

Využití derivací v praktických příkladech

Robert Mařík



Copyright © 2011
Poslední změna 25. října 2011

V níže uvedených příkladech klikněte na výsledek pro zobrazení výpočtu a případně náčrtku situace. Použijte Adobe Acrobat nebo prohlížeč, který umí pracovat s vrstvami v PDF (Optional Content Groups).

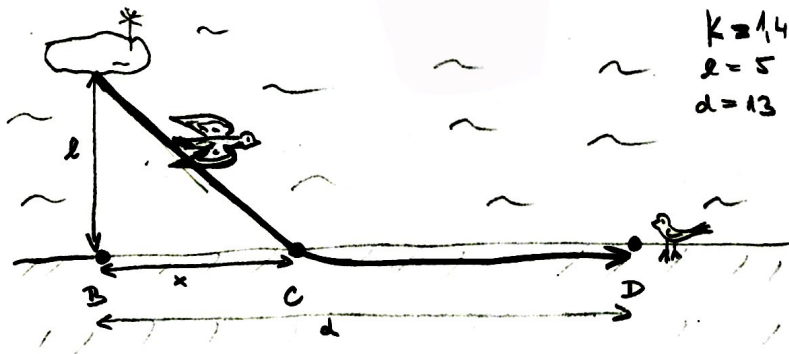
Obsah

1	Nejpohodlnější cesta	3
2	Rychlost rozšiřování spáleniště	4
3	Změna objemu vlivem teplotní roztažnosti	5
4	Rychlost s jakou roste hladina v nádrži	6
5	Rychlost taženého objektu	7
6	Propustnost mostu	8
7	Oplocování pozemku	9
8	Cvičení	10
9	Tečna a její průsečíky	12
10	Křivka táhnutí	13
11	Rozpůlená tečna	14
12	Vzdálenost průsečíků	15
13	Lichoběžník konstatního obsahu	16

1. Nejpohodlnější cesta

Ornitologové zjistili, že některé druhy ptáků nerady létají ve dne nad velkými vodními plochami. Předpokládá se, že pro let nad vodou je třeba větší výdej energie než nad pevninou, protože nad pevninou ptáky nadnáší stoupající teplý vzduch. Pták s tímto druhem chování byl vypuštěn z ostrova vzdáleného 5 km od pobřeží (od bodu B) a cílem jeho letu je bod D . Pták instinktivně volí cestu s nejmenším výdejem energie, letí nejprve do bodu C a poté pokračuje do bodu D .

- Pokud obecně platí, že pro zdolání vzdálenosti 1 km je nad vodou nutno vydat 1.4 -krát více energie než pro let nad pevninou, určete polohu bodu C ve kterém pták odbočí. [5.1 km]
- Pokud ornitologové pozorují, že některé druhy ptáků odbočují 4 km od bodu B , kolikrát je pro tento druh ptáků namáhavější let nad vodou než nad pevninou? [1.6-krát]
- Kolikrát musí být namáhavější let nad vodou, aby se ptákům vyplatilo letět přímou cestou. [nejvýše 1.07-krát namáhavější]



2. Rychlost rozšiřování spáleníště

Oheň se v suché pláni šíří do stále většího kruhu. Poloměr kruhu roste rychlostí 2 m/min . Jak rychle roste plocha zasažená ohněm, jestliže poloměr spáleníště je 30 m ? [$377 \text{ m}^2/\text{min}$]

3. Změna objemu vlivem teplotní roztažnosti

Kovová tyč o průměru 6 cm a délce 40cm je zahřívána. Vlivem teplotní roztažnosti roste délka rychlostí 0.0005 cm/min a průměr 0.0002 cm/min. Jak rychle roste objem tyče? [0.0895 cm³/min]

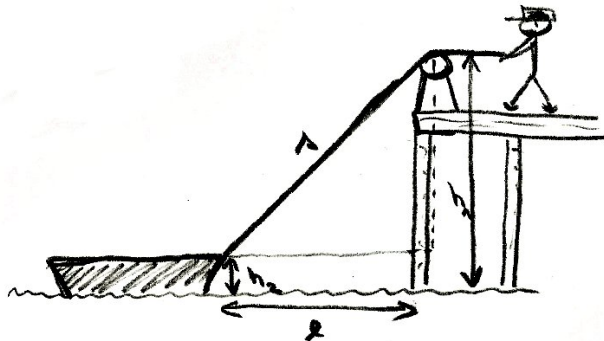
4. Rychlost s jakou roste hladina v nádrži

Koryto na vodu má průřez rovnostranného trojúhelníka o straně 20 cm a je dlouhé 80 cm. Přitéká do něj voda rychlostí $15 \text{ cm}^3/\text{min}$. Hloubka vody v korytě (měřeno uprostřed, kde je hloubka největší) je 8 cm. Jak rychle roste hladina? [0.02 cm/min]

5. Rychlost taženého objektu

Muž na molu přitahuje přes kladku loď na laně. Lano je uvázáno na přídi 40 cm nad vodou. Rychlost lana je 1 m/sec. Loď je 7 m od mola, vrch kladky je 3 m nad vodou. Jak rychle se loď blíží k molu?

[1.067 m/sec]



$$l = 7$$

$$\frac{ds}{dt} = 1$$

$$h_1 = 3$$

$$h_2 = 0.4$$

$$\frac{dl}{dt} = ?$$

6. Propustnost mostu

Auta jednou přes most dlouhý 3 km. Každé auto je dlouhé 3.5 m a pro bezpečné zastavení musí udržovat od předchozího aut vzdálenost d . Brzdná dráha auta jedoucího rychlostí v je (v metrech) přibližně $0.006v^2$. Pokud předpokládáme $d = 0.003v^2$ (odstup aut je polovina brzdné dráhy), najděte rychlost, při které přes most přejeđe nejvíce aut. [34 km/hod]

7. Oplocování pozemku

Pletivem délky L je nutno oplotit pozemek obdélníkového tvaru.

- a) Určete, jaký tvar pozemku je vhodné oplotit tak, aby oplocená plocha byla co největší. [čtverec]
- b) Určete, jaký tvar je optimální, pokud plot bude jenom ze tří stran (čtvrtá strana je například skála a oplocení zde není nutné). [obdélník s poměrem délek stran 2:1]

8. Cvičení

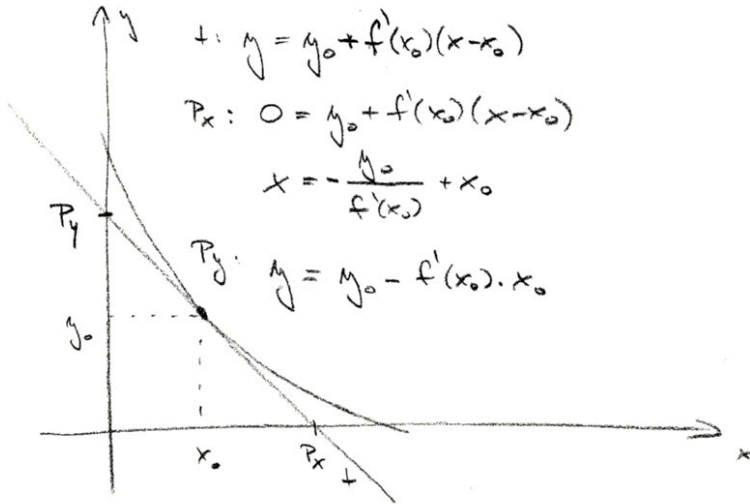
- Najděte dvě kladná čísla, jejichž součet je 5 a součin druhé mocniny prvního čísla s třetí mocninou druhého čísla je co největší. [2 a 3]
- Z obdélníku o rozměrech 10×16 vyřízneme v rozích čtyři stejné čtverce a vzniklé obdélníkové části ohneme nahoru. Vznikne tím krabice bez víka. Jak velké čtverce je nutno vyříznout, aby objem krabice byl co největší? [2]
- Ukažte, že pokud hledáme mezi všemi obdélníky vepsanými do kružnice obdélník s největším obvodem, je výsledkem čtverec. [Tvrzení platí]
- Máme oplotit pozemek tvaru obdélníka, jehož jedna strana leží podél dlouhé zdi a zbývající tři strany jsou tvořeny plotem. Celkový obsah obdélníka je 600 m^2 . Jaký zvolit tvar pozemku, aby spotřeba plotu byla co nejmenší? [Strany jsou $10\sqrt{3}$ a $\frac{60}{\sqrt{3}}$]
- Pro válec zadaného objemu najděte poměr výšky a poloměru podstavy, který zaručí, že povrch je minimální. [Výška je dvojnásobek poloměru.]
- Pro hrnek zadaného objemu (válec bez horní podstavy) najděte poměr výšky a poloměru podstavy, který zaručí, že povrch je minimální. [Výška je rovna poloměru.]
- Válec je vepsán do kužele o výšce 6 a poloměru podstavy 3. Jaký může být maximální objem takového válce? [8π]
- Válec je vepsán do koule. Jaké mají být rozměry válce, aby jeho objem byl co největší? [poloměr $\sqrt{\frac{2}{3}}R$ a výška $\frac{2}{\sqrt{3}}R$, kde R je poloměr koule]
- Nosnost (odolnost proti porušení) nosníku obdélníkového průřezu je dána součinem šířky a druhé mocniny výšky. Jaký nosník máme vyřezat z kulatiny, aby byl co nejpevnější?

10. Tuhost (odolnost proti deformaci) nosníku obdélníkového průřezu je dána součinem šířky a třetí mocniny výšky. Jaký nosník máme vyřezat z kulatiny, aby byl co nejtužší?

11. Normanské okno je okno obdélníkového tvaru, zakončené nahoře polovinou kruhu. Jaké mají být proporce takového okna, aby při konstantním obvodu mělo co největší obsah (tj. aby bylo co nejsvětlejší).

[šířka je $l/(2 + \pi/2) \approx 0.28l$, kde l je obvod]

9. Tečna a její průsečíky



10. Křivka táhnutí

Napište rovnici křivky popisující trajektorii objektu, který startuje napravo od jiného objektu, pohybujícího se směrem nahoru a táhnoucího první objekt na neprotažitelné struně délky 1 m za sebou? Tj. najděte rovnici křivky takové, že délka tečny mezi bodem dotyku a průsečíkem s osou y je rovna jedné.

$$[y' = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}]$$

11. Rozpůlená tečna

V prvním kvadrantu najděte rovnici křivek, které mají tu vlastnost, že úsek mezi průsečíky tečny se souřadnými osami je dotykovým bodem rozpůlen.

$$[y' = -\frac{y}{x}]$$

12. Vzdálenost průsečíků

V prvním kvadrantu najděte rovnici křivek, pro které je průsečík tečny v libovolném bodě a osy x stejně vzdálen od počátku, jako od bodu dotyku.

$$[y' (x^2 - y^2) = 2xy]$$

13. Lichoběžník konstatního obsahu

V prvním kvadrantu najděte rovnici křivek, které mají tu vlastnost, že obsah lichoběžníka tvořeného osami souřadnic, tečnou a kolmicí na osu x vedenou bodem dotyku roven jedné.

$$\left[y'x = 2y - \frac{2}{x} \right]$$