

Základní elementární funkce

Robert Mařík

27. června 2006

Abstrakt

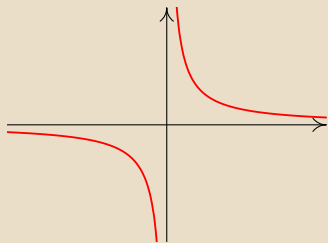
V tomto dokumentu jsou uvedeny základní vlastnosti nejdůležitějších základních elementárních funkcí. (Triviální funkce, jako druhá odmocnina a pod. jsou vynechány. Také je vynechán např. kotangens, protože se nejedná o nic jiného než převrácené hodnota tangensu.)

1. Převrácená hodnota $y = \frac{1}{x}$

$$\text{Dom}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\text{Im}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

průsečík s osou x ani y není



$\frac{1}{x}$ je funkce, která je prostá, není ohraničená ani monotonní, skládá se však ze dvou větví, z nichž každá je (sama o sobě) klesající. Funkce má svislou asymptotu $x = 0$ a vodorovnou asymptotu $y = 0$.

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Tato funkce je inverzní sama k sobě, tj. platí

$$y = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{y}.$$

$\frac{1}{x}$

$\ln x$

e^x

$\sin x$

$\arcsin x$

$\cos x$

$\arccos x$

$\text{tg } x$

$\text{arctg } x$

Důležité vzorce

Home Page

Print

Title Page



Page 2 of 11

Go Back

Full Screen

Close

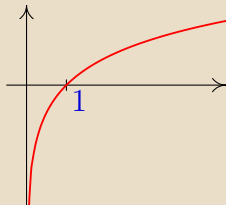
Quit

2. Přirozený logaritmus $y = \ln x$

$$\text{Dom}(\ln) = (0, \infty),$$

$$\text{Im}(\ln) = \mathbb{R},$$

průsečík s osou x : $x = 1$



\ln je funkce, která je rostoucí, konkávní a prostá, má svislou asymptotu $x = 0$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\ln 1 = 0,$$

$$\ln e = 1,$$

$$\ln e^x = x \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(0+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\ln \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$$

Inverzní funkcí je exponenciální funkce $y = e^x$. Tedy

$$y = \ln x \iff e^y = x.$$

$$\frac{1}{x}$$

$$\ln x$$

$$e^x$$

$$\sin x$$

$$\arcsin x$$

$$\cos x$$

$$\arccos x$$

$$\text{tg } x$$

$$\text{arctg } x$$

Důležité vzorce

Home Page

Print

Title Page



Page 3 of 11

Go Back

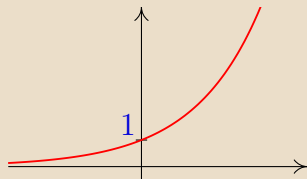
Full Screen

Close

Quit

3. Exponenciální funkce $y = e^x$

$\text{Dom}(\exp) = \mathbb{R}$,
 $\text{Im}(\exp) = (0, \infty)$,
nemá průsečík s osou x ,
průsečík s osou y je $y = 1$



\exp je funkce, která je rostoucí,
ohraničená zdola a konvexní. Má
vodorovnou asymptotu $y = 0$ v
 $-\infty$

$$(e^x)' = e^x$$
$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$e^0 = 1,$$

$$e^{\ln x} = x \text{ pro všechna } x > 0$$

$$e^{-\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$e^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

Inverzní funkcí je funkce $y = \ln x$.

Tedy

$$y = e^x \iff \ln(y) = x.$$

$$\frac{1}{x}$$

$$\ln x$$

$$e^x$$

$$\sin x$$

$$\arcsin x$$

$$\cos x$$

$$\arccos x$$

$$\text{tg } x$$

$$\text{arctg } x$$

Důležité vzorce

Home Page

Print

Title Page



Page 4 of 11

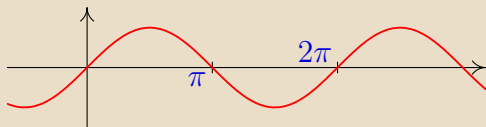
Go Back

Full Screen

Close

Quit

4. Sinus $y = \sin x$



$\text{Dom}(\sin) = \mathbb{R}$,
 $\text{Im}(\sin) = [-1, 1]$,
 \sin je ohraničená, lichá, 2π -
periodická funkce
průsečíky s osou x jsou čísla tvaru
 $x = k\pi$, kde k je libovolné celé
číslo.

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

| | | | | | | | | | |
|----------|---|-----------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------------------|----------------------|------------------|-------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$ neexistuje

Funkce \sin není prostá, je však
prostá například na intervalu
 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a na tomto intervalu má
inverzní funkci $y = \arcsin x$. Tedy

$$y = \sin x \iff \arcsin y = x.$$

$\frac{1}{x}$

$\ln x$

e^x

$\sin x$

$\arcsin x$

$\cos x$

$\arccos x$

$\text{tg } x$

$\text{arctg } x$

Důležité vzorce

Home Page

Print

Title Page



Page 5 of 11

Go Back

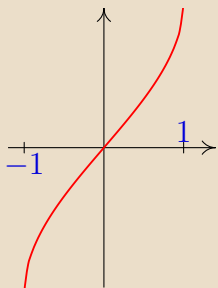
Full Screen

Close

Quit

5. Arkussinus $y = \arcsin x$

$$\text{Dom}(\arcsin) = [-1, 1],$$
$$\text{Im}(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



\arcsin je lichá, rostoucí a ohraničená funkce

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Inverzní funkcí k funkci \arcsin je funkce \sin . Tedy

$$y = \arcsin x \iff \sin y = x.$$

| | | | | | |
|-------------|---|-----------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| x | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\arcsin x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |

 $\frac{1}{x}$ $\ln x$ e^x $\sin x$ $\arcsin x$ $\cos x$ $\arccos x$ $\text{tg } x$ $\text{arctg } x$

Důležité vzorce

Home Page

Print

Title Page



Page 6 of 11

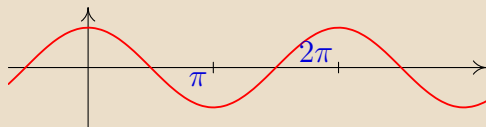
Go Back

Full Screen

Close

Quit

6. Kosinus $y = \cos x$



$\text{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$,
 $\text{Im}(\cos) = [-1, 1]$
Průsečíky s osou x jsou čísla tvaru
 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde k je celé číslo.
 \cos je ohraničená, sudá, 2π -
periodická funkce.

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

| | | | | | | | | | |
|----------|---|----------------------|----------------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------------|-----------------------|-------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$ neexistuje

Funkce \cos je prostá pouze například na intervalu $[0, \pi]$ a má zde inverzní funkci $y = \arccos x$. Tedy

$$y = \cos x \iff \arccos y = x.$$

$\frac{1}{x}$

$\ln x$

e^x

$\sin x$

$\arcsin x$

$\cos x$

$\arccos x$

$\text{tg } x$

$\text{arctg } x$

Důležité vzorce

Home Page

Print

Title Page



Page 7 of 11

Go Back

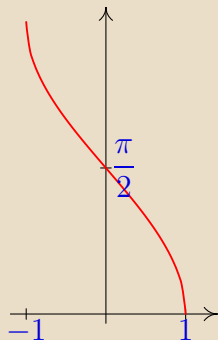
Full Screen

Close

Quit

7. Arkuskosinus $y = \arccos x$

$$\text{Dom}(\arccos) = [-1, 1],$$
$$\text{Im}(\arccos) = [0, \pi]$$



\arccos je klesající a ohraničená funkce

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Funkce \arccos je prostá a její inverze je $y = \cos x$. Tedy

$$y = \arccos x \iff \cos y = x.$$

| | | | | | |
|-------------|-----------------|-----------------|----------------------|----------------------|---|
| x | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\arccos x$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | 0 |

$\frac{1}{x}$

$\ln x$

e^x

$\sin x$

$\arcsin x$

$\cos x$

$\arccos x$

$\text{tg } x$

$\text{arctg } x$

Důležité vzorce

Home Page

Print

Title Page



Page 8 of 11

Go Back

Full Screen

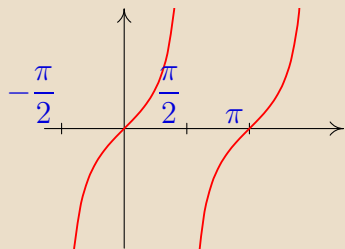
Close

Quit

8. Tangens $y = \operatorname{tg} x$

$$\operatorname{Dom}(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$\operatorname{Im}(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$$



$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

průsečíky s osou x jsou stejné jako u funkce sinus.

| | | | | | |
|-----------------------|---|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\operatorname{tg} x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | undef. |

tg je lichá, π -periodická funkce

$$(\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

Funkce tg je prostá pouze například na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a má zde inverzní funkci $y = \operatorname{arctg} x$. Tedy

$$y = \operatorname{tg} x \iff \operatorname{arctg} y = x.$$

$\frac{1}{x}$

$\ln x$

e^x

$\sin x$

$\arcsin x$

$\cos x$

$\arccos x$

$\operatorname{tg} x$

$\operatorname{arctg} x$

Důležité vzorce

Home Page

Print

Title Page



Page 9 of 11

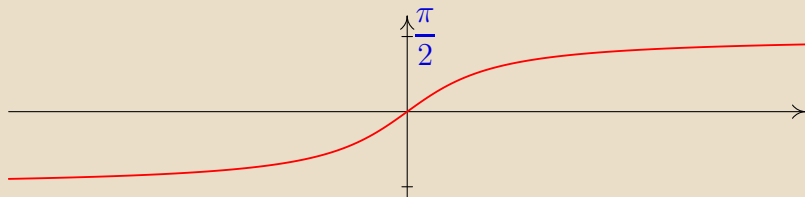
Go Back

Full Screen

Close

Quit

9. Arkustangens $y = \operatorname{arctg} x$



$$\operatorname{Dom}(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R},$$

$$\operatorname{Im}(\operatorname{arctg}) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

průsečíkem s osou x je bod $x = 0$,
protože $\operatorname{arctg} 0 = 0$

arctg je rostoucí, prostá a ohra-
ničená funkce

$$\operatorname{arctg} \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Funkce má vodorovnou asymptotu

$$y = \frac{\pi}{2} \text{ v } +\infty \text{ a } y = -\frac{\pi}{2} \text{ v } -\infty.$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Funkce arctg je prostá a její in-
verzní funkcí je funkce $y = \operatorname{tg} x$.

Tedy

$$y = \operatorname{arctg} x \iff \operatorname{tg} y = x.$$

| | | | | |
|--------------------------|---|----------------------|-----------------|-----------------|
| x | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| $\operatorname{arctg} x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ |

$\frac{1}{x}$

$\ln x$

e^x

$\sin x$

$\arcsin x$

$\cos x$

$\arccos x$

$\operatorname{tg} x$

$\operatorname{arctg} x$

Důležité vzorce

Home Page

Print

Title Page



Page 10 of 11

Go Back

Full Screen

Close

Quit

10. Důležité vzorce

$$\ln x + \ln y = \ln(xy)$$

$$\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$$

$$r \ln x = \ln x^r$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\sin(x) = \sin(\pi - x)$$

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$(e^x)^r = e^{rx}$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\frac{1}{x}$$

$$\ln x$$

$$e^x$$

$$\sin x$$

$$\arcsin x$$

$$\cos x$$

$$\arccos x$$

$$\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{arctg} x$$

Důležité vzorce

Home Page

Print

Title Page



Page 11 of 11

Go Back

Full Screen

Close

Quit