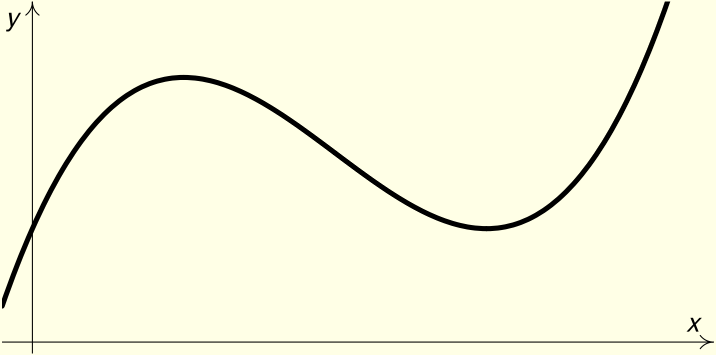
Derivace a průběh funkce.

Robert Mařík

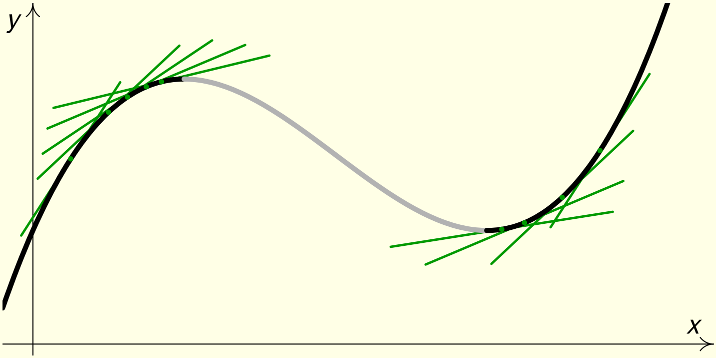
14. října 2008

Obsah

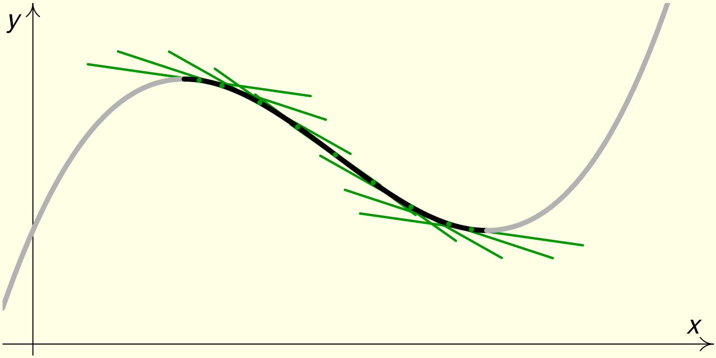
1 Základní myšlenky.



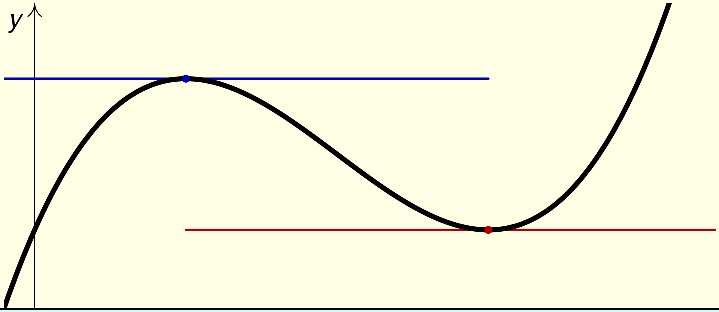
Uvažujme následující funkci.



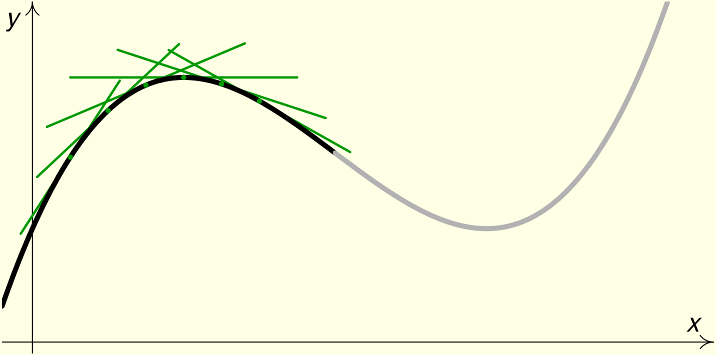
Derivace je kladná (= směrnice tečny je kladná)
$\Rightarrow$ tečna je rostoucí
$\Rightarrow$ **funkce je rostoucí**.



Derivace je záporná (= směrnice tečny je záporná)
⇒ tečna je klesající
⇒ **funkce je klesající.**



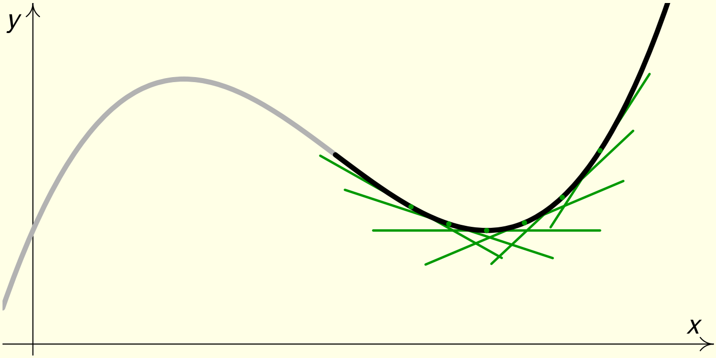
- Lokální maximum (bod, v jehož okolí není žádná vyšší funkční hodnota) má spojitá funkce v bodě, kde se mění z rostoucí na klesající.
- Lokální minimum (bod, v jehož okolí není žádná nižší funkční hodnota) má spojitá funkce v bodě, kde se mění z klesající na rostoucí.
- Je-li derivace nenulová, funkce nedosahuje lokálního extrému. **Je-li v bodě lokální extrém, pak je derivace buď nulová (=: stacionární bod) nebo derivace neexistuje**.



$\boxed{y'' < 0}$ (y' má zápornou derivaci a tedy klesá)

$\Rightarrow$ růst se zpomaluje a případně se mění na pokles; pokles se zrychluje

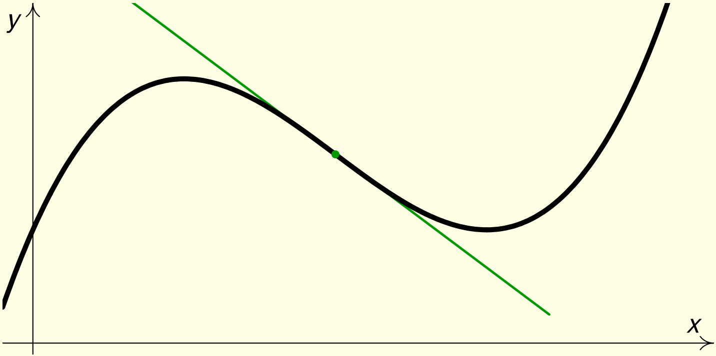
$\Rightarrow$ funkce je v okolí bodu dotyku **pod tečnou** (**=: konkávní**)



$\boxed{y'' > 0}$ (y' má kladnou derivaci a tedy roste)

$\Rightarrow$ růst se zrychluje; pokles zpomaluje a případně se mění na růst

$\Rightarrow$ funkce je v okolí bodu dotyku **nad tečnou** (**=: konvexní**)



Konvexnost se změní na konkavitu, nebo naopak, (=: **funkce má inflexní bod**) jedině v bodě, kde se změní znaménko druhé derivace, tj. jedině **v bodě, kde je druhá derivace nulová, nebo kde** má bod nespojitosti (a potom **druhá derivace neexistuje**). V inflexním bodě je nárůst nebo pokles funkčních hodnot nejrychlejší nebo nejpomalejší.

2 Přesné věty a definice

Definice (lokální extrém). Buď f funkce a $x_0 \in Dom(f)$.

- Řekneme, že funkce má v bodě x_0 *lokální maximum*, jestliže existuje ryzí okolí $\overline{O}(x_0)$, takové, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro všechna $x \in \overline{O}(x_0)$. Je-li nerovnost ostrá, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *ostré lokální maximum*.
- Platí-li opačné nerovnosti, říkáme, že funkce má v bodě x_0 *lokální minimum* a *ostré lokální minimum*.
- Lokální maximum a minimum nazýváme společným názvem *lokální extrémy*. Ostré lokální maximum a ostré lokální minimum nazýváme společným názvem *ostré lokální extrémy*.

Definice (lokální extrém). Buď f funkce a $x_0 \in Dom(f)$.

- Řekneme, že funkce má v bodě x_0 *lokální maximum*, jestliže existuje ryzí okolí $\overline{O}(x_0)$, takové, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro všechna $x \in \overline{O}(x_0)$. Je-li nerovnost ostrá, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *ostré lokální maximum*.
- Platí-li opačné nerovnosti, říkáme, že funkce má v bodě x_0 *lokální minimum* a *ostré lokální minimum*.
- Lokální maximum a minimum nazýváme společným názvem *lokální extrémy*. Ostré lokální maximum a ostré lokální minimum nazýváme společným názvem *ostré lokální extrémy*.

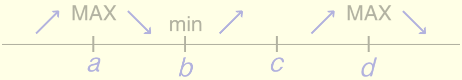
Definice (lokální extrém). Buď f funkce a $x_0 \in Dom(f)$.

- Řekneme, že funkce má v bodě x_0 *lokální maximum*, jestliže existuje ryzí okolí $\overline{O}(x_0)$, takové, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro všechna $x \in \overline{O}(x_0)$. Je-li nerovnost ostrá, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *ostré lokální maximum*.
- Platí-li opačné nerovnosti, říkáme, že funkce má v bodě x_0 *lokální minimum* a *ostré lokální minimum*.
- Lokální maximum a minimum nazýváme společným názvem *lokální extrémy*. Ostré lokální maximum a ostré lokální minimum nazýváme společným názvem *ostré lokální extrémy*.

Věta 1 (postačující podmínky pro existenci a neexistenci lokálních extrémů). Buď f funkce definovaná a spojitá v nějakém okolí bodu x_0.

- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce rostoucí a pravé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce klesající, je bod x_0 bodem ostrého lokálního maxima funkce f.
- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce klesající a pravé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce rostoucí, je bod x_0 bodem ostrého lokálního minima funkce f.
- Jestliže existuje okolí bodu x_0 ve kterém je funkce ryze monotonní, lokální extrém v bodě x_0 nenastává.

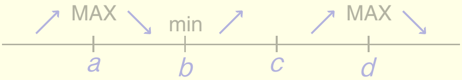
Poznámka 1. Graficky můžeme předchozí větu ilustrovat následovně.



Věta 1 (postačující podmínky pro existenci a neexistenci lokálních extrémů). Buď f funkce definovaná a spojitá v nějakém okolí bodu x_0.

- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce rostoucí a pravé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce klesající, je bod x_0 bodem ostrého lokálního maxima funkce f.
- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce klesající a pravé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce rostoucí, je bod x_0 bodem ostrého lokálního minima funkce f.
- Jestliže existuje okolí bodu x_0 ve kterém je funkce ryze monotonní, lokální extrém v bodě x_0 nenastává.

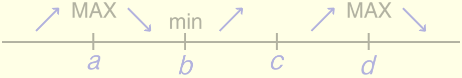
Poznámka 1. Graficky můžeme předchozí větu ilustrovat následovně.



Věta 1 (postačující podmínky pro existenci a neexistenci lokálních extrémů). Buď f funkce definovaná a spojitá v nějakém okolí bodu x_0.

- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce rostoucí a pravé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce klesající, je bod x_0 bodem ostrého lokálního maxima funkce f.
- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce klesající a pravé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce rostoucí, je bod x_0 bodem ostrého lokálního minima funkce f.
- Jestliže existuje okolí bodu x_0 ve kterém je funkce ryze monotonní, lokální extrém v bodě x_0 nenastává.

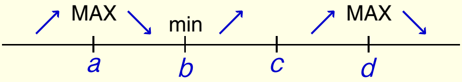
Poznámka 1. Graficky můžeme předchozí větu ilustrovat následovně.



Věta 1 (postačující podmínky pro existenci a neexistenci lokálních extrémů). Buď f funkce definovaná a spojitá v nějakém okolí bodu x_0.

- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce rostoucí a pravé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce klesající, je bod x_0 bodem ostrého lokálního maxima funkce f.
- Jestliže existuje levé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce klesající a pravé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce rostoucí, je bod x_0 bodem ostrého lokálního minima funkce f.
- Jestliže existuje okolí bodu x_0 ve kterém je funkce ryze monotonní, lokální extrém v bodě x_0 nenastává.

Poznámka 1. Graficky můžeme předchozí větu ilustrovat následovně.



Věta 2 (souvislost derivace a monotonie). Nechť funkce f má derivaci na otevřeném intervalu I.

- Je-li $f'(x) > 0$ na intervalu I, je funkce f rostoucí na I.
- Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu I, je funkce f klesající na I.

Definice (stacionární bod). Řekneme, že bod x_0 je *stacionárním bodem* funkce f, jestliže funkce f má v bodě x_0 nulovou derivaci, tj. $f'(x_0) = 0$.

Poznámka 2 (geometrický význam). Geometricky jsou stacionární body body, ve kterých má graf funkce vodorovnou tečnu (proč?).

Věta 3 (souvislost derivace a lokálních extrémů). Nechť má funkce v bodě x_0 lokální extrém. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá derivaci, nebo je tato derivace nulová, tj. platí $f'(x_0) = 0$ a x_0 je stacionárním bodem funkce f.

Věta 2 (souvislost derivace a monotonie). Nechť funkce f má derivaci na otevřeném intervalu I.

- Je-li $f'(x) > 0$ na intervalu I, je funkce f rostoucí na I.
- Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu I, je funkce f klesající na I.

Definice (stacionární bod). Řekneme, že bod x_0 je *stacionárním bodem* funkce f, jestliže funkce f má v bodě x_0 nulovou derivaci, tj. $f'(x_0) = 0$.

Poznámka 2 (geometrický význam). Geometricky jsou stacionární body body, ve kterých má graf funkce vodorovnou tečnu (proč?).

Věta 3 (souvislost derivace a lokálních extrémů). Nechť má funkce v bodě x_0 lokální extrém. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá derivaci, nebo je tato derivace nulová, tj. platí $f'(x_0) = 0$ a x_0 je stacionárním bodem funkce f.

Věta 2 (souvislost derivace a monotonie). Nechť funkce f má derivaci na otevřeném intervalu I.

- Je-li $f'(x) > 0$ na intervalu I, je funkce f rostoucí na I.
- Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu I, je funkce f klesající na I.

Definice (stacionární bod). Řekneme, že bod x_0 je *stacionárním bodem* funkce f, jestliže funkce f má v bodě x_0 nulovou derivaci, tj. $f'(x_0) = 0$.

Poznámka 2 (geometrický význam). Geometricky jsou stacionární body body, ve kterých má graf funkce vodorovnou tečnu (proč?).

Věta 3 (souvislost derivace a lokálních extrémů). Nechť má funkce v bodě x_0 lokální extrém. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá derivaci, nebo je tato derivace nulová, tj. platí $f'(x_0) = 0$ a x_0 je stacionárním bodem funkce f.

Věta 2 (souvislost derivace a monotonie). Nechť funkce f má derivaci na otevřeném intervalu I.

- Je-li $f'(x) > 0$ na intervalu I, je funkce f rostoucí na I.
- Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu I, je funkce f klesající na I.

Definice (stacionární bod). Řekneme, že bod x_0 je *stacionárním bodem* funkce f, jestliže funkce f má v bodě x_0 nulovou derivaci, tj. $f'(x_0) = 0$.

Poznámka 2 (geometrický význam)**.** Geometricky jsou stacionární body body, ve kterých má graf funkce vodorovnou tečnu (proč?).

Věta 3 (souvislost derivace a lokálních extrémů). Nechť má funkce v bodě x_0 lokální extrém. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá derivaci, nebo je tato derivace nulová, tj. platí $f'(x_0) = 0$ a x_0 je stacionárním bodem funkce f.

Definice (konvexnost, konkávnost)**.** Buď f funkce mající derivaci v bodě x_0. Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 *konvexní (konkávní)*, jestliže existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \overline{O}(x_0)$ leží body grafu funkce nad tečnou (pod tečnou) ke grafu funkce f sestrojenou v bodě x_0, tj. platí

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \Big(f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\Big). \tag{1}$$

Řekneme, že funkce je *konvexní (konkávní) na otevřeném intervalu I*, má-li tuto vlastnost v každém bodě intervalu I.

Definice (inflexní bod)**.** Bod ve kterém se mění charakter funkce z konvexní na konkávní nebo naopak nazýváme *inflexním bodem* funkce f.

Věta 4 (souvislost druhé derivace s konvexností a konkávností). Buď f funkce mající druhou derivaci na otevřeném intervalu I.

- Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu I, je funkce f konvexní na I.
- Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu I, je funkce f konkávní na I.

Definice (kritický bod). Bod, ve kterém má funkce f nulovou druhou derivaci nazýváme *kritickým bodem* funkce f.

Věta 5 (souvislost inflexních bodů a druhé derivace). Nechť má funkce v bodě x_0 inflexní bod. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá druhou derivaci, nebo je tato druhá derivace nulová, tj. platí $f''(x_0) = 0$ a x_0 je kritickým bodem funkce f.

Věta 6 (souvislost druhé derivace s lokálními extrémy). Buď f funkce a x_0 stacionární bod funkce f. Je-li $f''(x_0) > 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního minima, je-li $f''(x_0) < 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního maxima.

Věta 4 (souvislost druhé derivace s konvexností a konkávností). Buď f funkce mající druhou derivaci na otevřeném intervalu I.

- Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu I, je funkce f konvexní na I.
- Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu I, je funkce f konkávní na I.

Definice (kritický bod). Bod, ve kterém má funkce f nulovou druhou derivaci nazýváme *kritickým bodem* funkce f.

Věta 5 (souvislost inflexních bodů a druhé derivace). Nechť má funkce v bodě x_0 inflexní bod. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá druhou derivaci, nebo je tato druhá derivace nulová, tj. platí $f''(x_0) = 0$ a x_0 je kritickým bodem funkce f.

Věta 6 (souvislost druhé derivace s lokálními extrémy). Buď f funkce a x_0 stacionární bod funkce f. Je-li $f''(x_0) > 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního minima, je-li $f''(x_0) < 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního maxima.

Věta 4 (souvislost druhé derivace s konvexností a konkávností). Buď f funkce mající druhou derivaci na otevřeném intervalu I.

- Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu I, je funkce f konvexní na I.
- Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu I, je funkce f konkávní na I.

Definice (kritický bod). Bod, ve kterém má funkce f nulovou druhou derivaci nazýváme *kritickým bodem* funkce f.

Věta 5 (souvislost inflexních bodů a druhé derivace). Nechť má funkce v bodě x_0 inflexní bod. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá druhou derivaci, nebo je tato druhá derivace nulová, tj. platí $f''(x_0) = 0$ a x_0 je kritickým bodem funkce f.

Věta 6 (souvislost druhé derivace s lokálními extrémy). Buď f funkce a x_0 stacionární bod funkce f. Je-li $f''(x_0) > 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního minima, je-li $f''(x_0) < 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního maxima.

Věta 4 (souvislost druhé derivace s konvexností a konkávností). Buď f funkce mající druhou derivaci na otevřeném intervalu I.

- Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu I, je funkce f konvexní na I.
- Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu I, je funkce f konkávní na I.

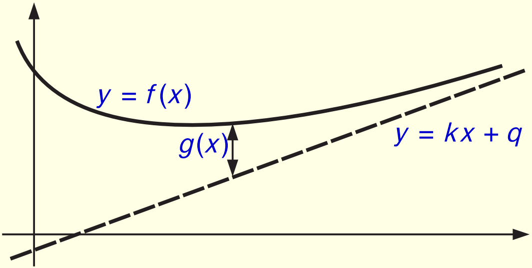
Definice (kritický bod). Bod, ve kterém má funkce f nulovou druhou derivaci nazýváme *kritickým bodem* funkce f.

Věta 5 (souvislost inflexních bodů a druhé derivace). Nechť má funkce v bodě x_0 inflexní bod. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá druhou derivaci, nebo je tato druhá derivace nulová, tj. platí $f''(x_0) = 0$ a x_0 je kritickým bodem funkce f.

Věta 6 (souvislost druhé derivace s lokálními extrémy). Buď f funkce a x_0 stacionární bod funkce f. Je-li $f''(x_0) > 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního minima, je-li $f''(x_0) < 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního maxima.

3 Okolí nevlastních bodů.

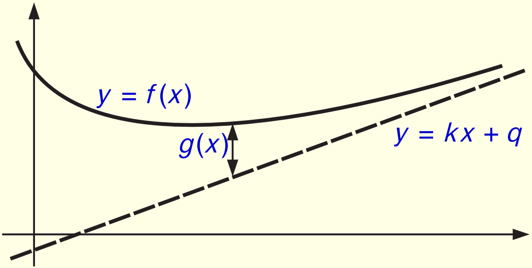
Již známe dva druhy asymptot.



Definice (asymptota se směrnicí). Buď f funkce definovaná v nějakém okolí bodu ∞. Přímka $y = kx + q$ se nazývá *asymptota se směrnicí ke grafu funkce* $y = f(x)$, jestliže platí

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} |kx + q - f(x)| = 0}$$

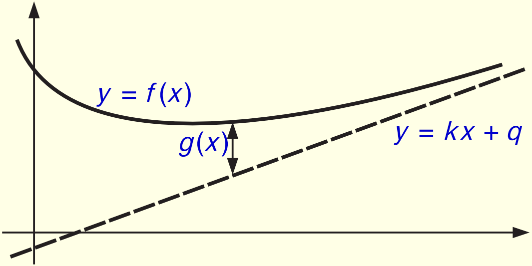
Podobně, zaměníme-li bod ∞ za bod $-\infty$, obdržíme definici asymptoty se směrnicí ke grafu funkce f v bodě $-\infty$.



Definice (asymptota se směrnicí). Buď f funkce definovaná v nějakém okolí bodu ∞. Přímka $y = kx + q$ se nazývá *asymptota se směrnicí ke grafu funkce* $y = f(x)$, jestliže platí

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} |kx + q - f(x)| = 0}$$

Podobně, zaměníme-li bod ∞ za bod $-\infty$, obdržíme definici asymptoty se směrnicí ke grafu funkce f v bodě $-\infty$.



Definice (asymptota se směrnicí). Buď f funkce definovaná v nějakém okolí bodu ∞. Přímka $y = kx + q$ se nazývá *asymptota se směrnicí ke grafu funkce* $y = f(x)$, jestliže platí

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} |kx + q - f(x)| = 0}$$

Podobně, zaměníme-li bod ∞ za bod $-\infty$, obdržíme definici asymptoty se směrnicí ke grafu funkce f v bodě $-\infty$.

Věta 7 (asymptota se směrnicí). Buď f funkce definovaná v nějakém okolí bodu ∞. Přímka $y = kx + q$ je asymptota se směrnicí ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $+\infty$ právě tehdy, když existují konečné limity

$$\boxed{k := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \text{a} \quad \boxed{q := \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)}.$$

Podobně, zaměníme-li bod ∞ za bod $-\infty$, obdržíme asymptotu se směrnicí ke grafu funkce f v bodě $-\infty$.

Věta 8 (asymptoty racionální funkce). Asymptoty se směrnicí ke grafu racionální funkce v bodech $\pm\infty$ existují současně a jsou stejné.

Poznámka 3. Polynom stupně alespoň 2 nemá asymptoty.

Věta 7 (asymptota se směrnicí). Buď f funkce definovaná v nějakém okolí bodu ∞. Přímka $y = kx + q$ je asymptota se směrnicí ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $+\infty$ právě tehdy, když existují konečné limity

$$\boxed{k := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}} \qquad \text{a} \qquad \boxed{q := \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)}.$$

Podobně, zaměníme-li bod ∞ za bod $-\infty$, obdržíme asymptotu se směrnicí ke grafu funkce f v bodě $-\infty$.

Věta 8 (asymptoty racionální funkce). Asymptoty se směrnicí ke grafu racionální funkce v bodech $\pm\infty$ existují současně a jsou stejné.

Poznámka 3. Polynom stupně alespoň 2 nemá asymptoty.

4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme definiční obor funkce, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Asymptoty, chování funkce v okolí bodů nespojitosti.
3. První derivace, stacionární body, intervaly růstu a klesání a lokální extrémy.
4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.
5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a načrtneme graf.

4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme definiční obor funkce, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Asymptoty, chování funkce v okolí bodů nespojitosti.
3. První derivace, stacionární body, intervaly růstu a klesání a lokální extrémy.
4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.
5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a načrtneme graf.

4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme definiční obor funkce, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Asymptoty, chování funkce v okolí bodů nespojitosti.
3. První derivace, stacionární body, intervaly růstu a klesání a lokální extrémy.
4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.
5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a načrtneme graf.

4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme definiční obor funkce, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Asymptoty, chování funkce v okolí bodů nespojitosti.
3. První derivace, stacionární body, intervaly růstu a klesání a lokální extrémy.
4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.
5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a načrtneme graf.

4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme definiční obor funkce, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.

2. Asymptoty, chování funkce v okolí bodů nespojitosti.

3. První derivace, stacionární body, intervaly růstu a klesání a lokální extrémy.

4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.

5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a načrtneme graf.

4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme definiční obor funkce, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Asymptoty, chování funkce v okolí bodů nespojitosti.
3. První derivace, stacionární body, intervaly růstu a klesání a lokální extrémy.
4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.
5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a načrtneme graf.