Základy vyšší matematiky (nejen) pro arboristy

Robert Mařík

Poslední změna 2. září 2014

Vytvořeno s podporou projektu Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Obsah

Kapitola 1
Diferenciální počet

1. Funkce jedné proměnné

Definice 1.1 (funkce)**.** Buďte A a B neprázdné podmnožiny množiny reálných čísel.
Pravidlo f, které každému prvku množiny A přiřadí jediný prvek množiny B se nazývá *funkce* (přesněji: *reálná funkce jedné reálné proměnné*). Zapisujeme $\boldsymbol{f : A \to B}$. Skutečnost, že prvku $a \in A$ je přiřazen prvek $b \in B$ zapisujeme takto: $\boldsymbol{f(a) = b}$. Přitom říkáme, že b je *obrazem prvku* a při zobrazení f, resp. že a je *vzorem prvku* b při zobrazení f.

Definice 1.2 (pojmy spojené s funkcemi)**.** Množina A z definice funkce se nazývá *definiční obor funkce* f. Označujeme $\boldsymbol{D(f)}$ (resp. $Dom(f)$). Množina všech $b \in B$, pro které existuje $a \in A$ s vlastností $f(a) = b$ se nazývá *obor hodnot funkce* f. Označujeme $\boldsymbol{H(f)}$ (resp. $Im(f)$).
Je-li $y = f(x)$ nazýváme proměnnou x též *nezávislou proměnnou* a proměnnou y *závislou proměnnou*. *Grafem* funkce rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ s vlastností $y = f(x)$.

Poznámka 1.1. Funkce je tedy pravidlo, které jednomu reálnému číslu přiřadí jediné, přesně definované jiné reálné číslo. Je-li toto pravidlo tvaru "$y =$ vzorec s proměnnou x", nazýváme tento předpis *explicitním tvarem funkce*, např. $y = x^2 + \ln x$.
Je-li toto pravidlo ve tvaru "vzorec s proměnnými $x, y = 0$", nazýváme tento předpis *implicitním tvarem funkce.*, např. $x - y - \ln y = 0$. Zjednodušeně řečeno se tedy jedná o pravidlo, které je buď "efektivní" (explicitní tvar) nebo "málo efektivní" (implicitní tvar) pro výpočet funkčních hodnot.

Následující definice se týká naprosté většiny funkcí, se kterými budeme pracovat.

Definice 1.3 (základní elementární funkce)**.** Všechny mnohočleny, goniometrické, cyklometrické, exponenciální a logaritmické funkce a obecná mocnina se nazývají *základní elementární funkce*.

Definice 1.4 (elementární funkce)**.** Všechny funkce, které ze základních elementárních funkcí získáme konečným počtem operací sčítání, odečítání, násobení, dělení a skládání těchto funkcí navzájem se nazývají *elementární funkce*.

Poznámka 1.2. Elementární funkce jsou tedy všechny funkce, které umíme v konečném tvaru vyjádřit explicitním vzorcem za použití funkcí známých ze střední školy a cyklometrických funkcí.

Motivace. Pro libovolnou dobře definovanou funkci f platí implikace

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

nyní se budeme zajímat o to, za jakých podmínek lze tuto implikaci obrátit. Obrácení implikace by totiž mohlo být užitečné při řešení některých nelineárních rovnic.

Definice 1.5 (prostost)**.** Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f.
Řekneme, že funkce f je *prostá*, jestliže každý obraz má jen jediný vzor, tj. pro každé $y \in f(M)$ existuje jediné $x \in M$ s vlastností $f(x) = y$.
Nespecifikujeme-li množinu M, máme na mysli, že uvedená vlastnost platí na celém definičním oboru funkce f.

Poznámka 1.3 (grafický důsledek)**.** Funkce je prostá, jestliže každá vodorovná přímka protíná graf nejvýše jednou.

Poznámka 1.4 (k prostým funkcím)**.** Ekvivalentně lze říci, že funkce f je prostá na množině M, jestliže stejné obrazy mají nutně i stejný vzor, neboli různým vzorům jsou přiřazeny různé obrazy. Matematicky formulováno: platí implikace

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \tag{1.1}$$

tj. je-li funkce f prostá, můžeme tuto funkci "odstranit" z obou stran rovnice a místo $f(x_1) = f(x_2)$ psát ekvivalentně $x_1 = x_2$.

Definice 1.6 (inverzní funkce)**.** Nechť funkce $f : A \to B$ je prostá. Pravidlo, které každému x z množiny $f(A)$ přiřadí to (jediné) y, pro které platí $f(y) = x$ se nazývá *inverzní funkce* k funkci f, označujeme $\boldsymbol{f^{-1}}$.

Poznámka 1.5. Symbol $f^{-1}(x)$ lze tedy chápat buď jako hodnotu inverzní funkce k funkci f v bodě x, nebo jako převrácenou hodnotu k číslu $f(x)$, tj jako $[f(x)]^{-1} = \dfrac{1}{f(x)}$. Nebude-li z kontextu zřejmé, o kterou variantu se jedná, musíme toto upřesnit.

Poznámka 1.6 (geometrický význam inverzní funkce)**.** Ihned z definice plyne, že graf funkce f a graf funkce k ní inverzní f^{-1} jsou souměrné podle přímky $y = x$, tj. podle osy prvního a třetího kvadrantu.

Poznámka 1.7 (výpočet inverzní funkce)**.** Inverzní funkci k funkci $y = f(x)$ určíme takto: zaměníme formálně v zadání funkce proměnné x a y, máme tedy $x = f(y)$. Tato rovnice definuje implicitně inverzní funkci $y = f^{-1}(x)$. Z této rovnice vyjádříme proměnnou y (pokud toto nelze provést, ponecháme inverzní funkci v implicitním tvaru). Toto vyjádření je jednoznačné (jinak by to znamenalo, že funkce f není prostá a inverzní funkce neexistuje) a definuje explicitně inverzní funkci f^{-1}. U základních elementárních funkcí je zpravidla inverzní funkce jednoduše jiná základní elementární funkce, například inverzní funkce

Funkce $y = f(x)$	Funkce inverzní $y = f^{-1}(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y = x^2,\ x \geq 0$
$y = x^2,\ x \geq 0$	$y = \sqrt{x}$
$y = e^x$	$y = \ln x$
$y = \ln x$	$y = e^x$
$y = a^x$	$y = \log_a x$
$y = \sin x,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$	$y = \arcsin x$
$y = \cos x,\ x \in [0, \pi]$	$y = \arccos x$
$y = \operatorname{tg} x,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$	$y = \operatorname{arctg} x$

Tabulka 1.1: Inverzní funkce k základním elementárním funkcím.

k logaritmické funkci je exponenciální funkce a podobně (viz Tabulka 1.1). Protože vlastnost "být inverzní funkcí" je vlastnost vzájemná, je také logaritmická funkce inverzní k funkci exponenciální.

Poznámka 1.8 (využití inverzní funkce – nelineární rovnice)**.** Má-li funkce f inverzní funkci f^{-1} a je-li tato inverzní funkce definována v bodě x, potom má nelineární rovnice s neznámou y

$$f(y) = x$$

právě jedno řešení dané vzorcem

$$y = f^{-1}(x).$$

Příklad 1.1 (nelineární rovnice)**.** Řešme rovnici

$$e^{\frac{2}{x-1}} = 2.$$

Protože k exponenciální funkci je inverzní logaritmická funkce, plyne odsud

$$\frac{2}{x-1} = \ln 2,$$

odkud již snadno vyjádříme

$$x = \frac{2}{\ln 2} + 1.$$

Jinou možností je přepsat rovnici do tvaru, který obsahuje exponenciální funkci na obou stranách rovnice

$$e^{\frac{2}{x-1}} = e^{\ln 2}$$

a odstranit tuto exponenciální funkci z obou stran rovnice (exponenciální funkce je totiž prostá a lze použít (1.1) a připojenou poznámku). Obdržíme samozřejmě stejný výsledek.

Motivace. V následující definici jsou nejdůležitější pojmy rostoucí a klesající funkce. Názorně řečeno, jsou to funkce které zachovávají (rostoucí) nebo obracejí (klesající) směr nerovnosti při aplikaci funkce na obě strany nerovnice.

Definice 1.7 (monotonie funkce)**.** Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ podmnožina definičního oboru funkce f.

(i) Řekneme, že funkce f je na množině M *rostoucí* jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ s vlastností $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.

(ii) Řekneme, že funkce f je na množině M *klesající* jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ s vlastností $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.

(iii) Řekneme, že funkce f je na množině M *(ryze) monotonní* je-li buď rostoucí, nebo klesající na M.

Nespecifikujeme-li množinu M, máme na mysli, že uvedená vlastnost platí na celém definičním oboru funkce f.

Poznámka 1.9 (využití monotonie – nelineární nerovnice)**.** To, že je funkce rostoucí názorně znamená, že jsou-li vzory funkce (hodnoty x) uspořádány podle velikosti, platí pro jejich obrazy (hodnoty $f(x)$) stejné uspořádání. Je-li $f(x)$ tedy rostoucí funkce, jsou nerovnosti $a < b$ a $f(a) < f(b)$ ekvivalentní. Totéž platí i pro neostré nerovnice.
Můžeme tedy libovolnou (ostrou nebo neostrou) nerovnici např. "logaritmovat", nebo "odlogaritmovat" logaritmem o základu větším než 1. Pozor! Je-li funkce $f(x)$ klesající, obrací se při aplikaci funkce (nebo při vynechání funkce) na obě strany nerovnice znaménko nerovnosti.

Okamžitě z definice vyplývá následující věta.

Věta 1.1. *Je-li funkce f na množině M ryze monotonní, je na této množině i prostá.*

Následující věta ukazuje, že při přechodu k inverzní funkci se zachovává ryzí monotonie.

Věta 1.2. *Je-li funkce $f(x)$ rostoucí (klesající), má tutéž vlastnost i funkce inverzní $f^{-1}(x)$.*

Poznámka 1.10. Sudá funkce není prostá, nemá proto inverzní funkci.

Poznámka 1.11 (shrnující poznámka)**.** Shrňme si, jak nám znalost vlastností funkcí umožňuje pracovat s rovnicemi a nerovnostmi.

$$a = b \overset{f \text{ je prostá}}{\Longleftrightarrow} f(a) = f(b)$$

$$a < b \overset{f \text{ je rostoucí}}{\Longleftrightarrow} f(a) < f(b) \qquad a \leq b \overset{f \text{ je rostoucí}}{\Longleftrightarrow} f(a) \leq f(b)$$

$$a < b \overset{f \text{ je klesající}}{\Longleftrightarrow} f(a) > f(b) \qquad a \leq b \overset{f \text{ je klesající}}{\Longleftrightarrow} f(a) \geq f(b)$$

Je-li funkce f prostá, pak pro každé $y \in H(f)$ má rovnice

$$f(x) = y$$

s neznámou x právě jedno řešení a toto řešení je možno vyjádřit vztahem $x = f^{-1}(y)$.

2. Funkce více proměnných

Symbol $\mathbb{R}^n$ označuje uspořádanou n-tici reálných čísel.

Definice 2.1 (funkce, definiční obor, obor hodnot)**.** Řekneme, že pravidlo f je *funkcí n proměnných* s *definičním oborem* $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ a *oborem hodnot* $Im(f) \subseteq \mathbb{R}$, jestliže toto pravidlo každému $X \in D(f)$ přiřazuje jediné číslo $Y \in Im(f)$. Píšeme $Y = f(X)$.
Prvek X nazýváme *vzor* a číslo Y *obraz*. Je-li f funkce n proměnných, píšeme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Definice 2.2 (graf, vrstevnice)**.** Uvažujme funkci dvou proměnných $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Grafem funkce* f rozumíme množinu bodů $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ s vlastností $z = f(x, y)$. Zpravidla touto množinou bude nějaká plocha v prostoru.
Nechť $C \in Im(f)$ je předem dané číslo. *Vrstevnicí na úrovni* C rozumíme množinu všech bodů $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, splňující $f(x, y) = C$.

Poznámka 2.1 (geometrická představa)**.** Geometricky lze graf funkce dvou proměnných chápat jako plochu v trojrozměrném prostoru, popsaném souřadnicemi x, y a z. Vrstevnice na úrovni C je potom křivka, která je řezem grafu funkce rovinou $z = C$, tj. vodorovnou rovinou, procházející bodem $[0, 0, C]$.

3. Spojitost

Následující definice a věta se vztahuje na funkce jedné i více proměnných.

Definice 3.1 (spojitost)**.** Buď funkce f funkcí jedné nebo více proměnných. Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě X jestliže ke každému okolí V bodu $f(X)$ existuje okolí U bodu X takové, že obrazy všecho bodů z U leží ve V.

Poznámka 3.1. Okolím bodu na reálné ose rozumíme libovolný otevřený interval obsahující tento bod. Okolím bodu v rovině rozumíme vnitřek libovolného kruhu, který tento bod obsahuje, podobně v prostoru rozumíme okolím bodu vnitřek libovolné koule, která tento bod obsahuje.

Věta 3.1 (spojitost elementárních funkcí)**.** *Elementární funkce jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.*

4. Derivace

Definice 4.1 (derivace elementární funkce jedné proměnné). Buď $f(x)$ elementární funkce proměnné x. Funkce $f'(x)$ vytvořená postupnou aplikací následujících pravidel se nazývá *derivace funkce* $f(x)$.

(1) $(c)' = 0$

(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$

(3) $(a^x)' = a^x \ln a$

(4) $(e^x)' = e^x$

(5) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

(6) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

(7) $(\sin x)' = \cos x$

(8) $(\cos x)' = -\sin x$

(9) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(10) $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(13) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

(14) $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

A jsou-li $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, potom

1. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$
2. $(cu(x))' = cu'(x)$
3. $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
4. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
5. $\Big(u(v(x))\Big)' = u'(v(x))v'(x)$

Poznámka 4.1 (druhá derivace a vyšší derivace). Protože výsledkem derivace je funkce, můžeme tuto funkci opět derivovat. Výsledkem je druhá derivace funkce původní. Dalším derivováním získáme třetí a další derivace. Druhou derivaci onačujeme y'', třetí derivaci y''' atd, obecně n-tou derivaci označujeme $y^{(n)}$. Například funkce $y = x^3$ splňuje $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''' = 6$ a $y^{(n)} = 0$ pro libovolné $n \geq 4$.

Definice 4.2 (parciální derivace). Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Pro libovolné ale pevné y definujme funkci jedné proměnné $\varphi(x) = f(x, y)$. Derivaci funkce $\varphi(x)$ nazýváme *parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle proměnné x*. Podobně definujeme parciální derivaci podle y pomocí derivace funkce jedné proměnné $\varphi(y) = f(x, y)$

Poznámka 4.2. Derivaci funkce jedné proměnné $y = f(x)$ označujeme též $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ nebo $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Derivaci funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ podle x označujeme též f_x, z'_x, z_x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Podobně pro derivaci podle y. Druhé derivace označujeme z''_{xx}, f''_{yy}, z''_{xy}, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ a podobně.

Druhé parciální derivace funkce dvou proměnných jsou celkem čtyři. Následující věta ukazuje, že smíšené druhé derivace jsou většinou totožné, tj. že druhé derivace existují ve většině případů pouze tři.

Věta 4.1 (Schwarzova věta). *Jsou-li parciální derivace f''_{xy} a f''_{yx} definované a spojité na otevřené množině M, pak jsou totožné, tj. pro všechna $(x, y) \in M$ platí*

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

5. Využití derivací

Není-li níže výslovně uvedeno jinak, rozumíme v této podkapitole pod pojmem funkce vždy funkci jedné proměnné.

5.1. Rychlost změny veličiny

Poznámka 5.1 (praktický význam derivace). Nechť veličina x označuje čas, měřený ve vhodných jednotkách, a nechť veličina y se mění v průběhu času, tj. $y = y(x)$. Derivace $y'(x)$ poté značí okamžitou rychlost, s níž dochází ke změně velikosti veličiny y v čase x. Značí-li např. $y(x)$ polohu pohybujícího se tělesa v čase x, je derivace $y'(x)$ rovna okamžité rychlosti tohoto tělesa (pojem rychlost užíváme ve fyzikálním smyslu tohoto slova). Značí-li veličina y velikost populace určitého živočišného druhu v čase x, značí derivace $y'(x)$ rychlost nárůstu této populace, tj. počet živočichů, který se v daném okamžiku narodil (za časovou jednotku), zmenšený o počet živočichů, který v daném okamžiku uhynul.

5.2. Lineární aproximace funkce jedné proměnné

Věta 5.1 (souvislost derivace a spojitosti). *Má-li funkce v bodě (na intervalu I) derivaci, je v tomto bodě (na tomto intervalu) spojitá.*

Poznámka 5.2. Opačná věta neplatí, ze spojitosti funkce obecně neplyne existence derivace. Příkladem budiž funkce $y = |x|$ v bodě $x = 0$.

Poznámka 5.3 (rovnice tečny). Má-li funkce f v bodě a derivaci, je rovnice tečny ke grafu funkce v tomto bodě

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Rovnici tečny můžeme použít k lineární aproximaci funkce. V okolí bodu a platí přibližný vzorec

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a),$$

který umožňuje v okolí bodu a nahradit (obecně nelineární) funkci $f(x)$ funkcí lineární.

5.3. Lineární aproximace funkce dvou proměnných

Věta 5.2 (dostatečná podmínka spojitosti, lineární aproximace funkce pomocí parciálních derivací). *Nechť funkce f má definované a spojité parciální derivace v okolí bodu (x_0, y_0). Potom platí následující.*

- *Funkce f je v bodě (x_0, y_0) spojitá.*
- *Rovina o rovnici*

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

  je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

- *Platí přibližný vzorec*

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

  V tomto vzorci je přesnost tím větší, čím

  - *je menší vzdálenost bodů (x, y) a (x_0, y_0),*
  - *jsou menší druhé derivace funkce f (pokud existují).*

5.4. Taylorův polynom

Předpokládejme že je dána funkce f s následujícími vlastnostmi:

- Dokážeme vypočítat funkční hodnotu a hodnotu derivací (až do řádu n) v jistém bodě x_0.
- Nemáme dostatečně efektivní algoritmus na výpočet funkčních hodnot v ostatních bodech $x \neq x_0$.

Pro výpočet funkčních hodnot v bodech v okolí bodu x_0 se budeme snažit funkci aproximovat jednodušší funkcí, v našem případě polynomem stupně n. Nejlepší polynom, který funkci f v okolí bodu x_0 aproximuje je takový polynom, který má s danou funkcí totožné v bodě x_0 derivace až do řádu n. Takový polynom se nazývá Taylorův polynom a nalezneme ho pomocí následující definice.

Definice 5.1 (Taylorův polynom)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$ je přirozené číslo a f funkce, která je definovaná v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a má zde všechny derivace do řádu n včetně. Polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se nazývá *Taylorův polynom* stupně n funkce f v bodě x_0. Bod x_0 se nazývá *střed* Taylorova polynomu.

Poznámka 5.4. Taylorův polynom je jediný polynom stupně n, který má s funkcí f v bodě x_0 společnou funkční hodnotu a hodnotu prvních n derivací. V případě že středem polynomu je $x_0 = 0$ používáme pro Taylorův polynom název *Maclaurinův polynom*.

Věta 5.3 (Taylorova věta)**.** *Nechť funkce f má v bodě x_0 a nějakém jeho okolí $O(x_0)$ spojité derivace do řádu $n+1$, včetně. Pak pro všechna $x \in O(x_0)$ platí*

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x),$$

kde $T_n(x)$ je Taylorův polynom funkce f stupně n se středem v bodě x_0 a $R_{n+1}(x)$ je zbytek. Tento zbytek splňuje

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{5.1}$$

kde c je vhodné číslo ležící mezi x a x_0.

Poznámka 5.5 (aproximace a její přesnost)**.** Z vyjádření zbytku (5.1) plyne, že tento zbytek je malý, jestliže

- x je blízko x_0, tj. absolutní hodnota rozdílu $(x-x_0)$ je malá
- n je velké
- $f^{(n+1)}(x)$ je malá v uvažovaném okolí bodu x_0

Jsou-li tyto podmínky splněny, můžeme psát v okolí bodu x_0

$$f(x) \approx T_n(x)$$

a chyba, které se při tom dopustíme bude malá. (Z (5.1) jsme schopni určit maximální hodnotu chyby, které se přitom dopustíme.)

Poznámka 5.6 (aplikační)**.** Taylorův polynom tedy slouží k tomu, abychom jistou funkční závislost aproximovali závislostí polynomickou. Tím se závislost podstatně zjednoduší, protože polynomy jsou jedny z nejjednodušších funkcí.

5.5. Bolzanova věta

Věta 5.4 (první Bolzanova věta). *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a platí $f(a) \cdot f(b) < 0$ (tj. $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znaménka). Pak funkce $f(x)$ má na intervalu (a, b) nulový bod, tj. existuje číslo $c \in (a, b)$ s vlastností $f(c) = 0$.*

Poznámka 5.7 (nelineární nerovnice). Bolzanova věta umožňuje řešit většinu nelineárních nerovnic. Podle Věty 5.4 totiž funkce může změnit znaménko jedině v bodě, kde je porušena její spojitost (= skokem), nebo v nulovém bodě (= graf protíná osu x). Řešíme-li tedy nerovnici $f(x) > 0$, nalezneme nejprve body nespojitosti funkce f a nulové body této funkce, tj. řešení rovnice $f(x) = 0$. Obě skupiny bodů vyneseme na reálnou osu a definiční obor se tímto rozpadne na několik podintervalů. Uvnitř každého z těchto intervalů platí buď $f(x) > 0$ nebo $f(x) < 0$. Která z těchto variant platí ve kterém z intervalů lze zjistit například postupným dosazováním reprezentantů z jednotlivých intervalů.

5.6. Lokální extrémy, konvexnost a konkávnost

Definice 5.2 (lokální extrém). Buď f funkce a $x_0 \in D(f)$.

- Řekneme, že funkce má v bodě x_0 *lokální maximum*, jestliže existuje ryzí okolí $\overline{O}(x_0)$, takové, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro všechna $x \in \overline{O}(x_0)$. Je-li nerovnost ostrá, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *ostré lokální maximum*.
- Platí-li opačné nerovnosti, říkáme, že funkce má v bodě x_0 *lokální minimum* a *ostré lokální minimum*.
- Lokální maximum a minimum nazýváme společným názvem *lokální extrémy*. Ostré lokální maximum a ostré lokální minimum nazýváme společným názvem *ostré lokální extrémy*.

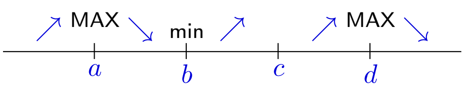
Poznámka 5.8 (k předchozí definici)**.** Funkce má v bodě x_0 ostré lokální maximum (minimum), jestliže v nějakém ryzím okolí bodu x_0 nabývá pouze nižších (vyšších) funkčních hodnot, než $f(x_0)$. Hodnota $f(x_0)$ je tedy jediná nejvyšší (nejnižší) funkční hodnota v nějakém okolí bodu x_0. Okolí bodu x_0 z předchozí definice musí nutně celé ležet v definičním oboru funkce f. (V některé literatuře je tato podmínka poněkud oslabena. Např. u funkce $y = \sqrt{x}$ nemluvíme o lokálním minimum v bodě 0, protože nalevo od bodu 0 vůbec není definována. Jiní autoři tento bod však za lokální extrém považují.)

Lokální extrémy úzce souvisí s monotonií, jak ukazuje následující věta.

Věta 5.5 (postačující podmínky pro existenci a neexistenci lokálních extrémů)**.** *Buď f funkce definovaná a spojitá v nějakém okolí bodu x_0.*

- *Jestliže existuje levé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce rostoucí a pravé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce klesající, je bod x_0 bodem ostrého lokálního maxima funkce f.*
- *Jestliže existuje levé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce klesající a pravé okolí bodu x_0, ve kterém je funkce rostoucí, je bod x_0 bodem ostrého lokálního minima funkce f.*
- *Jestliže existuje okolí bodu x_0 ve kterém je funkce ryze monotonní, lokální extrém v bodě x_0 nenastává.*

Poznámka 5.9. Graficky můžeme předchozí větu ilustrovat následovně.



Poznámka 5.10 (absolutní extrémy funkce)**.** Uvažujme funkci, která je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Tato funkce nabývá na intervalu $[a, b]$ své nejmenší a největší hodnoty (toto tvrzení je známé jako Weierstrassova věta). Tyto hodnoty nazýváme *absolutní maximum* a *absolutní minimum* funkce f na intervalu $[a, b]$. Je zřejmé (odkud?), že těchto extremálních hodnot může funkce nabývat pouze v bodech, ve kterých má lokální extrémy, nebo v některém z krajních bodů intervalu $[a, b]$.

Definice 5.3 (konvexnost, konkávnost)**.** Buď f funkce mající derivaci v bodě x_0. Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 *konvexní (konkávní)*, jestliže existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \overline{O}(x_0)$ leží body grafu funkce nad tečnou (pod tečnou) ke grafu funkce f sestrojenou v bodě x_0, tj. platí

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \Big(f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\Big). \tag{5.2}$$

Řekneme, že funkce je *konvexní (konkávní) na otevřeném intervalu I*, má-li tuto vlastnost v každém bodě intervalu I.

Definice 5.4 (inflexní bod)**.** Bod ve kterém se mění charakter funkce z konvexní na konkávní nebo naopak nazýváme *inflexním bodem* funkce f.

V následujících větách si ukážeme, že monotonie a lokální extrémy úzce souvisí s první derivací funkce, zatímco konvexnost/konkávnost a inflexní body souvisí s druhou derivací.

Definice 5.5 (stacionární bod)**.** Řekneme, že bod x_0 je *stacionárním bodem* funkce f, jestliže funkce f má v bodě x_0 nulovou derivaci, tj. $f'(x_0) = 0$.

Poznámka 5.11 (geometrický význam)**.** Geometricky jsou stacionární body body, ve kterých má graf funkce vodorovnou tečnu (proč?).

Věta 5.6 (souvislost derivace a lokálních extrémů). *Nechť má funkce v bodě x_0 lokální extrém. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá derivaci, nebo je tato derivace nulová, tj. platí $f'(x_0) = 0$ a x_0 je stacionárním bodem funkce f.*

Poznámka 5.12 (strategie hledání lokálních extrémů). Podle předchozí věty jsou body kde derivace neexistuje a stacionární body jedinými "podezřelými" kandidáty na body, v nichž by funkce mohla nabývat lokálního extrému. Nikde jinde (a takových bodů bývá naprostá většina) lokální extrém nemůže nastat. Při hledání lokálních extrémů postupujeme tak, že nejprve nalezneme všechny tyto "podezřelé" body (tj. funkci f zderivujeme a zjistíme, kde je tato derivace nulová a kde není definovaná) a poté v každém bodě samostatně rozhodneme, je-li v něm lokální extrém a případně jaký. K tomu nám může posloužit Věta 5.5 ve spojení s následující Větou 5.7.

Věta 5.7 (souvislost derivace a monotonie). *Nechť funkce f má derivaci na otevřeném intervalu I.*

- *Je-li $f'(x) > 0$ na intervalu I, je funkce f rostoucí na I.*
- *Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu I, je funkce f klesající na I.*

Následující dvě věty jsou jednoduchým důsledkem definice lokálních extrémů a definice rostoucí a klesající funkce. Přesto mohou tyto věty značně zjednodušit hledání lokálních extrémů funkce.

Věta 5.8 (lokální extrémy složené funkce s monotonní vnější složkou). *Nechť funkce $g(x)$ je definovaná na I a $f(x)$ je ryze monotonní na $g(I)$. Potom funkce $g(x)$ a $f(g(x))$ nabývají na I svých lokálních extrémů ve stejných bodech. Tyto lokální extrémy jsou stejného typu pokud je funkce f rostoucí a opačného typu, pokud je funkce f klesající.*

Věta 5.9 (lokální extrémy složené funkce s monotonní vnitřní složkou). *Nechť funkce $g(x)$ je spojitá a ryze monotonní na I a nechť funkce $f(x)$ je definovaná na $g(I)$. Potom složená funkce $f(g(x))$ má lokální v bodě $x = a$ právě tehdy, když funkce $f(t)$ má lokální extrém v bodě $t = g(a)$. Tyto lokální extrémy jsou stejného typu pokud je funkce g rostoucí a opačného typu, pokud je funkce g klesající.*

Příklad 5.1 (lokální extrém složené funkce). Na intervalu $(0, 1)$ hledejme lokální extrémy funkce $y = x\sqrt{1-x^2}$. Podle Věty 5.8 stačí najít extrémy druhé mocniny této funkce, tj. funkce $y = x^2(1-x^2)$. Studovaná funkce je totiž na intervalu I kladná a druhá mocnina tedy roste. Podle Věty 5.9 můžeme zavést substituci $x^2 = t$ a studovat funkci $y = t(1-t)$. Pořád totiž pracujeme s kladnými hodnotami x a druhá mocnina je tedy rostoucí funkce. Grafem funkce $y = t(1-t)$ je parabola s lokálním maximem ve vrcholu, tj. v bodě $t = \frac{1}{2}$, který leží uprostřed mezi nulovými body $t = 0$ a $t = 1$. Zadaná funkce $y = x\sqrt{1-x^2}$ má tedy lokální extrém v bodě, který splňuje $x^2 = \frac{1}{2}$, tj. v bodě $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Protože jsme použili rostoucí funkce, jedná se o lokální extrémy stejného typu, tj. je zde lokální maximum. Vidíme, že lokální extrém jsme našli pouze použitím zcela elementárních prostředků. Postup založený na výpočtu derivace a jejích nulových bodů by byl nepoměrně náročnější.

Věta 5.10 (souvislost druhé derivace s konvexností a konkávností). *Buď f funkce mající druhou derivaci na otevřeném intervalu I.*

- *Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu I, je funkce f konvexní na I.*
- *Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu I, je funkce f konkávní na I.*

Definice 5.6 (kritický bod)**.** Bod, ve kterém má funkce f nulovou druhou derivaci nazýváme *kritickým bodem* funkce f.

Věta 5.11 (souvislost inflexních bodů a druhé derivace)**.** *Nechť má funkce v bodě x_0 inflexní bod. Pak funkce f v bodě x_0 buď nemá druhou derivaci, nebo je tato druhá derivace nulová, tj. platí $f''(x_0) = 0$ a x_0 je kritickým bodem funkce f.*

Věta 5.12 (souvislost druhé derivace s lokálními extrémy)**.** *Buď f funkce a x_0 stacionární bod funkce f. Je-li $f''(x_0) > 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního minima, je-li $f''(x_0) < 0$, nabývá funkce v bodě x_0 lokálního maxima.*

Poznámka 5.13 (technická)**.** Předchozí věta nedává odpověď na otázku zda a jaký lokální extrém nastává ve stacionárním bodě, který je současně i kritickým bodem. V tomto případě totiž nelze o existenci a kvalitě lokálního extrému pomocí druhé derivace rozhodnout. Proto je lepší při hledání lokálních extrémů využívat Věty 5.5 a 5.7.

5.7. Newtonova–Raphsonova metoda

Budeme se zabývat úkolem najít přibližné řešení rovnice

$$f(x) = 0, \tag{5.3}$$

kde $f(x)$ je diferencovatelná funkce.

Při přibližném řešení rovnic zpravidla máme k dipozici jistý počáteční odhad, který nám udává přibližnou polohu kořene, a naším úkolem je tento počáteční odhad zpřesnit na požadovanou přesnost. Tento

počáteční odhad získáme například grafickým řešením rovnice, nebo v nouzi hrubou výpočetní silou střelbou naslepo.
Jedna z metod zpřesnění počátečního odhadu kořenů (Newtonova–Raphsonova) spočívá v aproximaci funkce tečnou a hledání kořene této tečny. Je-li počáteční odhad kořene $x = x_0$, můžeme funkci v okolí bodu dotyku aproximovat tečnou

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{5.4}$$

a označíme-li x_1 novou aproximaci kořene, určíme x_1 z podmínky

$$0 \approx f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

tj.

$$\begin{aligned} f'(x_0)(x_1 - x_0) &\approx -f(x_0) \\ x_1 - x_0 &\approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_1 &\approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

Tento postup můžeme opakovat a odhad x_1 můžeme dále zpřesnit. Za jistých podmínek se takto budeme přibližovat k řešení rovnice $f(x)$. Stanovení podmínek konvergence metody je obsaženo v následující větě. Zhruba řečeno, funkce $f(x)$, musí být *dostatečně hladká*, počáteční odhad musí být *dostatečně blízko* kořene a *derivace zde nesmí být rovna nule*.

Věta 5.13 (Newtonova–Raphsonova metoda)**.** *Nechť $f(x)$ je funkce, která má na $[a,b]$ spojitou druhou derivaci a nechť existuje číslo c takové, že $f(c)=0$. Jestliže $f'(c)\neq 0$, potom existuje $\delta>0$ takové, že posloupnost*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{5.5}$$

konverguje k číslu c pro libovolné počáteční x_0 splňující $|x_0-c|<\delta$.

Konvergence metody je velmi rychlá – každým krokem se počet přesných cifer prakticky zdvojnásobí.

Příklad 5.2 (Newtonova–Raphsonova metoda)**.** Pro funkci $f(x)=\cos(x)-x$ má iterační schéma tvar $x_{n+1}=x_n+\dfrac{\cos(x_n)-x_n}{1+\sin(x_n)}$ a volíme-li $x_0=0.5$, vypadá posloupnost iterací následovně: $x_1 = 0.75522241710563$, $x_2=0.73914166614987$, $x_3=0.73908513392080$, $x_4=0.73908513321516$.

Kapitola 2
Integrální počet

V kapitole věnované diferenciálnímu počtu jsme k funkci našli její derivaci – veličinu udávající rychlost, se kterou se mění funkční hodnoty. Nyní problém otočíme: ke známé derivaci (tj. ke známé rychlosti změny) budeme hledat původní funkci.

1. Neurčitý integrál

Definice 1.1 (neurčitý integrál, primitivní funkce)**.** Buď I otevřený interval, f a F funkce definované na I. Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in I, \tag{1.1}$$

nazývá se funkce F *primitivní funkcí k funkci* f, nebo též *neurčitý integrál funkce* f na intervalu I. Zapisujeme

$$\int \boldsymbol{f(x)}\,\mathbf{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F(x)}.$$

Existuje-li k funkci f neurčitý integrál na intervalu I, nazývá se funkce f *integrovatelná na* I.

Poznámka 1.1 (spojitost primitivní funkce)**.** Primitivní funkce $F(x)$ je vždy spojitá na I, plyne to z existence derivace.

Věta 1.1 (postačující podmínka existence neurčitého integrálu)**.** *Ke každé spojité funkci existuje neurčitý integrál.*

Věta 1.2 (jednoznačnost primitivní funkce). *Primitivní funkce je na daném intervalu k dané funkci určena jednoznačně, až na libovolnou aditivní konstantu. Přesněji, platí následující:*

(i) Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I, platí totéž i pro funkci $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta nezávislá na x.

(ii) Jsou-li F a G primitivní funkce k téže funkci f na intervalu I, liší se obě funkce na intervalu I nejvýše o aditivní konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$F(x) = G(x) + c \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

Poznámka 1.2 (filozofická). Bohužel, ne vždy neurčitý integrál dokážeme efektivně najít. Zatímco problém nalezení derivace funkce složené z funkcí, které umíme derivovat, spočívá pouze ve správné aplikaci vzorců pro derivování, problém nalézt neurčitý integrál i k funkci tak jednoduché, jako je například e^{-x^2} je neřešitelný ve třídě elementárních funkcí (viz též Věta 2.5)

Věta 1.3 (linearita neurčitého integrálu). *Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na I, c nechť je reálné číslo. Pak na intervalu I platí*

$$\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 1.3 (technická)**.** Vzhledem k součtu a násobení konstantou se tedy integrál chová "pěkně", tak jak jsme to viděli i u derivace. Bohužel však neexistují podobné vzorečky pro integrál složené funkce, podílu nebo součinu.

Poznámka 1.4 (základní vzorce pro integrování)**.** Následující vzorce jsou opakem (a v některých případech mírným zobecněním) vzorců pro derivaci základních elementárních funkcí.

$$\int \mathrm{d}x = x + c$$

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + c$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{A} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} \,\mathrm{d}x = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm B} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{A^2 + x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A} + c$$

$$\int \frac{1}{A^2 - x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{A + x}{A - x} \right| + c$$

1.1. Metoda per-partés

Motivace. Pokud vyjdeme ze vztahu pro derivaci součinu

$$(uv)' = u'v + uv'$$

a zintegrujeme jej na tvar

$$uv = \int u'v \, \mathrm{d}x + \int uv' \, \mathrm{d}x,$$

nabízí se nám možnost, vypočítat jeden z integrálů na pravé straně pomocí druhého. To je základní myšlenkou následující metody.

Věta 1.4 (metoda per-partés, speciální případ součinu). *Nechť funkce u a v mají derivace na intervalu I. Pak platí*

$$\int u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x, \tag{1.2}$$

pokud integrál na pravé straně existuje.

Poznámka 1.5 (integrály typické pro výpočet metodou per-partés). Buď $P(x)$ polynom. Metodou per-partés integrujeme například integrály následujících typů

$$\int P(x) e^{\alpha x} \, \mathrm{d}x, \int P(x) \sin(\alpha x) \, \mathrm{d}x, \int P(x) \cos(\alpha x) \, \mathrm{d}x,$$

a

$$\int P(x) \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x, \int P(x) \ln^m x \, \mathrm{d}x.$$

U první skupiny integrálů postupujeme tak, že polynom derivujeme, čímž snížíme jeho stupeň, a v případě potřeby tento postup opakujeme. U druhé skupiny integrálů naopak derivujeme funkce $\operatorname{arctg} x$ a $\ln x$. Ve všech těchto případech je integrál figurující na pravé straně vzorce (1.2) jednodušší než integrál původní.

Příklad 1.1 (integrace per-partés).

$$\int x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x \left[\text{per-partés: } \begin{cases} u = \operatorname{arctg} x & u' = \dfrac{1}{x^2+1} \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases} \right]$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c$$

1.2. Substituční metoda

Věta 1.5 (první substituční metoda, speciální případ složené funkce). *Nechť $f(t)$ je funkce spojitá na intervalu I, nechť funkce $\varphi(x)$ má derivaci na intervalu J a platí $\varphi(J) = I$. Potom na intervalu J platí*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}x = \int f(t) \,\mathrm{d}t, \tag{1.3}$$

dosadíme-li napravo $t = \varphi(x)$

Poznámka 1.6 (technická). Formálně substituci provádíme tak, že píšeme v integrálu vpravo t místo $\varphi(x)$ a $\mathrm{d}t$ místo $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$.

Příklad 1.2 (substituční metoda).

$$\int \operatorname{tg}^3 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, \mathrm{d}x \left[\text{substituce: } \begin{cases} \cos x = t \\ -\sin x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \sin x \, \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \end{cases} \right]$$

$$= \int -\frac{1-t^2}{t^3} \, \mathrm{d}t = \int \frac{1}{t} - t^{-3} \, \mathrm{d}t =$$

$$= \ln|t| + \frac{1}{2} t^{-2} = \ln|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + c$$

V jistém smyslu opačným postupem je druhá substituční metoda.

Věta 1.6 (druhá substituční metoda). *Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I, nechť funkce $\varphi(t)$ má nenulovou derivaci na intervalu J a platí $\varphi(J) = I$. Potom na intervalu I platí*

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) \, \mathrm{d}t, \tag{1.4}$$

dosadíme-li napravo $t = \varphi^{-1}(x)$, kde $\varphi^{-1}(x)$ je funkce inverzní k funkci $\varphi(x)$.

Poznámka 1.7. Existence inverzní funkce φ^{-1} plyne z nenulovosti derivace funkce φ. Výraz napravo v (1.4) sice vypadá komplikovaněji, v praxi však substituci volíme vždy tak, aby po úpravě vpravo vyšel integrál jednodušší, který umíme vypočítat.

Poznámka 1.8 (technická). Formálně substituci provádíme tak, že píšeme v integrálu vpravo $\varphi(t)$ místo x a $\varphi'(t) \, \mathrm{d}t$ místo $\mathrm{d}x$.

Poznámka 1.9. Vidíme, že u druhé substituční metody se vlastně jedná o použití vzorce (1.3) zprava doleva.

2. Určitý integrál

Definice 2.1 (dělení intervalu)**.** Buď $[a, b]$ uzavřený interval $-\infty < a < b < \infty$. *Dělením intervalu* $[a, b]$ rozumíme konečnou posloupnost $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bodů z intervalu $[a, b]$ s vlastností

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Čísla x_i nazýváme *dělící body*.

Definice 2.2 (dolní závora)**.** Buď A neprázdná zdola ohraničená množina reálných čísel. Číslo m se nazývá *dolní závora* množiny A, jestliže $m \leq a$ pro všechna $a \in A$

Příklad 2.1.

- Dolní závorou intervalu $(0, 1)$ jsou například čísla $-1, -\pi, 0$.
- Dolní závorou intervalu $(0, 1)$ nejsou čísla $\frac{1}{2}$, 6 ani e.

Definice 2.3 (infimum)**.** Buď A neprázdná zdola ohraničená množina reálných čísel. Číslo $\inf(A)$ se nazývá *infimum* množiny A, jestliže je největší dolní závorou množiny A.

Příklad 2.2. Intervaly $(0, 1)$, $[0, 1]$, $(0, 1]$ mají všechny infimum rovno číslu 0.

Definice 2.4 (horní závora)**.** Buď A neprázdná shora ohraničená množina reálných čísel. Číslo M se nazývá *horní závora* množiny A, jestliže $M \geq a$ pro všechna $a \in A$

Definice 2.5 (supremum)**.** Buď A neprázdná shora ohraničená množina reálných čísel. Číslo $\sup(A)$ se nazývá *supremum* množiny A, jestliže je nejmenší horní závorou množiny A.

Příklad 2.3. Intervaly $(0,1)$, $[0,1]$, $(0,1]$ mají všechny supremum rovno číslu 1.

Definice 2.6 (dolní a horní součet)**.** Buď $[a,b]$ uzavřený interval a f funkce definovaná, spojitá[a] a ohraničená na $[a,b]$. Buď D dělení intervalu $[a,b]$. Buď $s_i = \min\{f(x), x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i\}$ pro $i = 1..n$ minimum funkce f na jednotlivých intervalech dělení. Potom součet

$$\boldsymbol{s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} s_i(x_i - x_{i-1})}$$

se nazývá *dolní součet funkce f* příslušný dělení D. Podobně obdržíme *horní součet funkce f*, pokud použijeme $S_i = \min\{f(x), x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i\}$ a

$$\boldsymbol{S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} S_i(x_i - x_{i-1})}.$$

[a]tento předpoklad je možno oslabit

Definice 2.7 (určitý integrál)**.** Buď $[a, b]$ uzavřený interval a f funkce definovaná, spojitá a ohraničená na $[a, b]$ a $\mathcal{D}$ množina všech dělení intervalu $[a, b]$. Řekneme, že funkce f je *integrovatelná* na intervalu $[a, b]$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ s vlastností

$$I = \sup_{D \in \mathcal{D}} s(f, D) = \inf_{D \in \mathcal{D}} S(f, D),$$

pak číslo I nazýváme *určitý integrál funkce f na intervalu* $[a, b]$ a označujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definice 2.8 (horní a dolní mez)**.** Číslo a v definici určitého integrálu se nazývá *dolní mez* a číslo b *horní mez*.

Následující definice doplňuje definici určitého integrálu v případě, že dolní mez není menší než mez horní.

Definice 2.9 (výměna mezí v určitém integrálu)**.** Pro $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Dále definujeme $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Věta 2.1 (linearita určitého integrálu vzhledem k funkci)**.** *Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na $[a, b]$, c nechť je reálné číslo. Pak platí*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

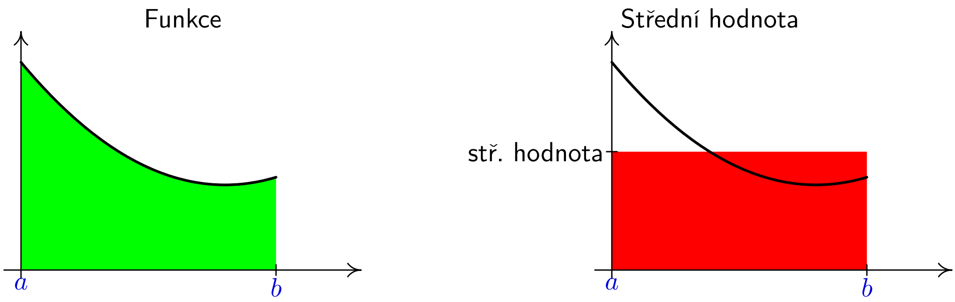
$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 2.2 (aditivita určitého integrálu vzhledem k mezím)**.** *Nechť f je funkce integrovatelná na $[a, b]$. Buď $c \in (a, b)$ libovolné. Pak je f integrovatelná na intervalech $[a, c]$ a $[c, b]$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 2.3 (monotonie vzhledem k funkci)**.** *Buďte f a g funkce integrovatelné na $[a, b]$ takové, že $f(x) \leq g(x)$ pro $x \in (a, b)$. Pak platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Poznámka 2.1 (integrál z nezáporné funkce)**.** Pro $f \equiv 0$ dostáváme z předchozí věty tvrzení, že integrál z funkce nezáporné na celém integračním oboru je nezáporný.



Obrázek 2.1: Určitý integrál a integrální střední hodnota funkce

Definice 2.10 (střední hodnota)**.** Číslo $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se nazývá *střední hodnota funkce f na intervalu* $[a,b]$.

V praxi se určitý integrál počítá užitím následující věty.

Věta 2.4 (Newtonova–Leibnizova věta)**.** *Nechť funkce $f(x)$ je Riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$. Nechť $F(x)$ je funkce spojitá na $[a,b]$, která je intervalu (a,b) primitivní k funkci $f(x)$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Příklad 2.4 (použití Newtonovy–Leibnizovy věty)**.** Protože primitivní funkcí k funkci x^3 je funkce $\dfrac{x^4}{4}$, platí

$$\int_0^1 x^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

V následující poznámce si uvedeme metodu, jak přibližně určit hodnotu určitého integrálu v případě, že není snadné použít Newtonovu–Leibnizovu větu, např. když nedokážeme nalézt primitivní funkci.

Poznámka 2.2 (lichoběžníkové pravidlo, přibližný výpočet určitého integrálu)**.** Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$. Rozdělme interval $[a, b]$ na n intervalů *stejné délky* h, tj. platí $h = \dfrac{b-a}{n}$. Krajní body těchto intervalů označme po řadě x_0, x_1, ..., x_n a jim odpovídající funkční hodnoty y_0, y_1, ..., y_n. Hlavní myšlenka aproximace integrálu funkce f na intervalu $[a, b]$ spočívá v tom, že na tomto intervalu nahradíme funkci $f(x)$ lomenou čarou s vrcholy v bodech $[a = x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, ... $[x_n = b, y_n]$ a integrál z takto upravené funkce vypočteme jako součet obsahů jednotlivých lichoběžníků, z nichž je obrazec pod lomenou čárou sestaven. (Toto lze provést i když funkce f nezachovává znaménko na intervalu $[a, b]$.) Potom platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\Big(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\Big).$$

Přitom chyba v tomto vzorci je tím menší, čím je

- větší n,
- menší rozdíl $b - a$,

i	x_i	y_i	m	my_i
1	0.00	0.000000	1	0.000000
2	0.25	0.015625	2	0.031250
3	0.50	0.125000	2	0.250000
4	0.75	0.421875	2	0.843750
5	1.00	1.000000	1	1.000000
			Součet:	2.125000

Tabulka 2.1: Lichoběžníkové pravidlo

- menší $|f''(x)|$ na (a,b).

Příklad 2.5 (lichoběžníkové pravidlo)**.** Pokusíme se pomocí lichoběžníkového pravidla aproximovat integrál $\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$ z Příkladu 2.4. Rozdělíme interval $[0,1]$ na 4 dílky o délce 0.25 a pro pohodlný výpočet použijeme Tabulku 2.1. Výsledná aproximace tedy je $\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x \approx \frac{0.25}{2}2.125000 = 0.265526$. Porovnáme-li tuto hodnotu s přesným výsledkem z Příkladu 2.4 vidíme, že přes poměrně primitivní aproximaci, je chyba menší než 7%. Jemnějším dělením získáme hodnotu ještě přesněji.

Pomocí integrálu můžeme definovat užitečné neelementární funkce – například primitivní funkce k funkcím, které jsme doposud neuměli integrovat. Umožní nám to následující věta.

Věta 2.5 (integrál jako funkce horní meze). *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu I a nechť $a \in I$. Potom funkce $F(x)$ definovaná na I vztahem*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

má na intervalu I derivaci a platí $F'(x) = f(x)$.

Příklad 2.6. Pro funkci $f(x) = x^2$ platí $\displaystyle\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}$ což je skutečně jedna z primitivních funkcí k funkci x^2, jak již víme z kapitoly o neurčitém integrálu (viz též vzorce na konci tohoto textu).

Poznámka 2.3. Již dříve jsme uvedli, že k funkci e^{-x^2} existuje primitivní funkce, ale tuto funkci neumíme najít. Nyní vidíme, že tuto primitivní funkci lze zapsat například ve tvaru $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Pokud nás zajímá například funkční hodnota v bodě $x = 1$, stačí určit hodnotu integrálu $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Tuto hodnotu sice neumíme vypočítat přesně, můžeme ji však přibližně vypočítat pomocí lichoběžníkového pravidla.

3. Dvojný integrál

3.1. Dvojný integrál na obdélníku

Definujme funkci na obdélníku $R = [a, b] \times [c, d]$ ohraničenou funkci $f(x, y)$. Obdélník rozdělme na podobdélníky p_1, p_2, ..., p_n o obsazích Δp_1, Δp_2, ..., Δp_n. Toto dělení označme D.

V obdélníčku p_i najdeme supremum M_i a infimum m_i funkce $f(x,y)$. Sestrojme horní a dolní integrální součet příslušný dělení D podle vzorců

$$S(D) = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta p_i \ \ldots \text{horní součet}$$

$$s(D) = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta p_i \ \ldots \text{dolní součet}$$

- Supremum množiny všech dolních součtů nazýváme *dolní dvojný integrál*.
- Infimum množiny všech horních součtů nazýváme *horní dvojný integrál* .

Definice 3.1 (dvojný integrál)**.** Jestliže jsou si horní a dolní integrál rovny, pak jejich společnou hodnotu značíme

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{3.1}$$

a nazýváme *dvojný integrál funkce f v R.* O funkci f říkáme, že je na množině R *integrovatelná*.

Výpočet dvojného integrálu provádíme s využitím následující věty o převodu dvojného integrálu na dvojnásobný (dva "obyčejné" integrály).

Věta 3.1 (Fubini)**.** *Nechť $R = [a,b] \times [c,d]$ je uzavřený obdélník v $\mathbb{R}^2$ a f funkce definovaná a spojitá na R. Pak platí*

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y.$$

Věta 3.2 (Důsledek Fubiniovy věty). *Platí-li ve větě 3.1 rovnost* $f(x,y) = g(x)h(y)$, *platí*

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y.$$

3.2. Dvojný integrál v obecné oblasti

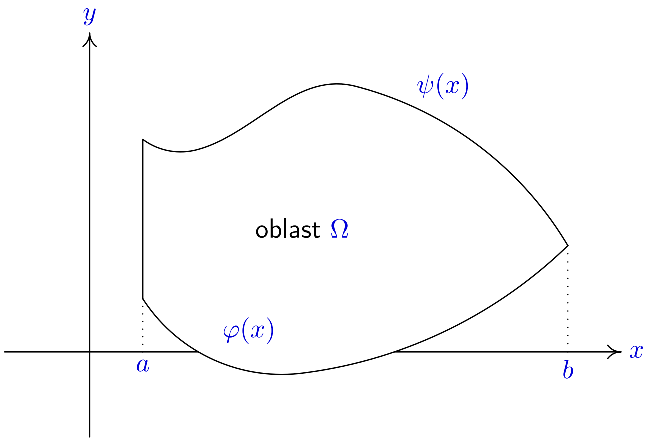
Definice 3.2 (dvojný integrál v obecné oblasti). Buď Ω uzavřená ohraničená oblast. Buď R dostatečně velký obdélník, takový, že $\Omega \subseteq R$. Definujme na R funkci g předpisem

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Potom definujeme integrál funkce f na množině Ω předpisem

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

V dalším budeme pro jednoduchost předpokládat, že oblasti přes které integrujeme mají hranici tvořenu po částech hladkou uzavřenou křivkou.

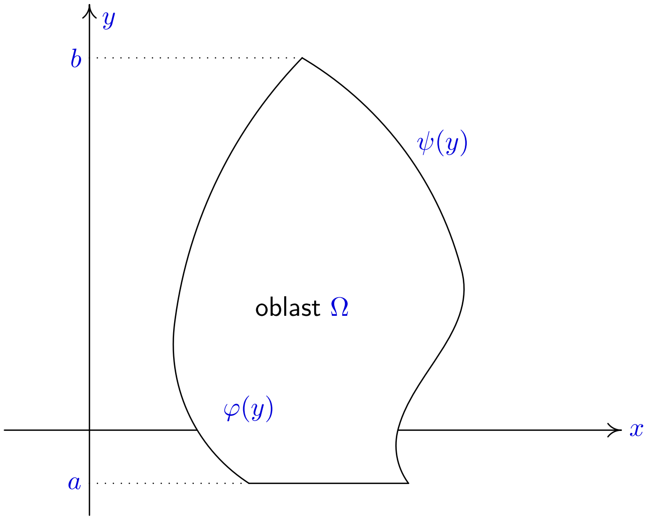


Věta 3.3 (Fubini). *Nechť f je funkce spojitá v uzavřené oblasti*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ a } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Potom

$$\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x$$



Věta 3.4 (Fubini)**.** *Nechť f je funkce spojitá v uzavřené oblasti*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le y \le b \text{ a } \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}.$$

Potom

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y$$

Věta 3.5 (linearita integrálu). *Buď f_1, f_2 funkce integrovatelné v Ω a c_1, c_2 libovolná reálná čísla. Platí*

$$\iint_\Omega [c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c_1 \iint_\Omega f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + c_2 \iint_\Omega f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Věta 3.6 (aditivita vzhledem k oboru integrace). *Nechť je oblast Ω rozdělena na dvě oblasti Ω_1 a Ω_2, které mají společné nejvýše hraniční body. Platí*

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Omega_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

3.3. Fyzikální aplikace dvojného integrálu

- Obsah množiny M vypočteme jako

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

- Hmotnost množiny M vypočteme jako

$$m = \iint_M \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $\sigma(x,y)$ je plošná hustota (hmotnost vztažená na jednotku povrchu).

- Těžište hmotné množiny M je v bodě $[x_T, y_T]$, kde

$$x_T = \frac{1}{m}\iint_M x\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$y_T = \frac{1}{m}\iint_M y\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

  a m je hmotnost množiny.

- Moment setrvačnosti hmotné množiny M vzhledem k ose je

$$J = \iint_M \rho^2(x,y)\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

  kde $\rho(x,y)$ je vzdálenost bodu (x,y) od osy otáčení. Například pro osu x je $\rho(x,y) = y$ a pro osu y je $\rho(x,y) = x$. Pro osu procházející kolmo počátkem je $\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.[1]

  V dimenzování nábytku se setkáte s veličinami kvadratický moment průřezu (což je moment setrvačnosti pro $\sigma(x,y) = 1$) a modul průřezu, která úzce souvisí s kvadratickým momentem a polohou těžiště. V případě hledání těžiště průřezu také klademe $\sigma(x,y) = 1$ a hmotnost se tedy redukuje na obsah. Vzorce pro obsah (S), x-ovou souřadnici těžiště (x_T), y-ovou souřadnici těžiště (y_T), kvadratický moment vzhledem k ose x (I_x) a kvadratický moment vzhledem k ose y (I_y) tedy jsou

$$S = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$x_T = \frac{1}{S}\iint_M x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad I_x = \iint_M y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

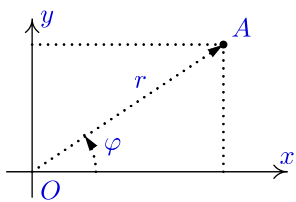
[1] V praxi počítáme moment setrvačnosti vzhledem k osám, procházejícím těžištěm. Moment setrvačnosti k jiným osám se poté dá odvodit pomocí Steinerovy věty (http://cs.wikipedia.org/wiki/Steinerova_v%ECta).

$$y_T = \frac{1}{S} \iint_M y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y, \qquad I_y = \iint_M x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

4. Polární souřadnice

Dosud jsme používali pouze kartézské souřadnice: dvojici čísel udávající vzdálenost bodu od osy y a od osy x, která jednoznačně určuje polohu bodu v rovině[2]. V praxi je někdy výhodnější použít i jiný způsob jak pomocí dvojice čísel charakterizovat polohu bodu v rovině – takové souřadnice potom nazýváme *křivočaré* souřadnice.

Z křivočarých souřadnic jsou nejdůležitější *polární souřadnice*. Při jejich použití polohu bodu A zadáváme tak, že určíme vzdálenost r bodu od počátku soustavy souřadnic O a úhel φ, který svírá spojnice bodů O a A s kladnou částí osy x.



$r \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$

Obrázek 2.2: Polární souřadnice

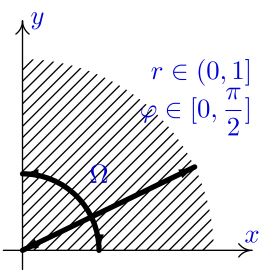
[2] Myšlenka používat takové souřadnice pochází od filozofa Reného Descarta, který jednou pozoroval mouchu na stropě a uvědomil si, že pro jednoznačné stanovení polohy mouchy na stropě stačí zadat její vzdálenost od dvou navzájem kolmých stěn.

Chceme-li převést dvojný integrál do polárních souřadnic, provádíme v něm vlastně substituci $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$. Přitom se transformují i diferenciály $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ a výsledný vzorec má tvar

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r.$$

V diferenciálním počtu polární souřadnice používáme především tam, kde má problém radiální symetrii. Například při studiu ochlazování nebo kmitů kruhových desek či válcovitých součástek. V integrálním počtu tyto souřadnice použijeme zejména v případě, kdy integrujeme přes kružnici nebo její část (např. mezikruží či kruhová výseč). V takovém případě mají totiž integrály které vzniknou po aplikaci Fubiniovy věty pevné meze a výpočet druhého integrálu je zpravidla jednodušší. V následujícím příkladě pro srovnání vypočteme tentýž integrál v polárních i v kartézských souřadnicích.

Příklad 4.1. Vypočtěte $\displaystyle\iint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde Ω je čtvrtina jednotkového kruhu, ležící v prvním kvadrantu.



Výpočet v polárních souřadnicích:

$$\iint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \underbrace{r\cos\varphi}_{\text{funkce}} \; \underbrace{r}_{\text{Jakobián}} \; \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = \int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \left[\sin\varphi\right]_0^{\pi/2} = \left[\frac{1}{3} - \frac{0}{3}\right] \left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right] = \frac{1}{3}$$

5. Obyčejné diferenciální rovnice (úvod)

Obyčejná diferenciální rovnice je matematický vztah mezi neznámou funkcí a jejími derivacemi

Definice 5.1 (obyčejná diferenciální rovnice). *Obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu rozřešenou vzhledem k derivaci* (stručně - diferenciální rovnicí (ODR)) s neznámou y rozumíme rovnici tvaru

$$y' = f(x, y) \tag{5.1}$$

kde f je funkce dvou proměnných. *Řešením* (též *integrálem*) rovnice na intervalu I rozumíme každou funkci $y = y(x)$, která splňuje identicky (5.1) na I.
Úloha najít řešení rovnice (5.1), které splňuje zadanou *počáteční podmínku*

$$y(x_0) = y_0 \tag{5.2}$$

se nazývá *počáteční úloha* nebo též *Cauchyova úloha*. Jejím řešením rozumíme funkci, která splňuje podmínku (5.2) a je na nějakém intervalu obsahujícím bod x_0 řešením rovnice (5.1).
Řešení Cauchyovy úlohy nazýváme též *partikulárním řešením rovnice* (5.1). Graf partikulárního řešení se nazývá *integrální křivka*.

V souvislosti s diferenciálními rovnicemi nás zajímá především otázka, zda daná rovnice (počáteční úloha) má řešení, na jakém intervalu je toto řešení definováno a zda je určeno jednoznačně. My se budeme navíc zabývat pouze rovnicemi, u nichž lze řešení nalézt analytickou cestou pomocí integrálního počtu.

5.1. Rovnice typu $y' = f(x)$

Nejjednodušším příkladem diferenciální rovnice je rovnice tvaru

$$y' = f(x). \tag{5.3}$$

Z integrálního počtu víme, že tuto rovnici splňuje každá primitivní funkce k funkci f, tj. že řešením rovnice (5.3) je funkce

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C,$$

kde C je libovolná konstanta. Takovéto řešení, které obsahuje konstantu, nazýváme *obecné řešení rovnice*. Toto řešení tedy reprezentuje všechny funkce, vyhovující dané rovnici (je jich zřejmě nekonečně mnoho) Libovolné partikulární řešení získáme z obecného řešení vhodnou volbou konstanty.

Poznámka 5.1 (obecné a partikulární řešení)**.** Podobný princip platí i u dalších diferenciálních rovnic. Funkcí které vyhovují diferenciální rovnici prvního řádu je nekonečně mnoho, zapíšeme-li všechny jedním vzorcem, bude tento vzorec obsahovat jistou konstantu C. Takový vzorec se nazývá *obecné řešení diferenciální rovnice*. Každé jednotlivé (partikulární) řešení lze z tohoto vzorce obdržet[3] vhodnou volbou konstanty C.

5.2. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

V tomto odstavci si uvedeme postup řešení jedné z nejjednodušších diferenciálních rovnic.

[3]i z tohoto pravidla však existují výjimky, :)

Definice 5.2 (ODR se separovanými proměnnými). ODR tvaru

$$y' = f(x)g(y), \tag{5.4}$$

kde f a g jsou spojité funkce na otevřených intervalech nazýváme *obyčejnou diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými.*

Počáteční úloha pro rovnici se separovanými proměnnými nemusí mít vždy jediné řešení. Existují dokonce řešení, které mají porušenu jednoznačnost v každém bodě svého definičního oboru. Tato řešení se nazývají *singulární*.

Tuto rovnici řešíme separací proměnných následovně:

(i) Má-li rovnice $g(y) = 0$ řešení k_1, k_2, ..., k_n, jsou konstantní funkce $y = k_1$, $y = k_2$, ..., $y = k_n$ řešeními rovnice. Ostatní řešení jsou nekonstantní a nalezneme je v dalších krocích.

(ii) Dále pracujme jenom na intervalech, kde $g(y) \neq 0$. Formálně nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

(iii) Se zlomkem $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pracujeme "normálně" jako s podílem dvou výrazů. Násobením a dělením převedeme rovnici na tvar, který obsahuje na každé straně pouze jednu proměnnou:

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(iv) Získanou rovnost zintegrujeme:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

Vlevo je tedy integrál v proměnné y, vpravo integrál v proměnné x a na jednu ze stran rovnice přidáme integrační konstantu. Tím obdržíme rovnici, která implicitně zadává obecné řešení rovnice.

(v) Pokud je zadána počáteční podmínka, dosadíme ji do obecného řešení a určíme hodnotu konstanty C. Tuto dosadíme do obecného řešení a obdržíme řešení partikulární.

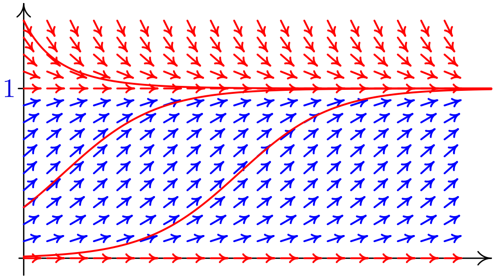
(vi) Pokud je to možné, převedeme řešení (obecné nebo partikulární) do explicitního tvaru ("vyjádříme" odsud y).

(vii) Pokud je možné některé z konstantních řešení obdržet vhodnou volbou konstanty ve vzorci pro obecné řešení, zahrneme toto konstantní řešení do obecného. Řešení, která není takto možno zahrnout do obecného řešení jsou často singulárními.

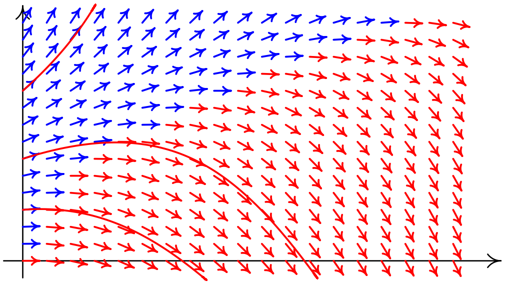
Poznámka 5.2 (geometrický význam diferenciální rovnice)**.** Zajímejme se o to, jak budou vypadat integrální křivky rovnice (5.1). Protože derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke grafu funkce v tomto bodě, lze rovnici (5.1) chápat jako předpis, který každému bodu v rovině přiřadí směrnici tečny k integrální křivce, která tímto bodem prochází. Sestrojíme-li v dostatečném počtu (například i náhodně zvolených) bodů $[x, y]$ v rovině kratičké úsečky o směrnici $\varphi(x, y)$, obdržíme *směrové pole diferenciální rovnice* — systém lineárních elementů, které jsou tečné k integrálním křivkám. Často lze ze směrového pole odhadnout tvar integrálních křivek. Protože se však jedná pouze o *odhad* tvaru integrálních čar, používáme tuto metodu jen v případě, kdy nám stačí pouze hrubá informace o jednotlivých řešeních, nebo v případech kdy selhávají ostatní dostupné metody.

Počáteční podmínka (5.2) geometricky vyjadřuje skutečnost, že graf příslušného řešení prochází v rovině bodem $[x_0, y_0]$. Má-li tato počáteční úloha jediné řešení, neprochází bodem $[x_0, y_0]$ žádná další křivka.

Má-li každá počáteční úloha jediné řešení (což bude pro nás velice častý případ), znamená to, že integrální křivky se *nikde neprotínají*.



Obrázek 2.3: Směrové pole rovnice $y' = y(1-y)$.



Obrázek 2.4: Směrové pole rovnice $y' = y^2 - x$.