Základní elementární funkce

Robert Mařík

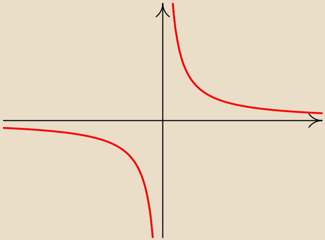
27. června 2006

Abstrakt

V tomto dokumentu jsou uvedeny základní vlastnosti nejdůležitějších základních elementárních funkcí. (Triviální funkce, jako druhá odmocnina a pod. jsou vynechány. Také je vynechán např. kotangens, protože se nejdná o nic jiného než převrácené hodnota tangensu.)

1. Převrácená hodnota $y = \dfrac{1}{x}$

$\mathrm{Dom}(\frac{1}{x}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
$\mathrm{Im}(\frac{1}{x}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
průsečík s osou x ani y není



$\frac{1}{x}$ je funkce, která je prostá, není ohraničená ani monotonní, skládá se však ze dvou větví, z nichž každá je (sama o sobě) klesající. Funkce má svislou asymptotu $x = 0$ a vodorovnou asymptotu $y = 0$.

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

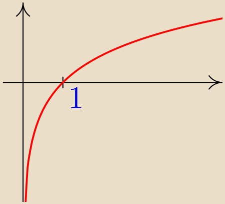
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Tato funkce je inverzní sama k sobě, tj. platí

$$y = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{y}.$$

2. Přirozený logaritmus $y = \ln x$

$\mathrm{Dom}(\ln) = (0, \infty)$,
$\mathrm{Im}(\ln) = \mathbb{R}$,
průsečík s osou x: $x = 1$



$\ln$ je funkce, která je rostoucí, konkávní a prostá, má svislou asymptotu $x = 0$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$$

$\ln 1 = 0$,
$\ln e = 1$,
$\ln e^x = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$

$$\ln(0+) = \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$
$$\ln \infty = \lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$$

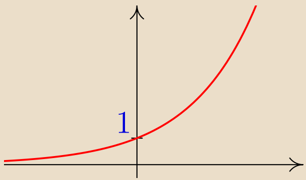
Inverzní funkcí je exponenciální funkce $y = e^x$. Tedy

$$y = \ln x \iff e^y = x.$$

Robert Mařík – Funkce

3. Exponenciální funkce $y = e^x$

$\mathrm{Dom}(\exp) = \mathbb{R}$,
$\mathrm{Im}(\exp) = (0, \infty)$,
nemá průsečík s osou x,
průsečík s osou y je $y = 1$



$\exp$ je funkce, která je rostoucí, ohraničená zdola a konvexní. Má vodorovnou asymptotu $y = 0$ v $-\infty$

$(e^x)' = e^x$

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$$

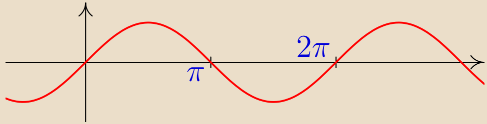
$e^0 = 1$,
$e^{\ln x} = x$ pro všechna $x > 0$
$e^{-\infty} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
$e^{\infty} = \lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$

Inverzní funkcí je funkce $y = \ln x$. Tedy

$$y = e^x \iff \ln(y) = x.$$

$\frac{1}{x}$
$\ln x$
e^x
$\sin x$
$\arcsin x$
$\cos x$
$\arccos x$
$\mathrm{tg}\, x$
$\mathrm{arctg}\, x$
Důležité vzorce
Home Page
Print
Title Page
Page 4 of 11
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4. Sinus $y = \sin x$



$\mathrm{Dom}(\sin) = \mathbb{R}$,
$\mathrm{Im}(\sin) = [-1, 1]$,
$\sin$ je ohraničená, lichá, 2π-periodická funkce
průsečíky s osou x jsou čísla tvaru $x = k\pi$, kde k je libovolné celé číslo.

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x$ neexistuje

Funkce $\sin$ není prostá, je však prostá například na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a na tomto intervalu má inverzní funkci $y = \arcsin x$. Tedy

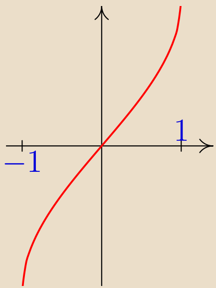
$$y = \sin x \iff \arcsin y = x.$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Home Page
Print
Title Page
Page 5 of 11
Go Back
Full Screen
Close
Quit

5. Arkussinus $y = \arcsin x$

$$\mathrm{Dom}(\arcsin) = [-1, 1],$$
$$\mathrm{Im}(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



arcsin je lichá, rostoucí a ohraničená funkce

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

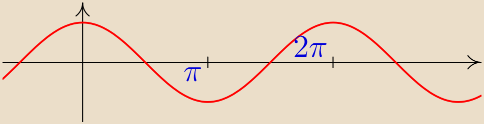
Inverzní funkcí k fucnki arcsin je funkce sin. Tedy

$$y = \arcsin x \iff \sin y = x.$$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Home Page
Print
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 6 of 11
Go Back
Full Screen
Close
Quit

6. Kosinus $y = \cos x$



$\mathrm{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$,
$\mathrm{Im}(\cos) = [-1, 1]$
Průsečíky s osou x jsou čísla tvaru $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde k je celé číslo.
$\cos$ je ohraničená, sudá, 2π-periodická funkce.

$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x$ neexistuje

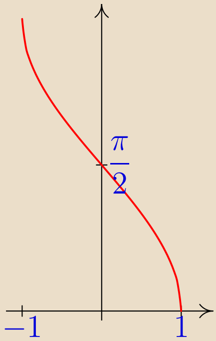
Funkce $\cos$ je prostá pouze například na intervalu $[0, \pi]$ a má zde inverzní funkci $y = \arccos x$. Tedy

$$y = \cos x \iff \arccos y = x.$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

7. Arkuskosinus $y = \arccos x$

$\mathrm{Dom}(\arccos) = [-1, 1]$,
$\mathrm{Im}(\arccos) = [0, \pi]$



arccos je klesající a ohraničená funkce

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Funkce arccos je prostá a její inverze je $y = \cos x$. Tedy

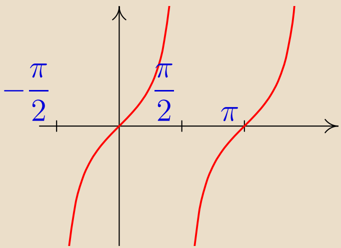
$$y = \arccos x \iff \cos y = x.$$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Home Page
Print
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 8 of 11
Go Back
Full Screen
Close
Quit

8. Tangens $y = \operatorname{tg} x$

$\mathrm{Dom}(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$,
$\mathrm{Im}(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$



$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

průsečíky s osou x jsou stejné jako u funkce sinus.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	undef.

tg je lichá, π-periodická funkce

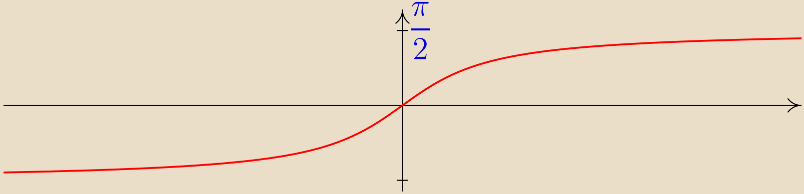
$$(\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

Funkce tg je prostá pouze například na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a má zde inverzní funkci $y = \operatorname{arctg} x$. Tedy

$$y = \operatorname{tg} x \iff \operatorname{arctg} y = x.$$

9. Arkustangens $y = \operatorname{arctg} x$



$\operatorname{Dom}(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$,

$\operatorname{Im}(\operatorname{arctg}) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

průsečíkem s osou x je bod $x = 0$, protože $\operatorname{arctg} 0 = 0$

arctg je rostoucí, prostá a ohraničená funkce

$$\operatorname{arctg} \infty = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Funkce má vodorovnou asymptotu $y = \frac{\pi}{2}$ v $+\infty$ a $y = -\frac{\pi}{2}$ v $-\infty$.

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Funkce arctg je prostá a její inverzní funkcí je funkce $y = \operatorname{tg} x$. Tedy

$$y = \operatorname{arctg} x \iff \operatorname{tg} y = x.$$

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$

$\frac{1}{x}$
$\ln x$
e^x
$\sin x$
$\arcsin x$
$\cos x$
$\arccos x$
$\operatorname{tg} x$
$\operatorname{arctg} x$
Důležité vzorce

Home Page
Print
Title Page
Page 10 of 11
Go Back
Full Screen
Close
Quit

10. Důležité vzorce

$$\ln x + \ln y = \ln(xy)$$
$$\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$$
$$r \ln x = \ln x^r$$

$$e^x e^y = e^{x+y}$$
$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$
$$(e^x)^r = e^{rx}$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$
$$\sin(x) = \sin(\pi - x)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$