bezoutova věta). Číslo c je kořenem polynomu (Pn) právě tehdy, když existuje polynom $Q_{n-1}(x)$ stupně $(n-1)$ s vlastností

$$P_n(x) = (x-c)Q_{n-1}(x). \tag{2}$$

Definice (kořenový činitel). Je-li c kořenem polynomu (Pn), pak lineární polynom $(x-c)$ s proměnnou x nazýváme *kořenový činitel příslušný ke kořeni c*.

Příklad 2. Polynom (1) může být zapsán v následujících ekvivalentních tvarech

$$y = (x-1)(x^2+3x+2), \quad y = (x+2)(x^2-1), \quad y = (x-1)(x+1)(x+2).$$

Definice (násobnost kořene). Nechť c je kořenem polynomu $P_n(x)$. Řekneme že tento kořen je k-*násobný*, jestliže existuje polynom $Q_{n-k}(x)$ stupně $n-k$ takový, že platí

$$\mathbf{P_n(x) = (x-c)^k Q_{n-k}(x)} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{Q_{n-k}(c) \neq 0} \tag{3}$$

Věta 3. Polynomy $P_n(x)$ a $Q_{n-k}(x)$ z předchozí definice mají stejné kořeny včetně násobnosti, s výjimkou kořene c.

Poznámka 2 (souvislost násobnosti kořene se změnou znaménka). V okolí kořene liché násobnosti polynom mění znaménko, v okolí kořene sudé násobnosti ne.

Věta 4 (souvislost násobnosti kořene s derivací). Číslo c je k-násobným kořenem polynomu (Pn) (rovnice (Rn)) právě tedy, když platí

$$P_n(c) = P_n'(c) = P_n''(c) = \cdots = P_n^{(k-1)}(c) = 0 \quad \text{a} \quad P_n^{(k)}(c) \neq 0.$$

Věta 5 (počet reálných kořenů)**.** V oboru reálných čísel má každý polynom (každá algebraická rovnice) stupně n celkem buď n kořenů, nebo o sudý počet méně. Přitom každý kořen počítáme i s jeho násobností.

Poznámka 3. Umíme vyřešit libovolnou lineární a kvadratickou rovnici. Lze vyřešit i libovolnou algebraickou rovnici řádu 3 a 4. Není však možné sestrojit algoritmus pro nalezení kořenů rovnice řádu 5 a více!

2 Základní numerické metody pro algebraické rovnice

Věta 6 (nutná podmínka pro celočíselné kořeny)**.** Nechť všechny koeficienty polynomu (Pn) jsou celá čísla. Je-li $c \in \mathbb{Z}$ kořenem tohoto polynomu, pak je číslo a_n dělitelné číslem c, tj. $c | a_n$.

Věta 7 (Descartova věta)**.** Počet kladných kořenů polynomu (Pn) (algebraické rovnice (Rn)) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, nebo o sudé číslo menší. Případné koeficienty, které jsou rovny nule, přitom neuvažujeme.

Příklad 3 (počet kladných kořenů)**.** Polynom

$$P(x) = x^8 - x^5 + x^3 + x^2 - x + 1$$

má buď 4 nebo 2 nebo žádný reálný kladný kořen.

Věta 8 (ohraničenost kořenů)**.** Buďte x_i (pro $i = 1..n$) kořeny (i komplexní) polynomu (Pn) (algebraické rovnice (Rn)). Platí

$$|x_i| < 1 + \frac{A}{|a_0|}, \tag{4}$$

kde $A = \max\{|a_i|, i = 1..n\}$.

Příklad 4 (odhad velikosti kořenů)**.** Pro kořeny x_i polynomu

$$P(x) = 2x^6 - x^3 + 4x^2 + x - 6$$

platí $|x_i| < 1 + \frac{6}{2} = 4$. Polynom má 3 nebo 1 kladný reálný kořen. Tyto kořeny leží v intervalu $(0, 4)$.

Věta 9 (varianta Descartovy věty pro záporné kořeny)**.** Uvažujme pomocný polynom $\tilde{P}(x) = P(-x)$. Koeficienty tohoto polynomu označme $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$ Počet záporných kořenů polynomu (Pn) (algebraické rovnice (Rn)) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$, $\dots$, $\tilde{a}_n$, nebo o sudé číslo menší. Případné koeficienty, které jsou rovny nule, přitom neuvažujeme.

Příklad 5 (počet záporných kořenů)**.** Pro polynom $P(x) = 2x^6 - x^3 + 4x^2 + x - 6$ platí $\tilde{P}(x) = P(-x) = 2x^6 + x^3 + 4x^2 - x - 6$ a polynom $P(x)$ má tedy jediný záporný reálný kořen, tj. má jeden kořen na intervalu $(-4, 0)$.

Poznámka 4 (technická)**.** Pomocný polynom $\tilde{P}(x)$ rychle obdržíme z polynomu $P(x)$ uvědomíme-li si, že stačí změnit znaménka u koeficientů polynomu $P(x)$, které přísluší mocninám lichého stupně.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18 a ±36.

Vypíšeme dělitele čísla 36 (i záporné).

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0.$

Dělitelé čísla 36 jsou ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18 a ±36.

1	1	−5	−9	−24	−36

Budeme počítat hodnoty pomocí Hornerova schematu. Připravíme si proto koeficienty polynomu z levé strany rovnice do tabulky.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18 a ±36.

	1	1	−5	−9	−24	−36
1	1	2	−3	−12	−36	−72

Dosadíme $x = 1$. Je-li $P(x)$ polynom z pravé strany rovnice, vidíme, že $P(1) = -72$ a toto číslo $x = 1$ není kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18 a ±36.

	1	1	−5	−9	−24	−36
1	1	2	−3	−12	−36	−72
−1	1	0	−5	−4	−20	−16

Podobně ani $x = -1$ není kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18 a ±36.

	1	1	−5	−9	−24	−36
1	1	2	−3	−12	−36	−72
−1	1	0	−5	−4	−20	−16
2	1	3	1	−7	−38	$\neq 0$

Ani $x = 2$ není kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18 a ±36.

	1	1	−5	−9	−24	−36
1	1	2	−3	−12	−36	−72
−1	1	0	−5	−4	−20	−16
2	1	3	1	−7	−38	≠ 0
$\boxed{-2}$	1	−1	−3	−3	−18	‖ 0

Nyní jsme zjistili, že $x = -2$ je kořenem. Levou stranu rovnice je tedy možno přepsat do tvaru

$$(x + 2)(x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 18) = 0.$$

Dál zkoumáme jenom polynom, který stojí v tomto součinu jako druhý.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0.$

Dělitelé čísla 36 jsou ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18 a ±36.

	1	1	−5	−9	−24	−36
1	1	2	−3	−12	−36	−72
−1	1	0	−5	−4	−20	−16
2	1	3	1	−7	−38	$\neq 0$
$\boxed{-2}$	1	−1	−3	−3	−18	‖ 0
$\boxed{-2}$	1	−3	3	−9	‖ 0	

Dosadíme opět $x = -2$. Opět je toto číslo kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 9, ± 12, ± 18 a ± 36.

	1	1	−5	−9	−24	−36
1	1	2	−3	−12	−36	−72
−1	1	0	−5	−4	−20	−16
2	1	3	1	−7	−38	$\neq 0$
$\boxed{-2}$	1	−1	−3	−3	−18	$\Vert\ 0$
$\boxed{-2}$	1	−3	3	−9	$\Vert\ 0$	
−2	1	−5	13	−35		

- Dosadíme opět $x = -2$. Nyní již se o kořen nejedná.
- Protože na konci polynomu, do kterého nyní dosazujeme, stojí číslo 9, zajímáme se jen o dělitele tohoto čísla.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18 a ±36.

	1	1	−5	−9	−24	−36
1	1	2	−3	−12	−36	−72
−1	1	0	−5	−4	−20	−16
2	1	3	1	−7	−38	$\neq 0$
$\boxed{-2}$	1	−1	−3	−3	−18	$\Vert\, 0$
$\boxed{-2}$	1	−3	3	−9	$\Vert\, 0$	
−2	1	−5	13	−35		
$\boxed{3}$	1	0	3	$\Vert\, 0$		

- Vyškrtneme čísla která nedělí číslo 9 a dosazujeme další na řadě, $x = 3$.
- Vidíme, že $x = 3$ je kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18 a ±36.

	1	1	−5	−9	−24	−36
1	1	2	−3	−12	−36	−72
−1	1	0	−5	−4	−20	−16
2	1	3	1	−7	−38	$\neq 0$
$\boxed{-2}$	1	−1	−3	−3	−18	$\parallel 0$
$\boxed{-2}$	1	−3	3	−9	$\parallel 0$	
−2	1	−5	13	−35		
$\boxed{3}$	1	0	3	$\parallel 0$		
−3	1	−3	12			

Dál se zabýváme jenom děliteli posledního koeficientu — čísla 3. Navíc posloupnost koeficientů polynomu nemá žádnou znaménkovou změnu a podle Descartovy věty polynom nemá kladný kořen. Zbývá tedy již jen číslo $x = -3$, které není kořenem.

Řešte v oboru celých čísel $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$.

Dělitelé čísla 36 jsou ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18 a ±36.

	1	1	−5	−9	−24	−36
1	1	2	−3	−12	−36	−72
−1	1	0	−5	−4	−20	−16
2	1	3	1	−7	−38	$\neq 0$
$\boxed{-2}$	1	−1	−3	−3	−18	‖ 0
$\boxed{-2}$	1	−3	3	−9	‖ 0	
−2	1	−5	13	−35		
$\boxed{3}$	1	0	3	‖ 0		
−3	1	−3	12			

Rozklad na součin je $(x + 2)^2(x - 3)(x^2 + 3) = 0$.

- Polynom má dvojnásobný kořen $x = -2$, jednoduchý kořen $x = 3$ a nemá žádný další celočíselný kořen.
- Polynom, který zůstal, má koeficienty $1, 0, 3$, jedná se tedy o polynom $x^2 + 0x + 3$.

Poznámka 5 (separace kořenů)**.** Další úlohou spojenou s hledáním kořenů algebraické rovnice (polynomu) je separace kořenů – tj. nalezení systému intervalů, které obsahují právě jeden kořen. Separaci kořenů provádíme zpravidla takto:

- Stanovíme interval, ve kterém všechny kořeny leží, například s použitím Věty 8.
- Vypočteme funkční hodnoty ve vhodných bodech — obvykle volíme celá čísla z uvažovaného intervalu a lokální extrémy. V každém intervalu typu (m, n), kde funkce mění znaménko (tj. $P(m)P(n) < 0$) leží jeden nebo lichý počet kořenů polynomu $P(x)$. V každém intervalu typu (m, n), kde funkce nemění znaménko (tj. $P(m)P(n) > 0$) neleží žádný, nebo leží sudý počet kořenů polynomu $P(x)$.

V některých případech, obzvláště tehdy, když polynom neobsahuje mnoho členů, lze kořeny odseparovat graficky. Převedeme vhodné členy z levé strany algebraické rovnice na pravou, tak abychom dostali rovnici tvaru $p(x) = q(x)$, kde $p(x)$ a $q(x)$ jsou polynomy, jejichž grafy umíme zakreslit. Po nakreslení obrázku vidíme ihned, kolik mají grafy těchto křivek průsečíků a v kterých intervalech leží. Tyto průsečíky jsou kořeny původního polynomu (řešeními původní algebraické rovnice).

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

- Všechny koeficienty jsou plus nebo minus jedna.
- Největší koeficient (v absolutní hodnotě) je tedy také jedna.
- Všechny kořeny splňují odhad

$$|x_i| < 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

$+ \quad + \quad -$, jeden kladný kořen

- Napíšeme posloupnost znamének.
- Je zde jedna znaménková změna.
- Rovnice má tedy jeden kladný kořen.

$\boxed{\text{Řešte rovnici } P(x) = x^3 + x - 1 = 0 \text{ s chybou nejvýše } 0.03.}$

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

$+ \ + \ -$, jeden kladný kořen

$P(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x - 1$

- Hledejme počet záporných kořenů.
- Nalezneme pomocný polynom $P(-x)$ a určíme počet znaménkových změn.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

$+ \ \ + \ \ -$, jeden kladný kořen

$P(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x - 1$

$- \ \ - \ \ -$, není záporný kořen

Znaménková změna není žádná a polynom tedy nemá záporný kořen.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

$+ \ + \ -$, jeden kladný kořen

$P(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x - 1$

$- \ - \ -$, není záporný kořen

$P(0) = -1;$

$P(1) = 1 + 1 - 1 = 1;$

$P(2) = 8 + 2 - 1 = 9;$

- Kořen je v intervalu $(0, 2)$.
- Výpočtem funkčních hodnot polynomu v celých číslech kořen můžeme lokalizovat do intervalu délky 1.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Všechna řešení jsou v intervalu $(-2, 2)$.

$+ \ \ + \ \ -$, jeden kladný kořen

$P(-x) = (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^3 - x - 1$

$- \ \ - \ \ -$, není záporný kořen

$P(0) = -1$;

$P(1) = 1 + 1 - 1 = 1$;

$P(2) = 8 + 2 - 1 = 9$; Kořen je v intervalu $(0, 1)$

- Lokalizovali jsme kořen.
- Nyní tuto lokalizaci zpřesníme na požadovanou přesnost. (Stávající přesnost je 0.5.)

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \dfrac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \dfrac{b-a}{2}$
0		1	$-$		$+$	

- Sestavíme tabulku a zapíšeme do ní dosažený odhad kořene.
- U funkčních hodnot stačí zapisovat znaménka.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$		$+$	

Vypočteme polovinu intervalu $[a, b]$.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \dfrac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \dfrac{b-a}{2}$
0	0.5	1	−	−0.37	+	
0.5		1	−		+	

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	–	−0.37	+	
0.5	0.75	1	–		+	

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$

Opět rozpůlíme interval. Číslo v polovině intervalu je kořenem s přesností

$$\epsilon = \frac{1 - 0.5}{2} = 0.25,$$

což je více, než potřebujeme.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	–	–0.37	+	
0.5	0.75	1	–	+0.17	+	

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$

$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	−	−0.37	+	
0.5	0.75	1	−	+0.17	+	
0.5		0.75	−		+	

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$
$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	−	−0.37	+	
0.5	0.75	1	−	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	−		+	

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$

$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$

Opět rozpůlíme interval.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \dfrac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \dfrac{b-a}{2}$
0	0.5	1	−	−0.37	+	
0.5	0.75	1	−	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	−	−0.13	+	

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$

$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$

$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0,1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	−	−0.37	+	
0.5	0.75	1	−	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	−	−0.13	+	
0.625		0.75	−		+	

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$
$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$
$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	–	–0.37	+	
0.5	0.75	1	–	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	–	–0.13	+	
0.625		0.75	–		+	0.62

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$

$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$

$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$

Určíme dosaženou přesnost.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	−	−0.37	+	
0.5	0.75	1	−	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	−	−0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	−		+	0.62

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$
$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$
$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$

Rozpůlíme interval.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	
0.5	0.625	0.75	$-$	-0.13	$+$	
0.625	0.6875	0.75	$-$	$+0.01$	$+$	0.62

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$

$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$

$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$

$(0.6875)^3 + 0.6875 - 1 = 0.0124511$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	−	−0.37	+	
0.5	0.75	1	−	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	−	−0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	−	+0.01	+	0.62
0.625		0.6875	−		+	

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$

$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$

$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$

$(0.6875)^3 + 0.6875 - 1 = 0.0124511$

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \dfrac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \dfrac{b-a}{2}$
0	0.5	1	−	−0.37	+	
0.5	0.75	1	−	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	−	−0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	−	+0.01	+	0.62
0.625	0.6563	0.6875	−		+	0.0312

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$

$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$

$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$

$(0.6875)^3 + 0.6875 - 1 = 0.0124511$

Určíme polovinu intervalu a dosaženou přesnost.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	–	−0.37	+	
0.5	0.75	1	–	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	–	−0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	–	+0.01	+	0.62
0.625	0.6563	0.6875	–	−0.06	+	0.0312

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$

$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$

$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$

$(0.6875)^3 + 0.6875 - 1 = 0.0124511$

$(0.6563)^3 + 0.6563 - 1 = -0.06$

Vypočteme funkční hodnotu v polovině intervalu.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	−	−0.37	+	
0.5	0.75	1	−	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	−	−0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	−	+0.01	+	0.62
0.625	0.6563	0.6875	−	−0.06	+	0.0312
0.6563		0.6875				

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$
$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$
$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$
$(0.6875)^3 + 0.6875 - 1 = 0.0124511$
$(0.6563)^3 + 0.6563 - 1 = -0.06$

- Hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází ke znaménkové změně (červeně vyznačeno).
- Kraje této poloviny budou novou aproximací kořene.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	−	−0.37	+	
0.5	0.75	1	−	+0.17	+	
0.5	0.625	0.75	−	−0.13	+	
0.625	0.6875	0.75	−	+0.01	+	0.62
0.625	0.6563	0.6875	−	−0.06	+	0.0312
0.6563	0.6719	0.6875				0.0156

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$
$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$
$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$
$(0.6875)^3 + 0.6875 - 1 = 0.0124511$
$(0.6563)^3 + 0.6563 - 1 = -0.06$

- Přesnost je nyní dostatečná.
- Stačí již jen rozpůlit interval.

Řešte rovnici $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ s chybou nejvýše 0.03.

Kořen je v intervalu $(0, 1)$

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(c)$	$P(b)$	$\epsilon = \frac{b-a}{2}$
0	0.5	1	$-$	-0.37	$+$	
0.5	0.75	1	$-$	$+0.17$	$+$	
0.5	0.625	0.75	$-$	-0.13	$+$	
0.625	0.6875	0.75	$-$	$+0.01$	$+$	0.62
0.625	0.6563	0.6875	$-$	-0.06	$+$	0.0312
0.6563	0.6719	0.6875				0.0156

$(0.5)^3 + 0.5 - 1 = -0.375$

$(0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.171875$

$(0.625)^3 + 0.625 - 1 = -0.130859$

$(0.6875)^3 + 0.6875 - 1 = 0.0124511$

$(0.6563)^3 + 0.6563 - 1 = -0.06$

Kořen je $x = 0.67 \pm 0.02$. Leží tedy uvnitř intervalu $(0.65, 0.69)$.

- Chybu zokrouhlíme nahoru (vždy nahoru) na jednu platnou číslici a odhad kořene na stejný počet desetinných míst.
- Zkontrolujeme, že i po zaokrouhlení jsou poslední hodnoty odhadů a a b uvnitř intervalu, ve kterém deklarujeme existenci kořene.

Iterační metoda

Někdy je výhodné rovnici $f(x) = 0$ přepsat do tvaru

$$g(x) = x \tag{5}$$

a hledat tedy bod, který se při zobrazení funkcí $g(x)$ zobrazí sám na sebe. Například rovnici

$$\cos(x) - x = 0$$

můžeme přepsat do tvaru

$$\cos(x) = x.$$

Problém najít bod, ve kterém funkce $f(x) = \cos(x) - x$ protíná osu x se tím modifikuje na problém najít bod, který se po aplikaci funkce $g(x) = \cos(x)$ zobrazí sám na sebe.

Definice (pevný bod)**.** Číslo x_* se nazývá *pevný bod funkce g(x)*, jestliže platí $g(x_*) = x_*$, tj. jestliže toto číslo je řešením rovnice (5).

Věta 10 (věta o pevném bodu)**.** Nechť $g(x)$ je funkce spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, která

1. zobrazuje interval $[a, b]$ do sebe
2. je diferencovatelná na intervalu (a, b) a splňuje zde pro nějakou reálnou konstantu $L \in (0, 1)$ nerovnost
$$|g'(x)| < L \tag{6}$$

Pak má funkce $g(x)$ na intervalu $[a, b]$ jediný pevný bod x_*. Je-li x_0 libovolný bod intervalu $[a, b]$ a definujeme-li posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ vztahem $x_{k+1} = g(x_k)$, pak tato posloupnost konverguje k pevnému bodu x_*. Odhad chyby při aproximaci bodu x_* pomocí členů posloupnosti je
$$|x_{k+1} - x_*| \leq \frac{L}{1-L}|x_{k+1} - x_k|.$$

Poznámka 6 (ověření podmínek věty o pevném bodě)**.** Pro ověření toho, že funkce $g(x)$ zobrazuje interval $[a, b]$ do sebe, stačí ověřit podmínku (6) a podmínky $g(a) \geq a$ a $g(b) \leq b$.

Poznámka 7 (iterace)**.** Aplikujeme-li na daný vzor k-krát funkci g, nazývá se výsledek k-tá iterace funkce g. Například složená funkce $g(g(g(x)))$ je třetí iterací funkce g. Posloupnost, která podle předchozí věty slouží k aproximaci pevného bodu je tedy posloupností jednotlivých iterací funkce $g(x)$. k-tá iterace funkce se někdy označuje $g^k(x)$.

Příklad 6 (iteační metoda)**.** Řešme rovnici $x^3 + x - 1 = 0$.
Řešení. Graficky nebo separací kořenů algebraické rovnice (viz předchozí slidy) se snadno přesvědčíme, že funkce má kořen na intervalu $[0, 1]$. Přepíšeme-li rovnici do tvaru

$$x = 1 - x^3$$

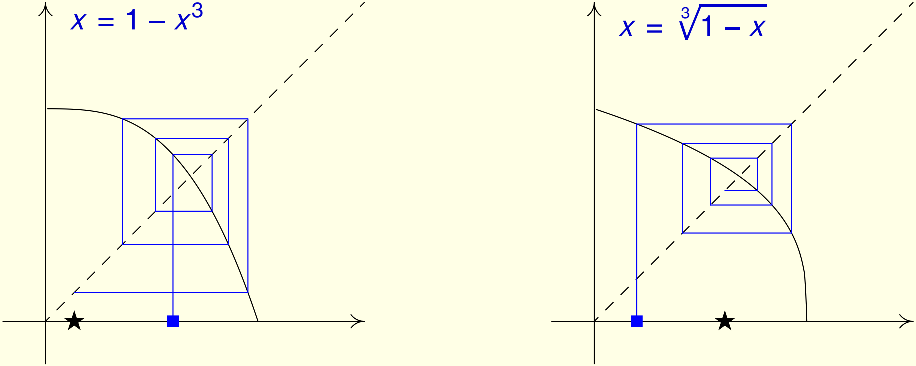
a sestavujeme-li iterační posloupnost dostáváme: $g(0.5) = 0.875$, $g(0.875) = 0.330$, $g(0.330) = 0.964$, $g(0.964) = 0.104$, ... (Ověřte si dopočítáním dalších členů sami, že posloupnost nekonverguje[1].) Přepíšeme-li však rovnici do tvaru

$$x = \sqrt[3]{1 - x}$$

dostáváme

x	0.5	0.7937	0.5908	0.7423	0.6363	. . .
$g(x)$	0.7937	0.5908	0.7423	0.6363	0.7138	. . .

[1]Divergence je patrná i z Obrázku 1. Selhání metody je způsobeno tím, že jsme nebyli důslední a neověřili předpoklady Věty 10. Derivace funkce ve skutečnosti není ohraničena konstantou menší než 1.



Obrázek 1: Divergence a konvergence iterační metody pro rovnici $x^3 + x - 1 = 0$.

a tato posloupnost konverguje k řešení rovnice. 14-tá iterace funkce je 0.6807. Konvergence metody je patrná i z Obrázku 1.

Poznámka 8. Chyba při výpočtu metodou nejmenších čtverců se zmenšuje geometrickou řadou s kvocientem $\frac{1}{2}$. Rychlost konvergence výpočtu založeného na větě o pevném bodu závisí na velikosti konstanty L a lze ukázat, že při použití této metody se chyba zmenšuje geometrickou řadou s kvocientem L. Konstantu L je možno do jisté míry měnit převodem rovnice na jiný tvar, který je vhodnější pro iterace, jak jsme viděli v Příkladu 6.