# Derivace a průběh funkce.

Robert Mařík

14. října 2008

## Obsah

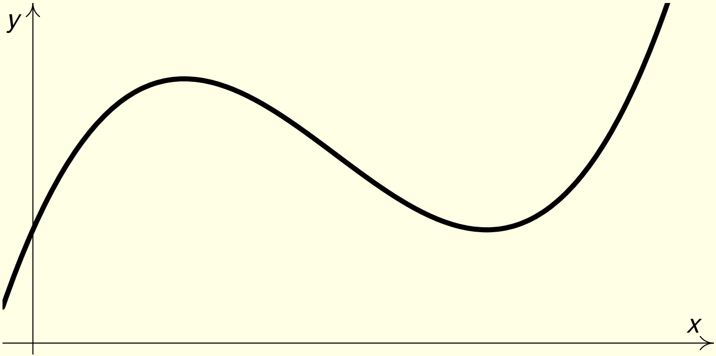
1 Základní myšlenky. 2

2 Přesné věty a definice 10

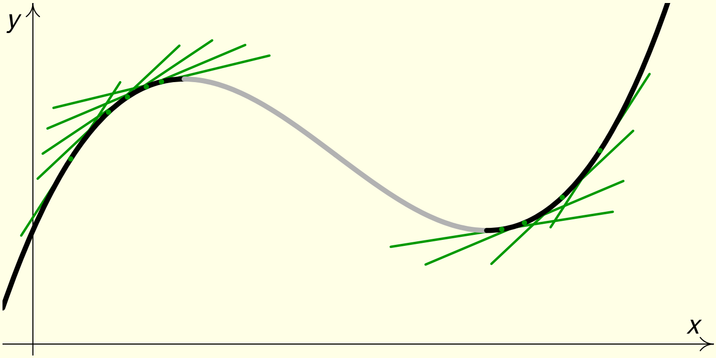
3 Okolí nevlastních bodů. 16

4 Sestrojení grafu funkce. 19

# 1 Základní myšlenky.



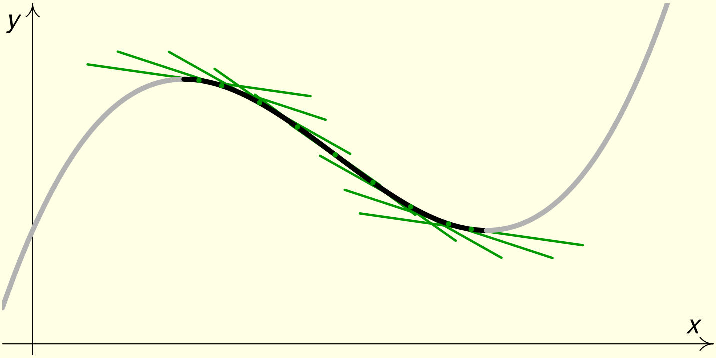

Uvažujme následující funkci.



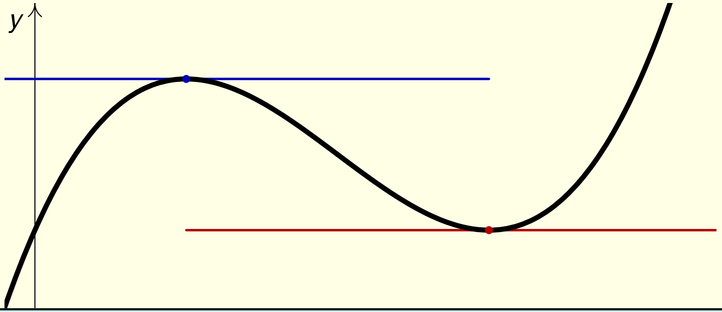

**Derivace je kladná** (= směrnice tečny je kladná)

⇒ tečna je rostoucí

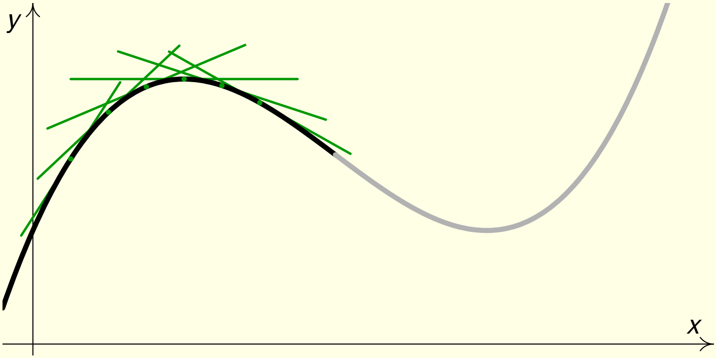
⇒ **funkce je rostoucí**.




**Derivace je záporná** (= směrnice tečny je záporná)
⇒ tečna je klesající
⇒ **funkce je klesající.**



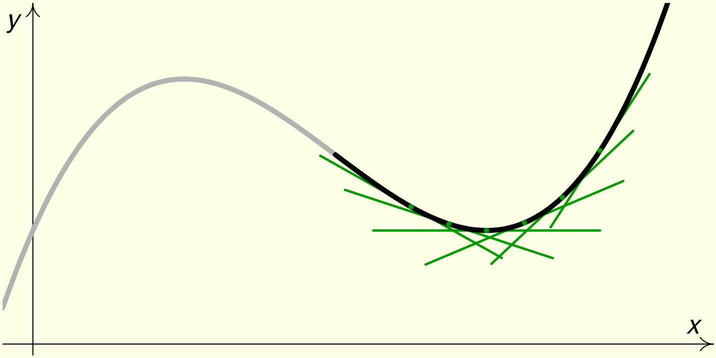

- Lokální maximum (bod, v jehož okolí není žádná vyšší funkční hodnota) má spojitá funkce v bodě, kde se mění z rostoucí na klesající.
- Lokální minimum (bod, v jehož okolí není žádná nižší funkční hodnota) má spojitá funkce v bodě, kde se mění z klesající na rostoucí.
- Je-li derivace nenulová, funkce nedosahuje lokálního extrému. **Je-li v bodě lokální extrém, pak je derivace buď nulová (=: stacionární bod) nebo derivace neexistuje**.



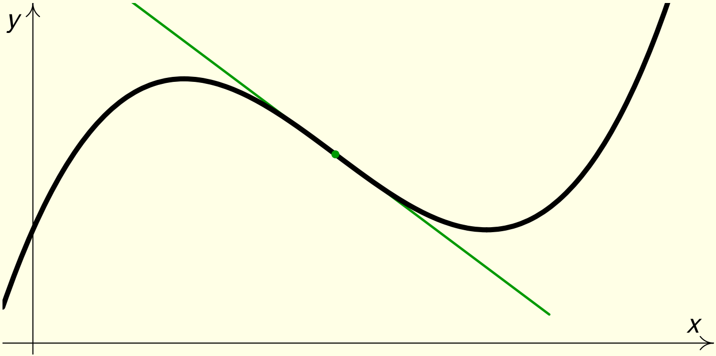

$\boxed{y'' < 0}$ ($y'$ má zápornou derivaci a tedy klesá)

$\Rightarrow$ růst se zpomaluje a případně se mění na pokles; pokles se zrychluje

$\Rightarrow$ funkce je v okolí bodu dotyku **pod tečnou** (**=: konkávní**)




$\boxed{y'' > 0}$ ($y'$ má kladnou derivaci a tedy roste)
⇒ růst se zrychluje; pokles zpomaluje a případně se mění na růst
⇒ funkce je v okolí bodu dotyku **nad tečnou** (**=: konvexní**)




Konvexnost se změní na konkavitu, nebo naopak, (=: **funkce má inflexní bod**) jedině v bodě, kde se změní znaménko druhé derivace, tj. jedině **v bodě, kde je druhá derivace nulová, nebo kde** má bod nespojitosti (a potom **druhá derivace neexistuje**). V inflexním bodě je nárůst nebo pokles funkčních hodnot nejrychlejší nebo nejpomalejší.

# 2 Přesné věty a definice

**Definice** (lokální extrém). Buď $f$ funkce a $x_0 \in Dom(f)$.

- Řekneme, že funkce má v bodě $x_0$ *lokální maximum*, jestliže existuje ryzí okolí $\overline{O}(x_0)$, takové, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro všechna $x \in \overline{O}(x_0)$. Je-li nerovnost ostrá, říkáme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ *ostré lokální maximum*.
- Platí-li opačné nerovnosti, říkáme, že funkce má v bodě $x_0$ *lokální minimum* a *ostré lokální minimum*.
- Lokální maximum a minimum nazýváme společným názvem *lokální extrémy*. Ostré lokální maximum a ostré lokální minimum nazýváme společným názvem *ostré lokální extrémy*.

**Definice** (lokální extrém). Buď $f$ funkce a $x_0 \in Dom(f)$.

- Řekneme, že funkce má v bodě $x_0$ *lokální maximum*, jestliže existuje ryzí okolí $\overline{O}(x_0)$, takové, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro všechna $x \in \overline{O}(x_0)$. Je-li nerovnost ostrá, říkáme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ *ostré lokální maximum*.
- Platí-li opačné nerovnosti, říkáme, že funkce má v bodě $x_0$ *lokální minimum* a *ostré lokální minimum*.
- Lokální maximum a minimum nazýváme společným názvem *lokální extrémy*. Ostré lokální maximum a ostré lokální minimum nazýváme společným názvem *ostré lokální extrémy*.

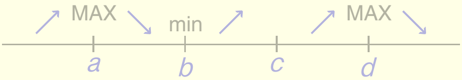
**Definice** (lokální extrém). Buď $f$ funkce a $x_0 \in Dom(f)$.

- Řekneme, že funkce má v bodě $x_0$ *lokální maximum*, jestliže existuje ryzí okolí $\overline{O}(x_0)$, takové, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro všechna $x \in \overline{O}(x_0)$. Je-li nerovnost ostrá, říkáme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ *ostré lokální maximum*.
- Platí-li opačné nerovnosti, říkáme, že funkce má v bodě $x_0$ *lokální minimum* a *ostré lokální minimum*.
- Lokální maximum a minimum nazýváme společným názvem *lokální extrémy*. Ostré lokální maximum a ostré lokální minimum nazýváme společným názvem *ostré lokální extrémy*.

**Věta 1** (postačující podmínky pro existenci a neexistenci lokálních extrémů). Buď $f$ funkce definovaná a spojitá v nějakém okolí bodu $x_0$.

- Jestliže existuje levé okolí bodu $x_0$, ve kterém je funkce rostoucí a pravé okolí bodu $x_0$, ve kterém je funkce klesající, je bod $x_0$ bodem ostrého lokálního maxima funkce $f$.
- Jestliže existuje levé okolí bodu $x_0$, ve kterém je funkce klesající a pravé okolí bodu $x_0$, ve kterém je funkce rostoucí, je bod $x_0$ bodem ostrého lokálního minima funkce $f$.
- Jestliže existuje okolí bodu $x_0$ ve kterém je funkce ryze monotonní, lokální extrém v bodě $x_0$ nenastává.

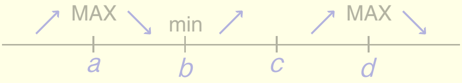
**Poznámka 1.** Graficky můžeme předchozí větu ilustrovat následovně.



**Věta 1** (postačující podmínky pro existenci a neexistenci lokálních extrémů). Buď $f$ funkce definovaná a spojitá v nějakém okolí bodu $x_0$.

- Jestliže existuje levé okolí bodu $x_0$, ve kterém je funkce rostoucí a pravé okolí bodu $x_0$, ve kterém je funkce klesající, je bod $x_0$ bodem ostrého lokálního maxima funkce $f$.
- Jestliže existuje levé okolí bodu $x_0$, ve kterém je funkce klesající a pravé okolí bodu $x_0$, ve kterém je funkce rostoucí, je bod $x_0$ bodem ostrého lokálního minima funkce $f$.
- Jestliže existuje okolí bodu $x_0$ ve kterém je funkce ryze monotonní, lokální extrém v bodě $x_0$ nenastává.

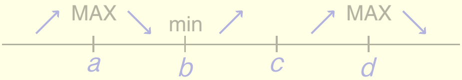
**Poznámka 1.** Graficky můžeme předchozí větu ilustrovat následovně.



**Věta 1** (postačující podmínky pro existenci a neexistenci lokálních extrémů). Buď $f$ funkce definovaná a spojitá v nějakém okolí bodu $x_0$.

- Jestliže existuje levé okolí bodu $x_0$, ve kterém je funkce rostoucí a pravé okolí bodu $x_0$, ve kterém je funkce klesající, je bod $x_0$ bodem ostrého lokálního maxima funkce $f$.
- Jestliže existuje levé okolí bodu $x_0$, ve kterém je funkce klesající a pravé okolí bodu $x_0$, ve kterém je funkce rostoucí, je bod $x_0$ bodem ostrého lokálního minima funkce $f$.
- Jestliže existuje okolí bodu $x_0$ ve kterém je funkce ryze monotonní, lokální extrém v bodě $x_0$ nenastává.

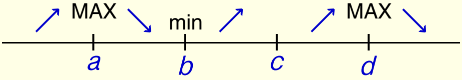
**Poznámka 1.** Graficky můžeme předchozí větu ilustrovat následovně.



**Věta 1** (postačující podmínky pro existenci a neexistenci lokálních extrémů). Buď $f$ funkce definovaná a spojitá v nějakém okolí bodu $x_0$.

- Jestliže existuje levé okolí bodu $x_0$, ve kterém je funkce rostoucí a pravé okolí bodu $x_0$, ve kterém je funkce klesající, je bod $x_0$ bodem ostrého lokálního maxima funkce $f$.
- Jestliže existuje levé okolí bodu $x_0$, ve kterém je funkce klesající a pravé okolí bodu $x_0$, ve kterém je funkce rostoucí, je bod $x_0$ bodem ostrého lokálního minima funkce $f$.
- Jestliže existuje okolí bodu $x_0$ ve kterém je funkce ryze monotonní, lokální extrém v bodě $x_0$ nenastává.

**Poznámka 1.** Graficky můžeme předchozí větu ilustrovat následovně.



**Věta 2 (souvislost derivace a monotonie).** Nechť funkce $f$ má derivaci na otevřeném intervalu $I$.

- Je-li $f'(x) > 0$ na intervalu $I$, je funkce $f$ rostoucí na $I$.
- Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu $I$, je funkce $f$ klesající na $I$.

**Definice (stacionární bod).** Řekneme, že bod $x_0$ je *stacionárním bodem* funkce $f$, jestliže funkce $f$ má v bodě $x_0$ nulovou derivaci, tj. $f'(x_0) = 0$.

**Poznámka 2 (geometrický význam).** Geometricky jsou stacionární body body, ve kterých má graf funkce vodorovnou tečnu (proč?).

**Věta 3 (souvislost derivace a lokálních extrémů).** Nechť má funkce v bodě $x_0$ lokální extrém. Pak funkce $f$ v bodě $x_0$ buď nemá derivaci, nebo je tato derivace nulová, tj. platí $f'(x_0) = 0$ a $x_0$ je stacionárním bodem funkce $f$.

**Věta 2** (souvislost derivace a monotonie)**.** Nechť funkce $f$ má derivaci na otevřeném intervalu $I$.

- Je-li $f'(x) > 0$ na intervalu $I$, je funkce $f$ rostoucí na $I$.
- Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu $I$, je funkce $f$ klesající na $I$.

**Definice** (stacionární bod)**.** Řekneme, že bod $x_0$ je *stacionárním bodem* funkce $f$, jestliže funkce $f$ má v bodě $x_0$ nulovou derivaci, tj. $f'(x_0) = 0$.

**Poznámka 2** (geometrický význam)**.** Geometricky jsou stacionární body body, ve kterých má graf funkce vodorovnou tečnu (proč?).

**Věta 3** (souvislost derivace a lokálních extrémů)**.** Nechť má funkce v bodě $x_0$ lokální extrém. Pak funkce $f$ v bodě $x_0$ buď nemá derivaci, nebo je tato derivace nulová, tj. platí $f'(x_0) = 0$ a $x_0$ je stacionárním bodem funkce $f$.

**Věta 2** (souvislost derivace a monotonie). Nechť funkce $f$ má derivaci na otevřeném intervalu $I$.

- Je-li $f'(x) > 0$ na intervalu $I$, je funkce $f$ rostoucí na $I$.
- Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu $I$, je funkce $f$ klesající na $I$.

**Definice** (stacionární bod). Řekneme, že bod $x_0$ je *stacionárním bodem* funkce $f$, jestliže funkce $f$ má v bodě $x_0$ nulovou derivaci, tj. $f'(x_0) = 0$.

**Poznámka 2** (geometrický význam). Geometricky jsou stacionární body body, ve kterých má graf funkce vodorovnou tečnu (proč?).

**Věta 3** (souvislost derivace a lokálních extrémů). Nechť má funkce v bodě $x_0$ lokální extrém. Pak funkce $f$ v bodě $x_0$ buď nemá derivaci, nebo je tato derivace nulová, tj. platí $f'(x_0) = 0$ a $x_0$ je stacionárním bodem funkce $f$.

**Věta 2** (souvislost derivace a monotonie). Nechť funkce $f$ má derivaci na otevřeném intervalu $I$.

- Je-li $f'(x) > 0$ na intervalu $I$, je funkce $f$ rostoucí na $I$.
- Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu $I$, je funkce $f$ klesající na $I$.

**Definice** (stacionární bod). Řekneme, že bod $x_0$ je *stacionárním bodem* funkce $f$, jestliže funkce $f$ má v bodě $x_0$ nulovou derivaci, tj. $f'(x_0) = 0$.

**Poznámka 2** (geometrický význam). Geometricky jsou stacionární body body, ve kterých má graf funkce vodorovnou tečnu (proč?).

**Věta 3** (souvislost derivace a lokálních extrémů). Nechť má funkce v bodě $x_0$ lokální extrém. Pak funkce $f$ v bodě $x_0$ buď nemá derivaci, nebo je tato derivace nulová, tj. platí $f'(x_0) = 0$ a $x_0$ je stacionárním bodem funkce $f$.

**Definice** (konvexnost, konkávnost). Buď $f$ funkce mající derivaci v bodě $x_0$. Řekneme, že funkce $f$ je v bodě $x_0$ *konvexní (konkávní)*, jestliže existuje ryzí okolí bodu $x_0$ takové, že pro všechna $x \in \overline{O}(x_0)$ leží body grafu funkce nad tečnou (pod tečnou) ke grafu funkce $f$ sestrojenou v bodě $x_0$, tj. platí

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \Big(f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\Big). \tag{1}$$

Řekneme, že funkce je *konvexní (konkávní) na otevřeném intervalu $I$*, má-li tuto vlastnost v každém bodě intervalu $I$.

**Definice** (inflexní bod). Bod ve kterém se mění charakter funkce z konvexní na konkávní nebo naopak nazýváme *inflexním bodem* funkce $f$.

**Věta 4 (souvislost druhé derivace s konvexností a konkávností).** Buď $f$ funkce mající druhou derivaci na otevřeném intervalu $I$.

- Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu $I$, je funkce $f$ konvexní na $I$.
- Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu $I$, je funkce $f$ konkávní na $I$.

**Definice (kritický bod).** Bod, ve kterém má funkce $f$ nulovou druhou derivaci nazýváme *kritickým bodem* funkce $f$.

**Věta 5 (souvislost inflexních bodů a druhé derivace).** Nechť má funkce v bodě $x_0$ inflexní bod. Pak funkce $f$ v bodě $x_0$ buď nemá druhou derivaci, nebo je tato druhá derivace nulová, tj. platí $f''(x_0) = 0$ a $x_0$ je kritickým bodem funkce $f$.

**Věta 6 (souvislost druhé derivace s lokálními extrémy).** Buď $f$ funkce a $x_0$ stacionární bod funkce $f$. Je-li $f''(x_0) > 0$, nabývá funkce v bodě $x_0$ lokálního minima, je-li $f''(x_0) < 0$, nabývá funkce v bodě $x_0$ lokálního maxima.

**Věta 4 (souvislost druhé derivace s konvexností a konkávností).** Buď $f$ funkce mající druhou derivaci na otevřeném intervalu $I$.

- Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu $I$, je funkce $f$ konvexní na $I$.
- Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu $I$, je funkce $f$ konkávní na $I$.

**Definice (kritický bod).** Bod, ve kterém má funkce $f$ nulovou druhou derivaci nazýváme *kritickým bodem* funkce $f$.

**Věta 5 (souvislost inflexních bodů a druhé derivace).** Nechť má funkce v bodě $x_0$ inflexní bod. Pak funkce $f$ v bodě $x_0$ buď nemá druhou derivaci, nebo je tato druhá derivace nulová, tj. platí $f''(x_0) = 0$ a $x_0$ je kritickým bodem funkce $f$.

**Věta 6 (souvislost druhé derivace s lokálními extrémy).** Buď $f$ funkce a $x_0$ stacionární bod funkce $f$. Je-li $f''(x_0) > 0$, nabývá funkce v bodě $x_0$ lokálního minima, je-li $f''(x_0) < 0$, nabývá funkce v bodě $x_0$ lokálního maxima.

**Věta 4 (souvislost druhé derivace s konvexností a konkávností).** Buď $f$ funkce mající druhou derivaci na otevřeném intervalu $I$.

- Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu $I$, je funkce $f$ konvexní na $I$.
- Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu $I$, je funkce $f$ konkávní na $I$.

**Definice (kritický bod).** Bod, ve kterém má funkce $f$ nulovou druhou derivaci nazýváme *kritickým bodem* funkce $f$.

**Věta 5 (souvislost inflexních bodů a druhé derivace).** Nechť má funkce v bodě $x_0$ inflexní bod. Pak funkce $f$ v bodě $x_0$ buď nemá druhou derivaci, nebo je tato druhá derivace nulová, tj. platí $f''(x_0) = 0$ a $x_0$ je kritickým bodem funkce $f$.

**Věta 6 (souvislost druhé derivace s lokálními extrémy).** Buď $f$ funkce a $x_0$ stacionární bod funkce $f$. Je-li $f''(x_0) > 0$, nabývá funkce v bodě $x_0$ lokálního minima, je-li $f''(x_0) < 0$, nabývá funkce v bodě $x_0$ lokálního maxima.

**Věta 4 (souvislost druhé derivace s konvexností a konkávností).** Buď $f$ funkce mající druhou derivaci na otevřeném intervalu $I$.

- Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu $I$, je funkce $f$ konvexní na $I$.
- Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu $I$, je funkce $f$ konkávní na $I$.

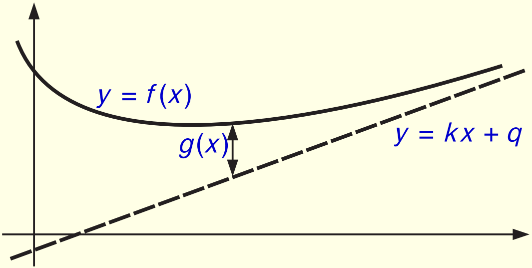
**Definice (kritický bod).** Bod, ve kterém má funkce $f$ nulovou druhou derivaci nazýváme *kritickým bodem* funkce $f$.

**Věta 5 (souvislost inflexních bodů a druhé derivace).** Nechť má funkce v bodě $x_0$ inflexní bod. Pak funkce $f$ v bodě $x_0$ buď nemá druhou derivaci, nebo je tato druhá derivace nulová, tj. platí $f''(x_0) = 0$ a $x_0$ je kritickým bodem funkce $f$.

**Věta 6 (souvislost druhé derivace s lokálními extrémy).** Buď $f$ funkce a $x_0$ stacionární bod funkce $f$. Je-li $f''(x_0) > 0$, nabývá funkce v bodě $x_0$ lokálního minima, je-li $f''(x_0) < 0$, nabývá funkce v bodě $x_0$ lokálního maxima.

# 3 Okolí nevlastních bodů.

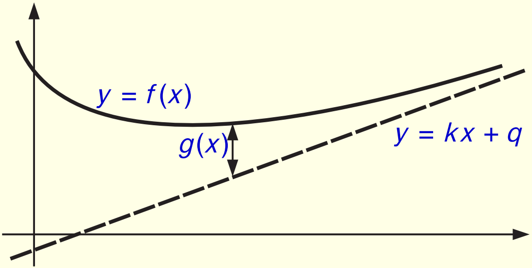
Již známe dva druhy asymptot.




**Definice (asymptota se směrnicí).** Buď $f$ funkce definovaná v nějakém okolí bodu $\infty$. Přímka $y = kx + q$ se nazývá *asymptota se směrnicí ke grafu funkce* $y = f(x)$, jestliže platí

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} |kx + q - f(x)| = 0}$$

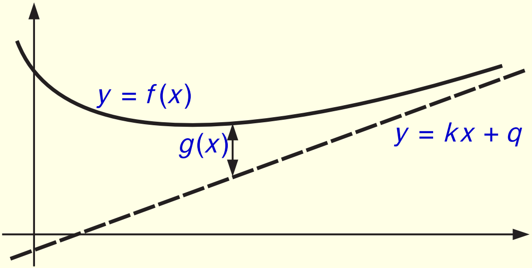
Podobně, zaměníme-li bod $\infty$ za bod $-\infty$, obdržíme definici asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $f$ v bodě $-\infty$.




**Definice** (asymptota se směrnicí). Buď $f$ funkce definovaná v nějakém okolí bodu $\infty$. Přímka $y = kx + q$ se nazývá *asymptota se směrnicí ke grafu funkce* $y = f(x)$, jestliže platí

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} |kx + q - f(x)| = 0}$$

Podobně, zaměníme-li bod $\infty$ za bod $-\infty$, obdržíme definici asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $f$ v bodě $-\infty$.




**Definice** (asymptota se směrnicí). Buď $f$ funkce definovaná v nějakém okolí bodu $\infty$. Přímka $y = kx + q$ se nazývá *asymptota se směrnicí ke grafu funkce* $y = f(x)$, jestliže platí

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} |kx + q - f(x)| = 0}$$

Podobně, zaměníme-li bod $\infty$ za bod $-\infty$, obdržíme definici asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $f$ v bodě $-\infty$.

**Věta 7 (asymptota se směrnicí).** Buď $f$ funkce definovaná v nějakém okolí bodu $\infty$. Přímka $y = kx + q$ je asymptota se směrnicí ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $+\infty$ právě tehdy, když existují konečné limity

$$\boxed{k := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \text{a} \quad \boxed{q := \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)}.$$

Podobně, zaměníme-li bod $\infty$ za bod $-\infty$, obdržíme asymptotu se směrnicí ke grafu funkce $f$ v bodě $-\infty$.

**Věta 8 (asymptoty racionální funkce).** Asymptoty se směrnicí ke grafu racionální funkce v bodech $\pm\infty$ existují současně a jsou stejné.

**Poznámka 3.** Polynom stupně alespoň $2$ nemá asymptoty.

**Věta 7 (asymptota se směrnicí).** Buď $f$ funkce definovaná v nějakém okolí bodu $\infty$. Přímka $y = kx + q$ je asymptota se směrnicí ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $+\infty$ právě tehdy, když existují konečné limity

$$\boxed{k := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \text{a} \quad \boxed{q := \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)}.$$

Podobně, zaměníme-li bod $\infty$ za bod $-\infty$, obdržíme asymptotu se směrnicí ke grafu funkce $f$ v bodě $-\infty$.

**Věta 8 (asymptoty racionální funkce).** Asymptoty se směrnicí ke grafu racionální funkce v bodech $\pm\infty$ existují současně a jsou stejné.

**Poznámka 3.** Polynom stupně alespoň $2$ nemá asymptoty.

# 4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme definiční obor funkce, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Asymptoty, chování funkce v okolí bodů nespojitosti.
3. První derivace, stacionární body, intervaly růstu a klesání a lokální extrémy.
4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.
5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a načrtneme graf.

# 4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme definiční obor funkce, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Asymptoty, chování funkce v okolí bodů nespojitosti.
3. První derivace, stacionární body, intervaly růstu a klesání a lokální extrémy.
4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.
5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a načrtneme graf.

# 4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme definiční obor funkce, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.

2. Asymptoty, chování funkce v okolí bodů nespojitosti.

3. První derivace, stacionární body, intervaly růstu a klesání a lokální extrémy.

4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.

5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a načrtneme graf.

# 4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme definiční obor funkce, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Asymptoty, chování funkce v okolí bodů nespojitosti.
3. První derivace, stacionární body, intervaly růstu a klesání a lokální extrémy.
4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.
5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a načrtneme graf.

# 4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme definiční obor funkce, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.
2. Asymptoty, chování funkce v okolí bodů nespojitosti.
3. První derivace, stacionární body, intervaly růstu a klesání a lokální extrémy.
4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.
5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a načrtneme graf.

# 4 Sestrojení grafu funkce.

1. Nalezneme definiční obor funkce, zjistíme paritu funkce a její průsečíky s osami, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.

2. Asymptoty, chování funkce v okolí bodů nespojitosti.

3. První derivace, stacionární body, intervaly růstu a klesání a lokální extrémy.

4. Druhá derivace, kritické body, intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.

5. Asymptoty a charakteristické body (extrémy a inflexní body) zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a načrtneme graf.